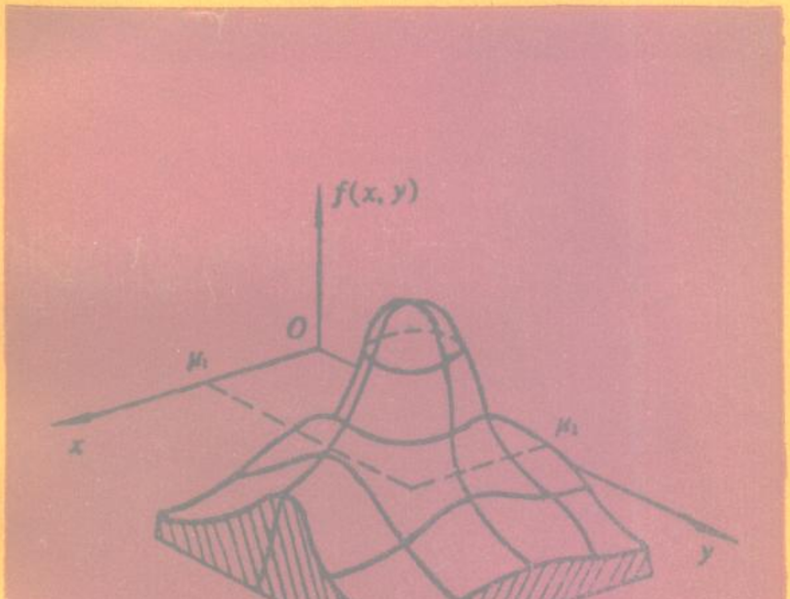
概率统计(工程数学)

同济大学概率统计教研组 编著



同济大学出版社

概率统计(工程数学)

同 济 大 学
概率统计教研组 编著

同济大学出版社

沪新登字(204)

内 容 提 要

本书根据1993年国家教委关于"高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求"编写而成。内容包括：随机事件与概率、离散型随机变量、连续型随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验和回归分析与方差分析等。书中附有相当数量的习题；附表中列有一系列数值用表；书后还附有答案，可供读者自我检核。

本书从实例出发引入基本概念，强调概率统计在工程技术上的应用，写法新颖。本书可作工科院校概率论与数理统计课程的教材或参考书，也可供工程技术人员和科技人员参考。

责任编辑 李炳钊
封面设计 王肖生

概率统计(工程数学)
同 济 大 学
概率统计教研组 编著
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张：10 字数：290千字
1994年3月第1版 1994年3月第1次印刷
印数：1—7000 定价：7.10元
ISBN7-5608-1310-0/O·116

前　言

概率论与数理统计是随机数学的两个分支，它们在各个领域中都有极其广泛的应用。目前，概率论与数理统计已经成为绝大多数工科专业大学生的一门重要的基础理论课程。

为了便于读者掌握概率论与数理统计的基本概念与基本理论，初步掌握处理随机现象的基本思想与方法，提高运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，本书在内容处理上作了如下安排：(1)以实际例子引进概率统计的基本概念；(2)强调概率统计在工程技术上的应用；(3)以离散型随机变量为对象讲清概率论中的基本概念与基本性质，以连续型随机变量为背景强调概率论的计算与应用；(4)对随机变量的分布强调值域这个容易被忽视的概念；(5)按国家标准采用规范的概率统计术语。

本书是我们教研组全体任课老师历年教学工作的一个总结。油印讲义在教学中曾使用了多次。现根据1992年国家教委下达的"高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求"作了进一步的修订。本书可作为高等工业学校概率论与数理统计课程的教材或教学参考书。

本书由王金宝(第一、二章)，钱志坚(第三、四章)，钱伟民(第五、六章)与庄勇荣(第七、八章)编写初稿，由何迎晖统稿写第二稿，最后由潘承毅修改、润色、定稿。在编写过程中，闵华玲、蒋凤英等老师提供了许多宝贵的意见与帮助，在此向他们致谢。

限于编者的水平，本书肯定会有不少不足之处，衷心希望读者批评指正。

编　者

1992年10月

目　　录

第一章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支。本章介绍概率论中的基本概念——随机事件与随机事件的概率，并进一步讨论了随机事件的关系与运算，以及概率的性质与计算方法。

§1.1　随 机 事 件

在自然界与人类的社会活动中常常会出现各种各样的现象。例如，一枚硬币向上抛起后必然会落地；在相同的大气压与温度下，气罐内的分子对罐壁的压力是个常数。这类现象的共同特点是，在确定的试验条件下它们必然会发生。我们称这类现象为**确定性现象**。另一类现象则不然。例如，将一枚硬币上抛，着地时究竟正面向上还是反面向上，这在上抛前是无法断言的。但是，人们从长期实践中知道，多次重复上抛同一枚硬币出现正面向上的结果占一半左右，这类在个别试验中呈现不确定的结果，而在大量重复试验中结果呈现某种规律性的现象称为**随机现象**，这种规律性称为**统计规律性**。为研究随机现象的统计规律性作准备，本节介绍随机试验、样本空间与随机事件等概念。

一　随机试验

在客观世界中，随机现象是极为普遍的。例如，某地的年降雨量；河流某处的年最高水位；相同条件下生产的电子元件的寿命；某交通道口中午1小时内汽车流量等等。为了对随机现象的统计规律性进行研究，有时要做一些试验。这里所说的试验必须具有以下三个特点：

(i) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(ii) 试验的所有可能结果在试验前已经明确，并且不止一个；

(iii) 试验前不能确定试验后会出现哪一个结果.

在概率论中，称具有上述三个特点的试验为随机试验，简称为试验.

下面给出一些随机试验的例子.

例 1.1 上抛一枚硬币并观察硬币着地时向上的面，这是一个试验.

例 1.2 观察某交通道口中午 1 小时内汽车流量(单位：辆). 这是一个试验. 可能出现的试验结果可以是非负整数中的任意一个，但试验前无法确定究竟会出现哪一个非负整数.

例 1.3 从某厂生产的相同型号的灯泡中抽取 1 只，测试它的寿命(即正常工作的小时数). 这是一个试验. 可能出现的试验结果可以是非负实数中的任意一个，但试验前无法确定究竟会出现哪一个非负实数.

二 样本空间

要研究一个随机试验，首先要弄清楚这个试验所有可能的结果. 每一个可能出现的结果称为**样本点**，记作 ω (必要时带有下标或上标). 全体样本点组成的集合称为**样本空间**，记作 Ω. 换句话说，样本空间是试验的所有可能结果所组成的集合. 这个集合中的元素就是样本点.

例 1.1(续) 在例 1.1 中，样本空间

$$\Omega = \{正面, 反面\}.$$

例 1.2(续) 在例 1.2 中，样本空间

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

例 1.3(续) 在例 1.3 中，样本空间

$$\Omega = [0, \infty).$$

从这三个例子中我们可以看到，样本空间可以是数集，也可以

不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集。

有时候，为了数学上处理的方便，可以把样本空间作适当的扩大。例如，在例1.3中，灯泡寿命实际上不会超过某个足够大的正数，但我们仍取样本空间为$[0, \infty)$，必要时甚至还可以取样本空间为$(-\infty, \infty)$。在例1.2中也有同样的问题。

三　随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时，常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现，而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现。例如，在例1.2中，我们要通过对该道口汽车流量的观察来决定是否需要扩建道口。假定超过600辆便认为需要扩建。这时，我们关心的便是试验结果是否大于600。满足这一条件的样本点组成了样本空间的一个子集。我们称一个随机试验的样本空间的子集为**随机事件**，简称为**事件**。随机事件通常用大写字母A、B、C、…表示。仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**。例如，在例1.1中，有两个基本事件{正面}、{反面}；在例1.2与1.3中，分别有无限多个基本事件。

在试验中，如果出现随机事件A中所包含的某个样本点，那么我们称**事件A发生**；否则，就称**事件A不发生**。例如，在例1.2中，设A表示"流量大于600"，在试验中事件A可能发生，也可能不发生。如果试验结果是689，那么我们便认为事件A发生。

样本空间Ω是其自身的一个子集，因而也是一个事件。由于样本空间Ω包含所有的样本点，因此每次试验中必定有Ω中的一个样本点出现，即Ω必然发生。我们称Ω为**必然事件**。空集ϕ永远是样本空间的一个子集，因而也是一个事件。由于空集ϕ不包含任何一个样本点，因此每次试验中ϕ必定不发生。我们称ϕ为**不可能事件**。必然事件Ω与不可能事件ϕ是两个特殊的随机事件。

四　随机事件之间的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件。我们希望通过对

较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件．为此，需要研究事件之间的关系与事件之间的运算．

由于事件是一个集合，因此事件之间的关系与事件之间的运算应该按照集合论中集合之间的关系与集合之间的运算来规定．

给定一个随机试验，Ω 是它的样本空间，事件 A、B、C 与 A_i($i=1, 2, \cdots$)都是 Ω 的子集．

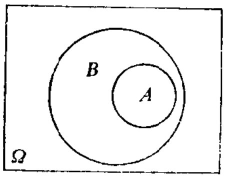


图1.1 $A\subset B$

(1) 如果 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，那么称事件 B **包含**事件 A．它的含义是：事件 A 发生必定导致事件 B 发生．图 1.1 给出了这种包含关系的一个几何表示．

例如，在例 1.3 中，事件 A 表示"灯泡寿命不超过200 小时"，事件 B 表示"灯泡寿命不超过 300 小时"．易见，$A\subset B$(或 $B\supset A$)．

(2) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，那么称事件 A 与事件 B **相等**．

(3) 事件 $A\cup B=\{\omega: \omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**．(或**并事件**)．它的含义是：当且仅当事件 A 与事件 B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生．图 1.2 给出了这种运算的一个几何表示．

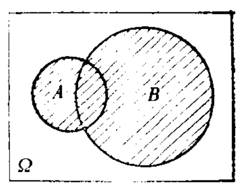


图1.2 $A\cup B$

例如，在某建筑工地上，事件 A 表示"缺少水泥"，事件 B 表示"缺少黄砂"．于是，和事件 $A\cup B$ 表示"缺少水泥或黄砂"．

一般地，我们用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的和事件；用 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个①事件 $A_1, A_2, \cdots$的和事件．

(4) 事件 $A\cap B=\{\omega: \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(或**交事件**)．它的含义是：当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生．积事件也可以记作 AB．图 1.3 给

① "可列个"的含义是"无限个"，并且这"无限个"可以按某种次序排成一列．例如，自然数共有可列个．

出了这种运算的一个几何表示。

例如，某输油管长10km。事件A表示"前5km油管正常工作"，事件B表示"后5km油管正常工作"。于是，积事件$A\cap B$表示"整个输油管正常工作"。

一般地，我们用$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$表示n个事件$A_1, \cdots, A_n$的积事件；用$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$表示可列个事件$A_1$，$A_2$，…的积事件。

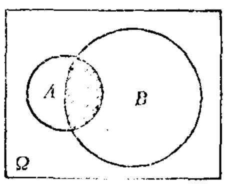


图1.3　$A\cap B$

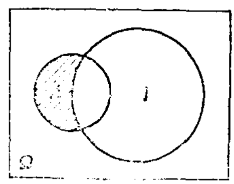


图1.4　$A-B$

(5) 事件$A-B=\{\omega: \omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件A与事件B的**差事件**。它的含义是：当且仅当事件A发生且事件B不发生时，事件$A-B$发生。图1.4给出了这种运算的一个几何表示。

例如，某种圆柱形零件的长度与外径都合格时才算合格。事件A表示"长度合格"，事件B表示"外径合格"。于是，差事件$A-B$表示"长度合格但外径不合格"。

(6) 如果$A\cap B=\phi$，那么称事件A与事件B**互不相容（或互斥）**。它的含义是：事件A与事件B在一次试验中不会同时发生。图1.5给出了这种运算的一个几何表示。

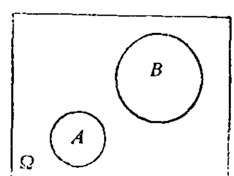


图1.5　$A\cap B=\phi$

如果一组事件（可以由无限个事件组成）中任意两个事件都互不相容，那么称这组事件**两两互不相容**。

例如，在例1.3中，事件A表示"灯泡寿命不超过200小时"，事件B表示"灯泡寿命至少为300小时"。易见，$AB=\phi$，即A与B互不相容。如果事件C表示"灯泡寿命在(200, 300)内"，那么，

A、B、C 构成一个两两互不相容的事件组. 又如，任意两个基本事件总是互不相容；任意一组基本事件总是两两互不相容.

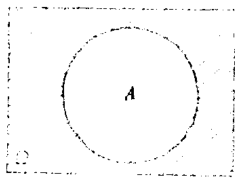


图1.6 $\bar{A}$

(7) 事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的**对立事件**（或**逆事件**，或**余事件**），记作 $\bar{A} = \Omega - A$. 它的含义是：当且仅当事件 A 不发生时，事件 $\bar{A}$ 发生. 易见，$A \cap \bar{A} = \phi$，$A \cup \bar{A} = \Omega$. 由于 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件，因此称事件 A 与 $\bar{A}$ **互逆**（或**互余**）. 图1.6 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，某建筑物在经历一场地震后，事件 A 表示“建筑物倒塌”。于是，事件 $\bar{A}$ 表示“建筑物幸存”.

按差事件与对立事件的定义，易见有 $A - B = A\bar{B}$.

与集合论中集合的运算一样，事件之间的运算满足下述定律.

(i) **交换律**：$A \cup B = B \cup A$，

$A \cap B = B \cap A$；

(ii) **结合律**：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(iii) **分配律**：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(iv) **德摩根**(De Morgan)**法则**：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

这些定律都可以推广到任意多个事件上去.

例 1.4 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1，2，3 组成（见图 1.7）. 每个水源都足以供应城市的用水. 设事件

A_i 表示“第 i 号管道正常工作”，$i = 1, 2, 3$.

于是，“城市能正常供水”可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3;$$

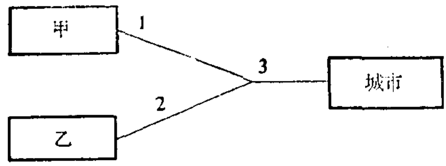


图 1.7 供水系统示意图

由德摩根法则可知,"城市断水"可表示为

$$\overline{(A_1 \cup A_2) \cap A_3} = (\overline{A_1 \cup A_2}) \cup \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup A_3.$$

例 1.5 某工程队承包建造了 3 幢楼房,设事件

A_i 表示"第 i 幢楼房经验收合格",$i=1, 2, 3$. 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件:

(1) 只有第 1 幢楼房合格;

(2) 恰有 1 幢楼房合格;

(3) 至少有 1 幢楼房合格;

(4) 至多有 1 幢楼房合格.

解 易见,事件 $\bar{A}_i$ 表示"第 i 幢楼房经验收不合格", $i=1, 2, 3$.

(1) "只有第 1 幢楼房合格"包含了"第 2、3 幢楼房不合格"的意思,因此这个事件可以表示成 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) "恰有 1 幢楼房合格"没有指明究竟哪一幢楼房合格,因此这个事件可以表示成

$$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

易见,$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 这三个事件构成一个两两互不相容的事件组.

(3) "至少有 1 幢楼房合格"可以看成 A_1, A_2, A_3 这三个事件中至少有一个发生,因此这个事件可以表示成 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. 易见,A_1, A_2, A_3 这三个事件不构成一个两两互不相容的事件组.另一方面,"至少有 1 幢楼房合格"的对立事件是"3 幢楼房全不合格",因此,所求事件也可以表示成 $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}$.由德摩根法则知道:

$$\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}=\bar{\bar{A}}_1\cup\bar{\bar{A}}_2\cup\bar{\bar{A}}_3=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

(4) “至多有1幢楼房合格”是下列两个互不相容的事件的和事件:“恰有1幢楼房合格”与“3幢楼房全不合格”,因此所求事件可以表示成

$$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3.$$

§1.2 等可能概型

在一次试验中,随机事件A可能发生,也可能不发生。随机事件发生的可能性的大小通常用区间[0, 1]中的一个数来刻划,这个数值称为**概率**。事件A、B、C、…的概率分别记作$P(A)$、$P(B)$、$P(C)$、…. 作为事件的两个特殊情况:必然事件Ω与不可能事件ϕ, 自然应该合理地规定

$$P(\Omega)=1,\ P(\phi)=0.$$

如何计算概率?这是本章以下内容讨论的主题。本节讨论最简单的情形——**等可能概型**,即样本空间中的每个样本点在一次试验中以相等的可能性出现。

一　古典概率

上抛一枚硬币,观察硬币着地时向上的面。假定这枚硬币质地均匀,因此“出现正面”与“出现反面”的可能性是相等的。从常识上知道,这两个事件的概率都应该是$\frac{1}{2}$.

一个口袋中装有五只外形相同的球,分别编有号码1, …, 5。现在从这个口袋中任取一只,取到偶数号码的球的概率有多大?由于样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\ \cdots,\ \omega_5\},$$

这五个样本点在一次试验中出现的可能性都相等。“取到偶数号码的球”这一事件

$$A=\{\omega_2,\ \omega_4\}.$$