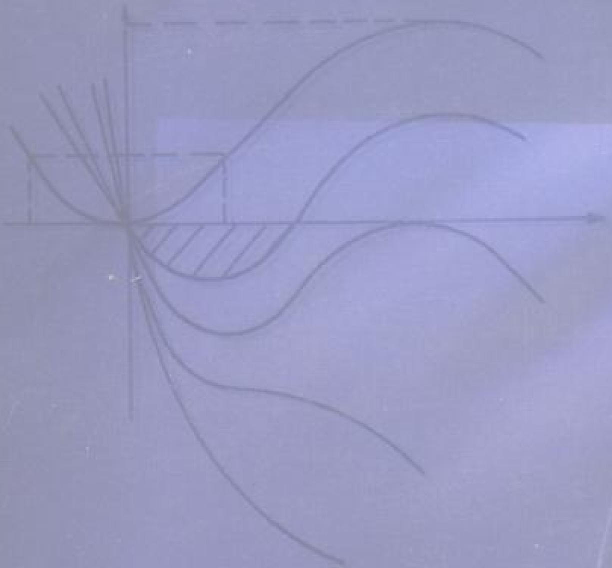
弹塑性系统的动力屈曲和分叉



韩 强 编著

科 学 出 版 社

ZW14/14

内 容 简 介

本书对弹塑性结构的屈曲问题进行了全面叙述，立足于最新研究成果，重点叙述塑性屈曲及动力屈曲的基本概念和研究方法. 全书共分七章，分别为：屈曲问题的基本概念；屈曲准则；结构屈曲问题的模型分析；杆的屈曲；板的屈曲；圆柱壳的屈曲；其它结构的屈曲. 本书特点是理论与应用并重.

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性系统的动力屈曲和分叉/韩强编著.-北京：科学出版社，2000.

ISBN 7-03-007890-X

Ⅰ.弹… Ⅱ.韩… Ⅲ.①弹塑性屈曲②动力屈曲 Ⅳ.0344.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第61035号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年3月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2000年3月第一次印刷 印张：10

印数：1—1 200 字数：260 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　言

自1744年Euler对压杆的稳定性问题做了开创性研究以来，结构静力稳定性研究已有了200多年的悠久历史.经典的稳定性理论(特别是弹性稳定性理论)目前已趋于完善，而动力屈曲得到深入的研究则仅有30年左右的历史，它是在现代工业和国防事业的迫切需要下，随着高速电子和摄影技术的迅速发展而发展起来的.

近年来，随着现代工业技术的发展，大量新型、高强度的轻型超薄结构广泛地应用于国防及民用工业的各个领域.因此，这类诸如杆、板、壳等轻型元件在各类载荷作用下的稳定问题引起了人们的极大关注，特别是随着航空、航天和原子能利用等的飞速发展，结构稳定性问题的研究意义也愈来愈明显.如在火箭回收技术中，对其可能与地面发生碰撞而导致的屈曲必须有充分的估计，以便从太空收集到的重要资料和实验仪器得以保存完好；此外，结构动态屈曲的研究成果在诸如海洋工程(海洋平台在波浪作用下的稳定性)、大型建筑(风载作用下的稳定性)、原子能反应堆受突然飞行物的撞击、核爆炸对结构的冲击、水下爆炸对潜艇的冲击、汽车及火车的碰撞问题等许多领域也有着十分广泛的应用前景.

为此，长期以来，力学工作者致力于结构稳定性问题的研究，极大地丰富和发展了经典的稳定性理论，使得这门学科不仅在理论上形成了一个庞大而复杂的体系，而且具有重大的实用价值.

目前，结构的屈曲问题已经成为固体力学十分活跃的分支之一.研究内容涉及杆、板、壳、拱等各类常见结构单元在各种载荷作用下的屈曲问题的各个方面.如屈曲准则的建立、临界载荷的确定、初缺陷的影响或后屈曲分析等.理论分析和实验研究的论文浩如烟海，迫切需要有这样一本书，它既能阐述屈曲问题的基本概

念,又能反映当今屈曲研究的最新成果,作者力图使本书具有这样的特色,成为一本理论与应用并重的书.作者希望本书能够帮助初次涉足这一领域的研究者在较短的时间内站在较高的起点上开展屈曲问题的研究工作.

本书共分七章,立足于近代屈曲理论的最新研究成果,将塑性屈曲和动力屈曲作为重点,阐述屈曲问题的基本概念和研究方法,介绍屈曲问题的研究现状和发展动态,引导读者自己去发现当今屈曲研究中存在的不足,以最新科研成果启发读者开阔思路,力图把读者领进这一研究领域的前沿.

本书可以作为研究生、博士后、理论研究人员和广大工程技术人员的参考书.

在此,作者特别向众多学者表示深深的敬意,正是由于他们不懈的努力及做出的突出成果,才极大地丰富了本书的内容.

在这里作者还要衷心感谢太原理工大学杨桂通教授,是先生把我领入了屈曲问题的研究领域,并以其旺盛精力和敏锐感受不断给作者以支持和帮助.我还要向清华大学徐秉业教授、北京大学武际可教授、太原理工大学张善元教授表示感谢,他们提出的许多宝贵意见使本书增色不少,对本书的出版给予了积极的支持.

最后我还要向科学出版社表示衷心的感谢,同时感谢华南理工大学交通学院的领导,他们对本书的出版给予了多方面的支持.

由于作者水平所限,本书一定存在缺点和不妥之处,恳请读者批评指正.

作者于广州华南理工大学

1999.11

目　　录

第一章　屈曲问题的基本概念

§1.1　引　　言

结构稳定性问题的研究经历了由静载到动载,由弹性到塑性的研究历程,稳定性问题虽然有各种不同的定义,但粗略地讲,是研究系统在外界干扰微小时系统状态的扰动是否也是微小的问题,如果系统状态的扰动发生了较大的变化,则称之为系统的失稳或屈曲.事实上,理想完善结构的屈曲是最常见的固体力学定态分叉现象.早在18世纪中叶,Euler和Bernoulli就研究了细长杆在受压时失去稳定性的临界载荷计算问题,随着细长及薄壁构件在建筑物、船舶、飞行器等设计中的大量使用,杆、板、壳以及其它组合结构的稳定性问题已经成为固体力学的重要问题.

从数学上说,结构在静载作用下出现屈曲(即失稳)可以归结为平衡方程解的多值性问题,因此,它是定态分叉问题.通过分叉分析,不但可以对结构的屈曲状态作定性或定量的研究,而且可以得到屈曲时临界载荷的计算方法.分叉的定性分析理论告诉我们,结构在最小临界载荷处出现超临界的定态分叉,并且分叉解总是成对出现的,当线性化问题有多重特征值时,将有更多的分叉解出现,随着载荷的进一步增大,初始屈曲状态还可能失稳并产生二次分叉,结构在屈曲之后的行为即称为初始后屈曲.

值得注意的是,现在比较流行的放大函数法意义下的屈曲已经不再具有分叉的特性,而更像是一类适用于工程应用的强度或刚度问题.

§1.2 结构屈曲问题的分类

当代屈曲问题研究的重点已更多地从弹性到塑性，由静力屈曲问题转到动力屈曲问题，在屈曲问题的各个方面都取得了长足的发展．大体上说，结构的屈曲问题按照不同的方式可以分为以下几种不同的类型：

1．根据结构的承载形式，可将屈曲分为静力屈曲和动力屈曲．

静力屈曲．指结构在静态外载作用下发生的屈曲．

动力屈曲．指结构在动态荷载作用下发生的屈曲，例如，(1)轴向冲击荷载引起的杆或圆柱壳的屈曲，横向冲击荷载引起的浅拱或扁球壳的跳跃；(2)周期外力引起的参数共振；(3)回转力引起的轴的晃动等，这些荷载都是随时间变化的动态荷载；(4)结构在随动载荷作用下引起的屈曲．所谓随动载荷(follower force)是指其值保持不变却随着结构变形而改变其方向的载荷．之所以将这类问题也归入动力屈曲中，是因为对这类非保守力，即使是研究系统的平衡稳定性，也必须从动力学观点来讨论．

2．按结构屈曲时的材料性质，可将屈曲分为弹性屈曲、塑性屈曲和弹塑性屈曲．

弹性屈曲．结构屈曲前后仍在小变形假定的范围内处于弹性状态时，称之为弹性屈曲．

塑性屈曲．结构在塑性应力状态下发生屈曲时，称之为塑性屈曲．

弹塑性屈曲．介于弹性屈曲和塑性屈曲之间的一种屈曲形式，屈曲前结构处于弹性应力状态，而屈曲时由于扰动变形使一部分材料进入塑性，即屈曲发生后材料处于弹塑性应力状态．

由于上述三种屈曲现象中材料性质呈现出本质上的差别，因此，整个屈曲过程也表现出各自不同的一些特点．通常人们研究较多的是弹性屈曲和塑性屈曲，对于弹塑性屈曲则很少有人问津，主

要原因是因为弹塑性交界处材料性质的变化使理论分析变得十分困难.

3. 沿袭静力屈曲中已有的实验结果及方法,按屈曲的性质,可将屈曲分为极值屈曲、分叉屈曲和非完善结构的屈曲三类.

极值屈曲.极值屈曲通常具有图 1.1(a)中的载荷位移曲线,对应于静载下发生跳跃屈曲(snap through buckling)的那类结构,如弹塑性梁柱、圆柱壳一侧受冲击、浅拱和浅球冠等.图 1.1(a)中的动态路径不同于平衡路径,但当载荷超过某个临界值时,位移有突然的变化.

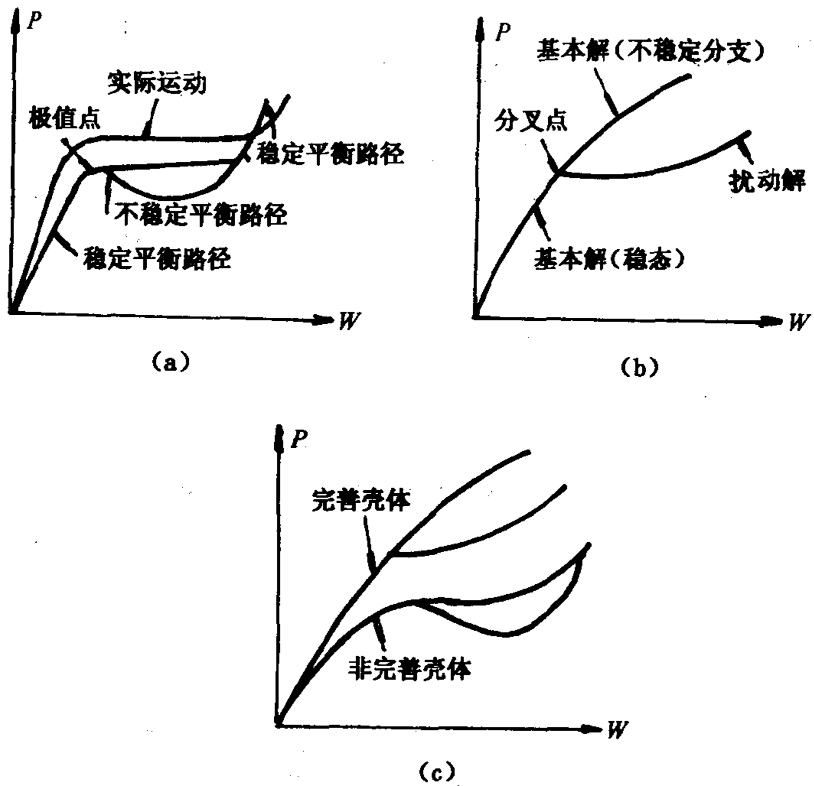


图 1.1 三种不同的屈曲形式

分叉屈曲.指基本运动在某种状态时(对应于分叉点)变得不唯一或不稳定(图 1.1(b) 所示).

非完善结构的屈曲．指含初缺陷结构的屈曲，在某些情况下，带缺陷的壳体的屈曲荷载大大低于完善壳体的分叉点载荷（图1.1(c)），图中 P 为载荷参量，W 为特征位移．

4．按照屈曲后路径是否稳定，可分为具有稳定后屈曲路径的屈曲，具有不稳定后屈曲路径的屈曲和同时具有稳定及不稳定后屈曲路径的屈曲．

具有稳定后屈曲路径的屈曲．指屈曲发生后载荷仍可继续增长（如柱、板、无支承框架等），如图1.2(a)所示．

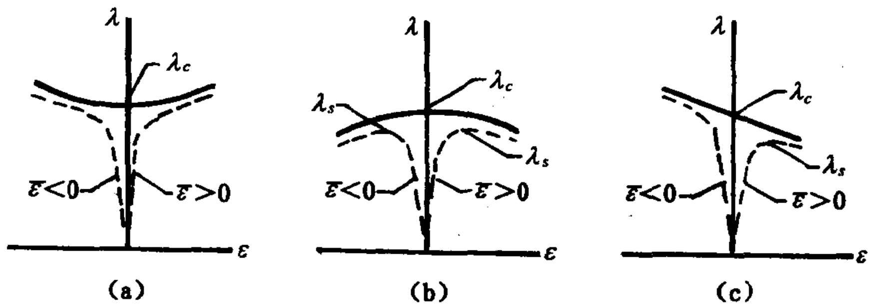


图1.2　三种不同的屈曲形式

具有不稳定后屈曲路径的屈曲．指屈曲发生后载荷呈现出下降趋势（如轴向受压圆柱壳、球壳等），如图1.2(b)所示．

具有稳定及不稳定后屈曲路径的屈曲．屈曲发生后，同时具有上述两个特点的屈曲（如简单桁架、两杆刚架等），如图1.2(c)所示，图中 λ 为载荷参量，$\bar{\varepsilon}$ 为特征位移．

5．根据外力与时间的关系，可将屈曲分为自治系统的屈曲和非自治系统的屈曲．

自治系统的屈曲．指外力不依赖于时间时发生的屈曲，其中除有势系统和似保守系统的屈曲问题可以用静态方法来研究而不必归入动态屈曲问题外，其它各系统问题都属于动态问题．

非自治系统的屈曲．即外力显性地依赖于时间时发生的屈曲，这是动态屈曲问题要研究的重点．

§1.3 动态屈曲问题的特点及其特征量

由于时间参数的引入,使得动态屈曲问题较静态屈曲问题复杂了许多,也产生了一些动力屈曲所独有的特点,如:

(1) 动载 $P(t)$的描述,实际情况下的动载相当复杂,且不易精确测定,一般冲击屈曲中冲击载荷的形式主要集中在理想脉冲载荷、阶跃载荷和所谓的两参数载荷(即矩形脉冲载荷),它们是对实际载荷的理想化处理.

Youngdahl 和朱国琦等曾讨论过 $P(t)$的形式对结构塑性动力响应的影响,Youngdahl 最近仍继续考虑脉冲形式与载荷分布对结构响应的影响,提出用一个等价矩形脉冲,即令冲量(面积)和形心位置相同的脉冲来代替真实 $P(t)$的形状.

(2) 结构的静力屈曲形式仅依赖于载荷分布,而冲击屈曲则不仅和载荷分布有关,而且依赖于所加载荷的大小,在动载作用下有许多模态可能被激发.

(3) 载荷持续时间对动力屈曲行为有着显著的影响,如,扁球壳的阶跃临界均布载荷只有静态临界值的50%—60%左右,然而它却可以承受几倍于静态临界载荷的短时超强载荷.一般而言,短时脉冲载荷作用下屈曲需要较高的载荷幅值,且呈现出高阶模态,阶跃载荷作用下屈曲则需要较低的载荷幅值,模态数也和静力屈曲模态接近.

(4) 动力屈曲具有和静力屈曲不同的处理方法,针对不同的载荷形式和结构需采用不同的处理方法.

(5) 动力屈曲有时必须考虑材料的动态本构关系.

(6) 屈曲发生的局部性.此时需要考虑应力波的传播对动力屈曲的影响.屈曲总是发生在有限长结构的两个端部,在塑性波的复杂波系作用下,也可能在结构中部的局部区域发生屈曲,以上这些现象可以在直杆和圆柱壳的实验中观察到.

在动态屈曲问题中,人们通常最为关心的是结构屈曲的临界

载荷、屈曲模态和后屈曲分析,在后屈曲分析方面,荷兰学者Koiter提出了在静力保守载荷作用下,弹性体初始后屈曲行为的一般理论,该理论在渐近的意义上是严格的,但是直到60年代以后,这个理论才引起人们的关注,Budiansky 和 Hutchinson 发展了Koiter 理论,使之成为更便于应用的形式,并把它巧妙地运用于缺陷敏感结构的动力屈曲分析,完善并发展了初始后屈曲理论.

在结构的动力屈曲问题中,无论在理论上还是在实际中,最令人关心的几个特征量是屈曲模态、临界载荷以及屈曲时间.

屈曲模态.指结构屈曲时的几何构形,在屈曲过程中,这种构形是不断变化的,通常指的是最终的残余模态.

临界载荷.指结构发生屈曲时所需的最小的冲击载荷,它在工程实际中有着重要的意义.

屈曲时间.指冲击开始到结构发生屈曲的一段时间,它是和屈曲判别准则密切相关的特征量.

§1.4 Shanley 假定

结构在平衡状态下的稳定性问题,因为需要考虑力在变形后的构形上的平衡,以致于即使在弹性范围内也是一个几何上的非线性问题,而如果考虑结构在进入塑性变形后的稳定性问题时,还需计及物理非线性的影响,从而使得塑性屈曲问题变得十分复杂,具有很大的难度.

在历史上,对于弹性稳定性的研究是从 Euler 研究压杆屈曲开始的,对于弹塑性稳定性及分叉现象,人们也是从研究压杆的塑性屈曲问题开始的.

对于两端简支的弹性受压杆,Euler 给出了其屈曲载荷:

$$P_e = \pi^2 EI/L^2 \tag{1.4.1}$$

其中 L 为杆长,E 为弹性模量,I 为截面的惯性矩.

Engesser(1889)在处理桥梁中杆件失稳问题时首先研究了两端简支的受压杆在进入塑性状态后的屈曲现象.并指出,如果把公

式中的 E 换为切线模量E_t，则 Euler 的分析方法仍然适用，这样即可得到切线模量载荷：

$$P_t = \pi^2 E_t I / L^2 \tag{1.4.2}$$

Considere 当时曾提出异议，认为这时杆发生弯曲，杆中会出现卸载，因此式(1.4.2)不成立，而应采用一种等效模量以代替弹性模量，等效模量和截面的几何形状有关，因此杆的屈曲载荷应由下式给定：

$$P_r = \pi^2 E_r I / L^2 \tag{1.4.3}$$

不久之后，Von Karman(1910)又讨论了这一问题，并实际推导了矩形和 H 形截面的缩减模量. 从此缩减模量理论被认为是问题的正确解答，而切线模量理论则被认为是一种方便且保守的近似.

以上各式都是按照经典稳定性定义在外载不变的情形下得到的.

在此之后的很长一段时间内，P_r 一直被认为是理论上正确的塑性临界载荷，而 P_t 则被认为是一种近似理论，然而众多的实验却一直偏近于比 P_r 低的P_t，这通常被解释为试件的不完善和载荷偏心所致，这一问题的困惑一直延续到了 1947 年.

直到 1947 年，Shanley 发表了其著名的论文"压杆的矛盾"，这一问题才得以彻底解决. Shanley 指出杆在刚开始屈曲时，并没有失去稳定性，这时，分叉是在外载继续增加的情况下发生的，在分叉开始的那一时刻，杆中没有卸载，因此(1.4.2)式表示的是最低分叉载荷.

当时 Shanley 提出如下疑问：

(1) 如果认为 P_t 是正确的，则 P 不可能大于P_t，而当 P 达到 P_t 时，柱子出现可能的弯曲，按 P_t 理论这时并无卸载，而要柱子弯曲且不出现应力卸载，就需要使 $P > P_t$.

(2) 如果认为 P_r 是正确的，则当 $P > P_t$ 并趋于P_r 时，要求柱子始终是直的. 但是当 P 超过P_t 后只要P 增加，弯曲就是可能的，P_t 和P_r 之间并无什么因素使柱子保持不弯曲状态.

这样,Shanley 就揭示了 P_t 理论和 P_r 理论的本质性矛盾.同时 Shanley经过一系列铝合金压杆实验的仔细观察,发现杆子在开始弯曲时并没有地方出现卸载,微弯曲引起的应力增量很小,只是一侧压应力增加得多,另一侧压应力增加得少,总的轴压在分叉后仍是增长的,故截面内各点都服从塑性加载规律 E_t,从而阐明了切线模量载荷的合理性.

Von Karman 在讨论此文时指出,在塑性阶段由于变形的不可逆性,需要对失稳概念进行扩充.在 P_t 作用下,直杆丧失的是平衡形态的唯一性(出现分叉)而不是稳定性.此时这两个概念不再等价,P_t 是最低可能的分叉载荷,P_r 是最高可能的分叉载荷,若人为地使杆在 P_t 和 P_r 之间保持直线,然后放开,则杆将在那里出现分叉.

1950 年 Duberg 和 Wilder 对这一问题进行了进一步研究,并指出对于小的有初缺陷的柱子,当载荷一经作用就出现了弯曲,但直到柱子承受一相对大的弯矩之前,材料中将不会出现局部卸载现象.对于无缺陷柱子,当 P 达到 P_t 时柱子将出现弯曲,弹性卸载一开始并不出现,直到柱子沿后屈曲载荷-挠度曲线变形到一个有限量时才出现弹性卸载,最大承受载荷 P_{max}只比 P_t 高出不多.

从以上讨论可以看出塑性屈曲理论与弹性屈曲理论在基本概念上也有不同之处.在塑性屈曲理论中,分叉载荷与失稳载荷已经不是同一概念,需要分别加以对待.这进一步促使人们研究塑性阶段的过分叉问题,寻求分叉后的极值点失稳载荷,同时由于失稳载荷 P_{max}只比 P_t 高出不多,使得求 P_t 的分叉分析在塑性屈曲研究中扮演了一个十分重要的角色.

Von Karman(1947)在评论 Shanley 的论文时指出,Shanley 方法的最大优点是他认识到了唯一性和稳定性的区别.事实上杆的塑性屈曲是分叉而非失稳,分叉先于失稳出现,即分叉与失稳并非同一概念.

在此,我们应特别注意以下几点:

(1) 从严格意义上讲,分叉与失稳是同一概念,以杆为例,图

1.3 为杆的分叉屈曲路径，当 $P<P_c$ 时，杆的正直状态是稳定的，当 $P=P_c$ 时，一方面产生了分叉，另一方面，正直状态(平凡解)也就同时丧失了其稳定性，这里的失稳指的是丧失原有平衡形态的稳定性.

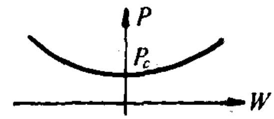


图 1.3 杆的分叉屈曲路径

(2) 我们说塑性屈曲时，分叉与失稳并非同一概念，此处的失稳指的是结构丧失了继续承载能力，因此，两个失稳的概念本身就是有区别的.

(3)图 1.4 示出了载荷-位移坐标内，两个失稳概念的区别和联系，图 1.4(a)中 A 点既是分叉点又是失稳点，因为分叉必定意味着原有形态稳定性的丧失，B 点为失稳点，此处的失稳则是指结构丧失了继续承载的能力，图 1.4(b)两个失稳概念则是相同的.

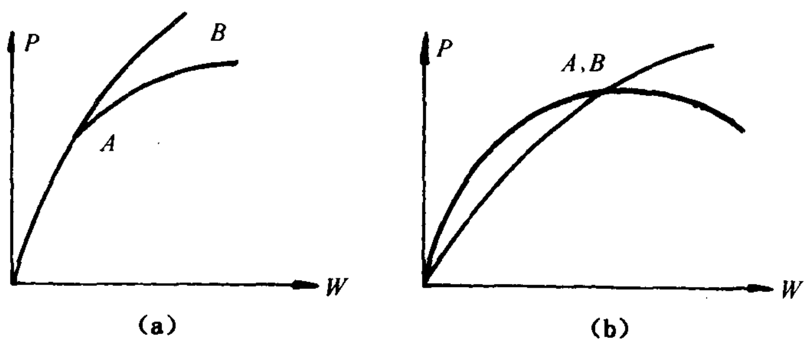


图 1.4 分叉和失稳

压杆塑性屈曲问题的解决，经历了半个多世纪，由此可以想到塑性分叉和稳定性的复杂程度.

§1.5 Hill 弹塑性分支理论

虽然 Shanley 成功地解决了压杆的塑性屈曲问题，但那时还没有关于弹塑性连续介质的一般的唯一性及稳定性理论. 在 50 年代末 60 年代初，Hill 发表了一系列论文，建立起了弹塑性固体惟

一性和稳定性的一般理论，目前这一理论已成为这一研究领域的奠基性工作.

在弹塑性(准静态)边界值问题中，如果已知某一变形状态对应的物体形状、内应力分布、材料强化等性质，我们考虑由于表面力和几何约束的微小变化引起的以上各量微小变化的计算问题. 当总应变微小、材料单元的位置变化和转动可以忽略，且材料单调强化时，边值问题的解总是唯一的. 然而当塑性问题涉及到的几何变化不能忽略时，解的唯一性就变成是有条件的.

Hill 建立的弹塑性固体唯一性和分支的普遍理论针对满足正交流动法则且具有对称弹性模量的材料.

考虑等温、有限变形弹塑性固体(具有光滑屈服面)的本构关系，记基于 Kirchhoff 应力率 t^{ij} 的现时弹性模量为 $\bar{\lambda}$，若现时应力位于屈服面，记在应变率空间中垂直于弹性区的单位张量为 m^{ij}，应变率为

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{1}{2}(\dot{u}^k{}_{,i}\dot{u}_{k,j} + \dot{u}^k{}_{,i}\dot{u}_{k,j}) \quad (1.5.1)$$

率形本构关系为

$$t^{ij} = \begin{cases} L^{ijkl}\eta_{kl} & m^{kl}\eta_{kl} \geqslant 0 \\ \bar{\lambda}^{ijkl}\eta_{kl} & m^{kl}\eta_{kl} \leqslant 0 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

$$L^{ijkl} = \bar{\lambda}^{ijkl} - g^{-1}m^{ij}m^{kl} \quad (1.5.3)$$

常数 g 依赖于变形历史且决定应变强化的现时水平.

作用于物体的静载荷与载荷(位移)单值参数 λ 成比例. 在 S_T 上有 $T^i = \lambda T_s^i$，S_u 上有 $u_i = \lambda u_i^s$，T_s^i 和 u_i^s 不依赖于 λ.

在变形的任意阶段有 $u_i^0(\lambda)$，假设在 $\dot{\lambda}$ 的一个增量下至少有两个解 $\dot{u}_i^a$ 和 $\dot{u}_i^b$，引入两个解的差值记号：$(\sim) = (\cdot)^a - (\cdot)^b$，由于在 S_T 上有 $\widetilde{T}^i = 0$，S_u 上有 $\widetilde{u}_i = 0$，且两组解均满足平衡方程，故利用增量形式的虚功原理有

$$H \equiv \int_V \{\widetilde{\tau}^{ij}\widetilde{\eta}^{ij} + \tau_0^{ij}\widetilde{u}^k{}_{,i}\widetilde{u}_{k,j}\}dV - \int_S \widetilde{T}^i\widetilde{u}_i dS = 0$$

(1.5.4)