

结构优化设计方法

陶全心 李著璟 编



清华大学出版社

内 容 简 介

本书介绍结构优化设计方法的基本概念,各种优化设计方法的理论及其应用,以及结构优化设计的实例及特点等。全书共分九章包括:结构优化设计的基本概念,满应力设计,无约束极值问题(一维和多维),线性规划,非线性规划,几何规划,动态规划,结构优化设计实例及其特点等。

本书可供土木、水利、建筑、铁路、公路、桥梁等专业作教材,亦可供其他工程技术人员参考。

J5316/28

结 构 优 化 设 计 方 法

陶全心 李著璟 编

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

★

开本: 787×1092 1/16 印张: 11¹/₈ 字数: 283千字

1985年9月第一版 1985年9月第一次印刷

印数: 000001~20,000

统一书号: 15235·178 定价: 2.00元

前 言

由于电子计算机的普及和计算技术的迅速发展,目前几乎所有结构的计算问题都能够借助于电子计算机来完成。在这个基础上,运用数学手段,使结构设计产生了新的设计方法——结构优化设计方法。许多设计工作者得以从繁琐的计算工作中解脱出来,把精力转向结构的“优化设计”。

优化设计的出现,使设计者从被动地对设计方案进行校核进入主动的方案设计,因而这是结构设计上的一次飞跃。与传统的结构设计相比较,结构优化设计不论在复杂性和困难程度方面都要大得多。

本书介绍结构优化设计方法的基本概念,各种优化设计方法的理论及其应用以及结构优化设计的实例及特点等,全书共分九章。

第一章介绍结构优化设计的基本概念,包括结构优化设计与传统的结构设计方法的异同,常用的技术术语及优化设计方法的分类。目的是使读者对结构优化设计方法有一全面的、概括的了解。

第二章至第八章介绍目前国内常用的各种优化设计方法的理论及其应用,对每种优化方法的论述中尽可能包括优化方法的基本理论、计算步骤、数例、框图、小结等几个部分。

最后一章先介绍钢柱、钢筋混凝土梁、基础、拉杆拱等几个结构构件的优化实例,这些实例说明了结构是如何具体的进行优化设计的。在此基础上阐述结构优化设计的特点、难点及其处理办法。这实际上是一个尚待不断研究和总结的课题。

作为一本专业课程的教材,本书注重理论联系实际,对各种优化方法的思路,计算步骤,使用时需注意的问题等作了较为详细的介绍。同时对各种优化方法的理论及其证明作了必要的介绍,对这方面有兴趣的读者可以参考有关的专门书刊。

全书的数例,有一些是采用简单的数学例题,这是为了突出说明优化方法,而不致于被一些复杂的力学、结构计算所混淆。这些数例的计算结果基本上是电子计算机计算所得。

本书的编者是陶全心、李著璟,是在由陶全心、佟一哲所编写的同名讲义的基础上,结合近年来的教学和科研实践改写而成的。

本书可供土木、水利、建筑、铁路、公路、桥梁等专业作教材,亦可供工程技术人员参考。

目 录

前 言

第一章 结构优化设计的基本概念	1
§1-1 什么是结构优化设计	1
§1-2 说明用的简例	2
§1-3 常用的技术术语	4
§1-4 优化设计方法的分类	6
第二章 满应力设计	7
§2-1 满应力设计的概念和特点	7
§2-2 应力比法	7
§2-3 齿行法和修改齿行法	13
§2-4 简要的小结	16
第三章 无约束极值问题——一维问题	18
§3-1 引言	18
§3-2 0.618 法	19
§3-3 分数法	22
§3-4 抛物线法	25
§3-5 牛顿法	29
§3-6 平分法	31
§3-7 三次插值法	33
§3-8 简要的小结	37
第四章 无约束极值问题——多维问题	40
§4-1 引言	40
§4-2 梯度法	41
§4-3 牛顿法	44
§4-4 变尺度法	46
§4-5 单纯形法	50
§4-6 共轭方向法	54
§4-7 方向加速法	61
§4-8 简要的小结	65
第五章 线性规划	68
§5-1 线性规划的一般形式	68
§5-2 线性规划的标准形式	70
§5-3 线性规划的单纯形法	71
§5-4 引入人工变量	75

§5-5 单纯形法算例	76
§5-6 线性规划问题的矩阵解	79
§5-7 修正单纯形法	80
§5-8 线性规划的对偶理论	81
第六章 非线性规划	86
§6-1 引言	86
§6-2 拉格朗日待定乘数法—等式约束	86
§6-3 拉格朗日待定乘数法—不等式约束	89
§6-4 库恩-塔克条件	91
§6-5 网格法	93
§6-6 复形法	97
§6-7 可行方向法	100
§6-8 梯度侧移法	103
§6-9 序贯线性规划	107
§6-10 罚函数法	112
第七章 几何规划	120
§7-1 引言	120
§7-2 说明用的简例	121
§7-3 无约束正定几何规划	122
§7-4 有约束正定几何规划	126
§7-5 广义几何规划	131
第八章 动态规划	136
§8-1 动态规划的一般概念	136
§8-2 动态规划的最优化原则	137
§8-3 动态规划的分析解法	138
§8-4 动态规划的直接搜索解法	139
§8-5 连续梁内力塑性重分布的优化设计	140
§8-6 桁架设计的动态规划	143
第九章 结构优化设计实例及其特点	147
§9-1 轴心受压钢柱的优化设计	147
§9-2 钢筋混凝土梁的优化设计	150
§9-3 钢筋混凝土单柱基础的优化设计	153
§9-4 钢筋混凝土拉杆拱的优化设计	158
§9-5 工程结构优化设计的特点	162
附录 有关方向加速法的证明	165
参考文献	172

第一章 结构优化设计的基本概念

§1-1 什么是结构优化设计

结构的优化设计是相对于传统的结构设计而言。

传统的结构设计是设计者根据设计要求,按本人的实践经验,参考类似的工程设计,确定结构方案;然后进行强度、稳定、刚度…等各方面的计算。实际上这里的计算往往只是起一种校核及补充细节的作用,仅仅证实了原方案的可行性。当然,设计者有条件时总是还要研究几个可能的方案来进行比较,从而对结构布局、材料选择、构件尺寸等进行修改,以便得到更为合理的方案。但是,往往由于时间的限制、计算工作量过大等因素使方案比较这一环节受到很大的限制,有时甚至是不可能的。从结构优化设计的角度来看,传统的结构设计的特点是所有参与计算的量必需以常量出现,用结构优化设计的术语来说,这种设计是“可行的”而未必是“最优的”。当设计者经验不足或者遇到的是新型结构时,这样的设计一般讲只能是“可行的”了。

结构优化设计是设计者根据设计要求,在全部可能的结构方案中,利用数学手段,计算出若干个设计方案,按设计者预定的要求,从中选择出一个最好的方案。因而优化设计所得的结果,不仅是“可行的”而且是“最优的”。这里所说的“最优”,是相对设计者预定的要求而言。

对于设计者评价设计“优”的标准,在优化设计中称为目标函数。结构设计中的量,以变量形式参与结构优化设计者称为设计变量。设计时应遵守的几何、强度及刚度等条件称为约束条件。

结构优化设计中,选择设计变量,确定目标函数,列出约束条件,称为制定优化设计的数学模型。有了优化设计的数学模型后,还要选择合适的优化方法,进行结构优化设计,从而得到优化后的结构设计。

结构优化设计与传统的结构设计采用同一的基本理论,使用同样的计算公式,遵守同样的设计规范、施工或构造规定,因而具有相同的安全度。从这些角度看,它们是完全一样的。

结构优化设计是一种近代的、科学的设计方法;与传统的设计方法相比较,结构优化设计有下列优点:

(1) 优化设计方法能够加速设计进度、节省工程造价。优化设计与传统的结构设计相比较,一般情况下,对简单的构件可节省工程造价 3~5%,对较复杂的结构可达 10%,对新型结构可望达 20%。

(2) 结构优化设计有较大的伸缩性。作为优化设计中的设计变量,可以从一两个到几十个、上百个。作为优化设计的工程对象,可以是单个构件、整个建筑物甚至建筑群。设计者可以根据需要和本人的经验加以选择。

(3) 某些优化设计方法(如几何规划)能够表示各个设计变量在目标函数中所占有

“权”的大小，为设计者进一步改进结构设计指出方向。

(4) 某些优化设计方法（如网格法）能够提供一系列可行设计直至优化设计，为设计者决策时提供方便。

(5) 设计者能够利用优化设计方法进一步贯彻设计意图。例如在钢筋混凝土结构的优化设计中，若设计者在设计中想相对的少用些钢筋，多用些水泥，只要修改一下目标函数就可以了。

(6) 结构优化设计方法为结构研究工作者提供了一条新的科研途径。

结构设计采用优化设计方法也带来一些新的问题：

(1) 结构优化设计的计算工作量比较大，一般必须由电子计算机来完成，这就需要一定的设备条件。

(2) 进行结构优化设计，除应掌握结构设计知识以外，还应掌握有关的数学基础、程序设计、计算技巧等知识，传统的结构设计只是优化设计过程中的一个子环节，因而优化设计的难度较传统的结构设计要大得多。

(3) 结构优化设计是一门新兴的学科、尚不完善也不够成熟，有待进一步开展科学研究并在实践中加以充实提高。

§1-2 说明用的简例

本节通过一个简单的例子，来具体说明结构优化设计的一些概念。

设有一起重用的结构如图 1-2-1 所示，已知荷载 $P = 10000\text{kg}$ ，吊点与支座的水平距离 $h = 150\text{cm}$ ；上面的拉杆采用 $\phi 22$ 圆钢，截面面积 $A = 3.8\text{cm}^2$ ；下面的压杆采用圆管，平均直径 $d = 5\text{cm}$ ，壁厚 $t = 0.5\text{cm}$ ；材料的容许应力 $[\sigma] = 1600\text{kg/cm}^2$ ，弹性模量 $E = 2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ 。试求在满足强度和稳定条件下，结构重量最轻时，吊点至上下支座的垂直距离 x, y 。

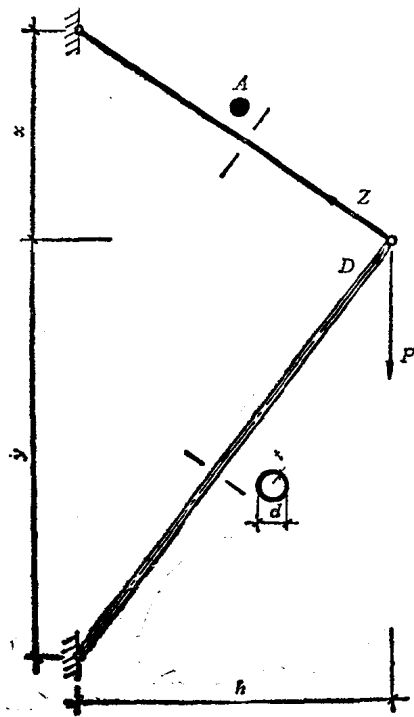


图 1-2-1

这是一个静定结构，传统的设计方法是在上述已知条件下，由设计者凭经验确定几何尺寸 x 及 y ；然后进行力学分析，求得各杆的内力；再结合材料性能，按强度及稳定要求校核构件的截面。若无问题，就完成设计。至于设计的结果，结构重量是否最轻或较轻，则完全取决于设计者的经验。

在本例中，吊点至上下支座间的垂直距离 x 和 y 可由设计者自选，而满足强度、稳定条件下，它们理论上可有无穷组解。我们要求的是结构重量最轻时的 x 和 y ，所以 x 和 y 是两个未知的变量，整个问题是一个优化设计问题。

通过结构力学简单的分析，可知：
上面拉杆的内力为

$$Z = \frac{P\sqrt{x^2 + h^2}}{x + y}$$

下面压杆的内力为

$$D = \frac{P\sqrt{y^2 + h^2}}{x + y}$$

从强度条件考虑, 它们应满足:

$$A \geq Z/[\sigma]$$

$$\pi dt \geq D/[\sigma]$$

从稳定条件考虑, 压杆应满足:

$$D \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{y^2 + h^2} \cdot \frac{1}{8} \pi dt (d^2 + t^2)$$

式中 I 是圆管的截面惯性矩:

$$I = \frac{1}{8} \pi dt (d^2 + t^2)$$

由于杆件都采用的是钢材, 所以结构的重量可用材料的体积 V 来衡量。

$$V = A\sqrt{x^2 + h^2} + \pi dt\sqrt{y^2 + h^2}$$

代入题目所给的具体数字, 这个结构优化设计的数学模型可以表达如下:

求设计变量 x 、 y 使目标函数

$$V = 3.8\sqrt{x^2 + 150^2} + 7.854\sqrt{y^2 + 150^2} \quad (1-2-1)$$

为最小, 并满足约束条件

$$y \geq 1.645\sqrt{x^2 + 150^2} - x \quad (1-2-2)$$

$$x \geq 0.796\sqrt{y^2 + 150^2} - y \quad (1-2-3)$$

$$x \geq 0.0000195(y^2 + 150^2)^{1.5} - y \quad (1-2-4)$$

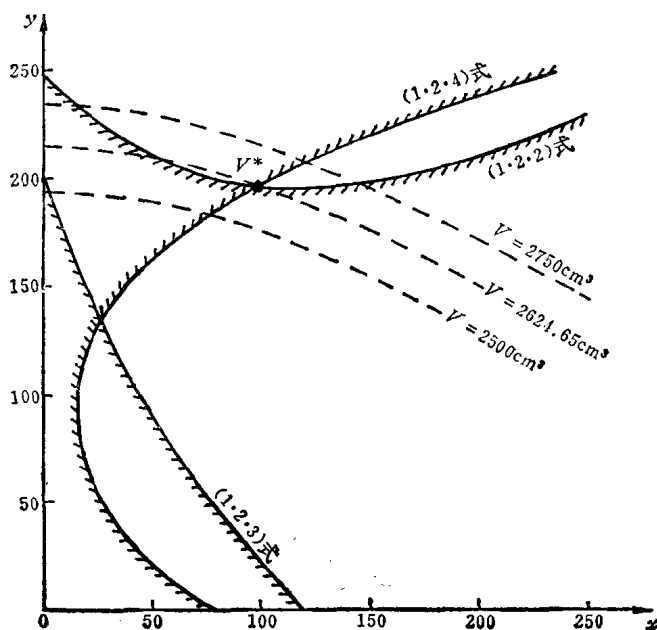


图 1-2-2

由于只有 x 、 y 两个变量, 若以 x 为横坐标, y 为纵坐标。则本结构 x 、 y 取值的可能范围可示于图 1-2-2。

图中约束曲线上有阴影线的一侧表示不满足约束条件。目标函数 V 也在图中用虚线表示。当 V 为不同数值时, 图中显示出一组曲线族。

从图中可以看出, 满足约束条件的最轻设计处于约束条件 (1-2-2) 式和 (1-2-4) 式的交点 V^* 上。这时 $x = 98.4625\text{cm}$, $y = 196.6987\text{cm}$, $V = 2624.646\text{cm}^3$ 。

以上我们只是用这个例子来说明结构优化设计的一些概念, 所以

在例中并没有具体采用某一种优化方法，而且杆件的设计也不是按现行规范的计算方法进行的。

§1-3 常用的技术术语

一、设计变量

优化设计中参与设计的量可以是常量也可以是变量，视设计者的意图而定，凡参与结构优化设计的变量称为设计变量。它是结构优化设计中要求解的主要对象。

设计变量可以是结构构件的截面参数，如截面的高或宽、截面面积、截面惯性矩等。这类设计变量比较简单，结构的型式、几何关系、材料特性等都已确定。

设计变量也可以是和结构整体有关的几何参数，如节点坐标、柱的高度、梁的间距、拱的矢高等。

设计变量还可以是有关结构材料的参数，如材料的弹性模量、钢或混凝土的标号、甚至是复合材料的层数等，选择这类设计变量时问题要复杂些。

设计变量的个数愈多，则结构优化的问题愈复杂，所需的计算时间也愈长；另一方面，设计变量愈多，设计的自由度愈大，可望取得的结果愈好。所以设计者要精心选择那些对优化结果最有影响的参数作为设计变量，而且要合理的选择设计变量的数目。

设计变量有的是连续的，有的则是离散的。如钢筋的截面积、型钢的惯性矩等都必须产品所能提供的规格，因而是离散的。处理连续的设计变量，问题比较简单。当牵涉到离散的设计变量，问题就复杂得多；设计者经常为了简化计算权宜地视之为连续变量，而在最后决定方案时，再选取最为接近的离散值。

二、目标函数

目标函数是设计变量的函数，它代表所设计结构的某个最重要的特征或指标，是判别结构设计优劣的标准。优化设计就是从许多可行的设计中，以目标函数为标准，找出这个函数的极值（极小或极大），从而选出最优设计。

结构的体积、重量、刚度、造价、变形、承载力、自振频率、振幅等都可以根据需要作为优化设计中的目标函数。

最常用的目标函数是结构的重量，即以结构最轻为优化目标。结构的重量是可以确切定量的，它是结构最重要的指标之一，有时甚至是决定性的指标。目前多数优化设计都是属于这类最轻设计。

但有时重量最轻的结构却不一定是最好的结构。以钢筋混凝土结构为例：从重量角度讲，混凝土的重量占绝对数量，但从材料价格讲，钢筋占很大比重。若要求结构的重量最轻，设计出来的结构必然是截面较小，配置的钢筋很多，显然，这样的结构在造价上是不经济的。另外，结构中不同的部件有时造价也会有较大的差别，所以以结构的造价作为目标函数有时具有更大的现实意义。

结构的价格应综合考虑材料、加工制作、运输、安装、维护等一系列因素，但有时不易了解到充分的、准确的资料。

在需要时,目标函数也可以用若干所需特征的加权和来表示,例如设目标函数为:

$$W = \alpha \times \text{重量} + \beta \times \text{价格}$$

式中 α 、 β 为加权系数,自然它们的选择应能确切反映各个特征在结构评价中的分量。

目标函数的不同取法,会导致不同的优化结果,所以合理地确定目标函数至为重要。

三、约束条件

结构优化设计时必须满足或遵守的条件和要求称为约束条件,它反映了有关设计规范、计算规程、运输、安装、施工、构造等各方面的要求,有时约束条件还反映了优化设计工作者的设计意图。

对某个或某组量的直接限制的约束条件称为显约束;对某些与设计变量的关系无法直接说明的量加以限制的约束条件称为隐约束。

土建结构优化设计时一般情况下约束条件很多,它们可以分为两类:一类是由设计规范等有关规定和要求的数值,如板的最小厚度、钢筋混凝土的最小或最大配筋率、纵问钢筋的最小直径等。这类约束条件比较简单,一般都是显约束形式,有时称这类约束为辅助约束(界限约束、边约束)。需要提醒的是不要遗漏一些显而易见的约束条件:如杆件截面不能为负值、上柱截面一般应小于下柱截面、柱的截面应小于相应基础的顶面等。否则,所得到的优化结果可能无现实意义。

另一类约束条件是对结构的强度、稳定、频率等的限制,它们一般与设计变量没有直接关系,必须通过复杂的结构计算才能求得,因而常为隐约束形式,有时称这类约束为性态约束(性状约束)。

约束条件还可以分为等式和不等式约束两种。从理论上讲,一个等式约束条件可以在优化过程中消去一个设计变量,但消去的过程常难以实现,因而并不经常采用这种办法。不等式约束的概念特别重要,有的优化问题中如仅规定等式约束将得不到最优解。此外,遗漏或不恰当地规定约束条件也会导致得不到最优解。

四、设计空间及可行域

由 n 个设计变量可以组成一个 n 维的设计空间,其中满足所有约束条件的点称为可行设计点(简称可行点),实际上就是满足规范等要求的一个设计方案。所有可行点组成的区域称为可行域,例如图1-2-2中约束条件没有画阴影线的一侧即为可行域。

每个约束条件在设计空间中以一个几何面(或线)的形式出现,它是以等式满足该约束条件的所有可行点的轨迹。对连续的设计变量该轨迹一般是连续的。当以图形表达时,在设计变量是两个的情况下,约束条件表现为直线(约束条件为线性时)或曲线(约束条件为非线性时),当设计变量是三个时,相应为平面或曲面,设计变量超过三个时表现为超平面或超曲面。

在以后的讨论中,我们将常用二维或三维的优化问题作为说明理论的辅助手段,这是因为二维或三维设计空间可表达为比较形象的几何图形,这有助于我们对问题的理解。

五、目标函数等值线

设目标函数值为 C ,满足目标函数为 C 值的设计变量理论上可以有无穷个组的解答,这

些解答在设计空间中形成一个点集,而这点集称为目标函数为 C 的“等值线”。

在以图形表达时,设计变量是两个时,目标函数等值线表现为直线(当目标函数为设计变量的线性函数时)或曲线(当目标函数为设计变量的非线性函数时)。当设计变量为三个时,相应为平面或曲面;设计变量超过三个时,表现为超平面或超曲面。为方便计,都简称为目标函数等值线。

当目标函数值不同时,可以形成一组目标函数等值线族,如图 1-2-2 中所示。

结构优化设计所得到的最优解,一般而言,往往是某一个最小(或最大)的目标函数等值线与某一个约束条件线(或面、超曲面等)的切点。也可能是某一个最小(或最大)的目标函数等值线与某几个约束条件线(或面、超曲面等)的交点。

§1-4 优化设计方法的分类

优化设计的方法很多,目前并没有统一的分类方法,为了便于今后的讲述和参考有关书刊,下面介绍几种分类方法。

(1) 按目标函数或约束条件的数学特征来区分:

以是否对目标函数求导来区分——若不求导数称直接法,若求导数称解析法。

按有无约束条件来区分——分为有约束条件和无约束条件两类。

按设计变量的数目来区分——分一维、多维两种。

按目标函数和约束条件的函数性质区分——分线性和非线性两类。

(2) 按优化方法的特征来区分:

准则方法——确定某一种准则作为优化的目标,如满应力设计、满应变能设计等。

数学规划——主要有:

① 线性规划、非线性规划——研究设计变量在约束条件限制下,求目标函数的极值的方法。

② 动态规划——把所研究的问题,分成若干阶段,利用递推关系依次作出最优决策的方法。

③ 几何规划——在目标函数的各个部分中寻求分配总目标函数值的最优方案的方法。此外还有随机规划等。

(3) 按解决结构优化的程度来区分:

结构构件的优化——在结构外形、材料、荷载确定的前提下,求结构构件的截面尺寸。

结构布局理论——在荷载、材料确定的前提下,求结构的布置方案和结构本身的几何外形。

结构形式的优化——选择最合理的结构形式。

第二章 满应力设计

§2-1 满应力设计的概念和特点

满应力设计是准则法之一。它不应用数学的极值原理,而是直接从结构力学的原理出发,使结构的各个杆件至少在一组确定的荷载下承受极限容许应力,即所谓满应力。

优化设计的任务限于在结构几何形状固定和构件材料确定的情况下选择杆件的截面,同时设计中也不考虑对结构位移的限制。

由于满应力设计的概念是一个传统的概念,容易为大家所接受,设计方法比较简单,也比较直观,所以是一种有效的优化设计方法。

满应力的思路是设法使结构构件中的应力达到材料的极限容许应力,从而使杆件的材料能够得到充分的利用。

对于承受多种独立荷载的结构,这些荷载可以形成各种可能出现的组合或称“工况”。满应力设计的任务就是使结构中每一杆件至少在一种工况下达到满应力。

达到满应力设计的途径不是唯一的,最简单的方法是迭代法;就是先假设杆件的初始截面,然后按一定的规则调整杆件的截面,使它们逐步到达满应力状态。

满应力的数学表达式可用下例说明,设有一由 n 根杆件组成的桁架,它的满应力数学模型为:

求设计变量,例如杆件截面

$$A_i (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1-1)$$

使目标函数,例如桁架的重量,为最小,即:

$$W = \sum_{i=1}^n l_i A_i \rho_i \quad (2-1-2)$$

最小。约束条件为:

$$-A_i + \frac{F_i}{[\sigma_i]} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1-3)$$

$$A_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1-4)$$

式中 l_i 、 A_i 、 ρ_i ——杆件 i 的长度、截面和比重。

$[\sigma_i]$ ——杆件 i 的容许应力。

F_i ——杆件 i 在各工况下最大的轴向力。

满应力设计对于一些杆系结构,如桁架、网架等较为适用。近年来人们常把准则方法和数学规划方法结合起来用于结构优化设计中,以提高优化设计的效率。

§2-2 应力比法

应力比法是满应力设计中用迭代方法时最简单的一种方法。

应力比法的过程是：首先选择一组初始截面 $A_i^{(1)}$ ，求出各个杆件在各工况中最大应力 $\sigma_i^{(1)}$ ，然后对各杆的截面进行修改后得到一组新的截面面积 $A_i^{(2)}$ ，作为下一次迭代使用，这样一直循环下去，直至 $A_i^{(k)}$ 和 $A_i^{(k+1)}$ 足够接近为止。

设第 i 个杆件在第 k 次循环时的截面面积与应力分别记为 $A_i^{(k)}$ 和 $\sigma_i^{(k)}$ ，容许应力记为 $[\sigma_i]$ ，这样第 $k+1$ 次循环时， i 杆所需的截面可表示为：

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]} \quad (2-2-1)$$

我们设 $K_i = \frac{\sigma_i}{[\sigma_i]}$ ，称应力比。它是杆件中的应力与容许应力的比值。显然，如 $K_i < 1$ ，说明假设的截面有裕余，杆件应力小于 $[\sigma_i]$ ，下一次假设截面时应予减小；反之，如 $K_i > 1$ ，说明假设的截面不足，杆件应力大于 $[\sigma_i]$ ，下一次假设截面时应予加大。为简便计都取原截面的 K_i 倍作为下一次的截面面积。

所以，每次循环时，将各杆原来的截面面积乘以 K_i 后作为新选的截面面积，再重新计算应力。这样循环下去，直至各杆的 K_i 值接近于 1 时，即得到满应力设计。

下面，我们通过一简单的数例来具体说明用应力比法进行满应力设计。

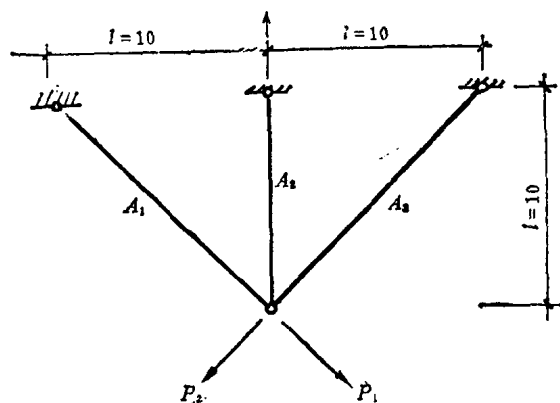


图 2-2-1

例[2-2-1] 有一三杆组成的超静定桁架，外形和尺寸如图2-2-1所示，作用有荷载 P_1 或 P_2 (P_1 与 P_2 不同时作用)。已知 $P_1 = P_2 = 2000\text{kg}$ ， $[\sigma_+] = 2000\text{kg/cm}^2$ ， $[\sigma_-] = 1500\text{kg/cm}^2$ ，（结构设计中，杆件的容许压应力与杆件长细比 λ 有关，作为数例，我们暂设为常值），试用应力比法求杆件截面 A_1 ， A_2 ，和 A_3 。

解：若要求各杆应力比 K_i 全部为 1，则迭代次数要大为增加，工程设计中各杆应力值允许在 $[\sigma] \pm 5\%$ 范围内，本题取 $0.99 \leq$

$K_i \leq 1.01$ 作为已满足满应力准则。

本题因为结构是对称的，且荷载 P_1 与 P_2 虽不同时作用，但为等值，所以 A_1 应等于 A_3 ，设计变量取为 A_1 和 A_2 两个。

各杆内力可由结构力学中解超静定结构的方法求得：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= P_1 \frac{A_1 A_2 + \sqrt{2} A_1 A_3}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ N_2 &= P_1 \frac{\sqrt{2} A_2 A_3}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ N_3 &= P_1 \frac{-A_2 A_3}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-2)$$

各杆应力，当 $A_1 = A_3$ 时，相应为：

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = P_1 \frac{A_2 + \sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = P_1 \frac{\sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2} \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{A_3} = P_1 \frac{-A_2}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-3)$$

为计算简便, 设材料比重 $\rho = 0.1$; 当 $A_1 = A_3$ 时, 结构的总重量为:

$$W = \rho l (\sqrt{2} A_1 + A_2 + \sqrt{2} A_3) = 2\sqrt{2} A_1 + A_2 \quad (2-2-4)$$

根据强度条件, 各杆应力不应超过容许应力, 所以, 由(2-2-3)式可得:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \frac{A_2 + \sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2} &\leq [\sigma_+] \\ P_1 \frac{\sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2} &\leq [\sigma_+] \\ P_1 \frac{-A_2}{\sqrt{2} A_1^2 + 2 A_1 A_2} &\geq -[\sigma_-] \end{aligned} \right\} \quad (2-2-5)$$

将 $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$, P_1 的具体数字代入式(2-2-5), 整理后得:

$$A_2 \geq \frac{\sqrt{2} A_1 (1 - A_1)}{2 A_1 - 1} \quad (2-2-6a)$$

$$A_2 \geq \frac{\sqrt{2} (1 - A_1)}{2} \quad (2-2-6b)$$

$$A_2 \leq \frac{3\sqrt{2} A_1^2}{4 - 6 A_1} \quad (2-2-6c)$$

考虑到(2-1-4)式的要求, 杆件截面不能为负值, 得:

$$A_1 \geq 0 \quad (2-2-6d)$$

$$A_2 \geq 0 \quad (2-2-6e)$$

式(2-2-6)就是本题的五个约束条件, 由于本题只有两个设计变量, 我们可以将(2-2-6)式取等号, 示于图(2-2-2)。

目标函数式(2-2-4)改写为:

$$A_2 = -2\sqrt{2} A_1 + W \quad (2-2-7)$$

显然, 这是一直线方程, 用虚线也示于图(2-2-2)。约束条件用阴影线表示的一侧为非可行域。

从图中可以看出, 本例的最优解必然在重量等值线与式(2-2-6a)约束条件曲线的公切点 A^* 上。

我们先把这个问题的精确解用古典方法求出, 以便和应力比法所得的结果进行比较。显然, 只要对两条线分别求它们的斜率后, 再联立求解, 就可以得

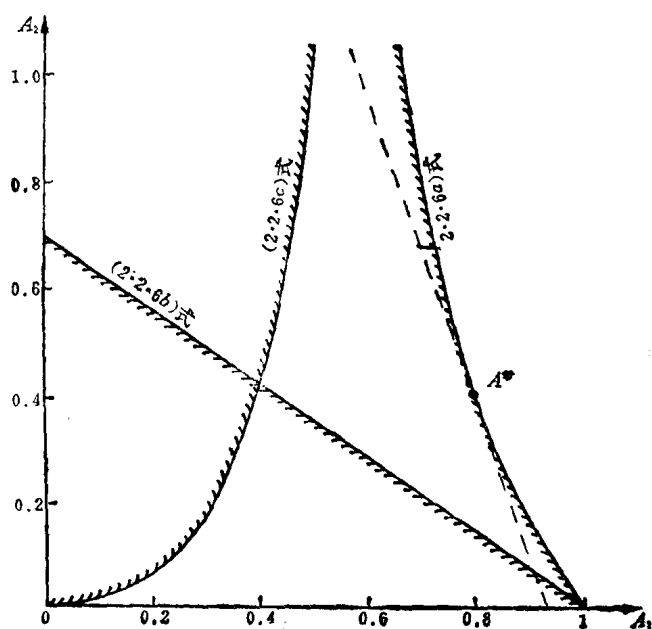


图 2-2-2

到最优点 A^* 的坐标。

已知式 (2-2-7) 的斜率为:

$$\frac{dA_2}{dA_1} = -2\sqrt{2}$$

式 (2-2-6a) 的斜率为:

$$\frac{dA_2}{dA_1} = \frac{(2-2\sqrt{2}A_1)(2A_1-1) - \sqrt{2}A_1(1-A_1)2}{(2A_1-1)^2}$$

上两式联立并整理后可得:

$$6A_1^2 - 6A_1 + 1 = 0$$

所以 $A_1 = 0.7887$, $A_2 = 0.4082$ 。

由式 (2-2-4), 结构的总重量为:

$$W = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 = 2.6390$$

这就是本题最优解的精确解。

下面我们应用应力比法进行优化设计。

各杆的应力比可利用式 (2-2-3) 求得

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\sigma_1}{[\sigma_+]} = \frac{A_2 + \sqrt{2}A_1}{\sqrt{2}A_1^2 + 2A_1A_2} \\ K_2 &= \frac{\sigma_2}{[\sigma_+]} = \frac{\sqrt{2}A_1}{\sqrt{2}A_1^2 + 2A_1A_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-8)$$

设以杆件初始截面 $A_1^{(1)} = 1$, $A_2^{(1)} = 1$ 代入式 (2-2-8), 可得 $K_1^{(1)} = 0.7071$, $K_2^{(1)} = 0.4142$, 相应的结构总重量由式 (2-2-4) 可得 $W = 3.8284$, 这样完成了第一次迭代。

第二次迭代利用式 (2-2-1), 确定各杆截面为:

$$A_1^{(2)} = K_1^{(1)} \cdot A_1^{(1)} = 0.7071 \times 1 = 0.7071$$

$$A_2^{(2)} = K_2^{(1)} \cdot A_2^{(1)} = 0.4142 \times 1 = 0.4142$$

同上可得 $K_1^{(2)} = 1.0938$, $K_2^{(2)} = 0.7735$, $W = 2.4142$ 。这样一直迭代下去, 直至各杆 $0.99 \leq K \leq 1.01$ 时为止, 所得到的截面面积 A , 即为最优解。全部计算结果摘录示于表 2-2-1, 并示于图 2-2-3。

表 2-2-1

k	A_1	A_2	K_1	K_2	W
1	1	1	0.7071	0.4142	3.8284
2	0.7071	0.4142	1.0938	0.7735	2.4142
3	0.7735	0.3204	1.0541	0.8153	2.5081
4	0.8153	0.2612	1.0353	0.8441	2.5672
...					
97	0.9898	0.0144	1.0001	0.9899	2.8141
98	0.9899	0.0142	1.0001	0.9900	2.8142

分析本数例的计算结果可以看出:

(1) 在单一工况的条件下对超静定桁架进行满应力设计, 可能有某些杆件截面收敛到零, 使结构蜕化成一静定桁架。这是由于变形协调的要求所致。就本例的三杆桁架来说: 三杆

原汇交于一点，但若三杆都处于满应力状态而杆长有所改变后，就未必一定仍能汇交于一点。设其中有两杆以满应力状态汇交于一点时，第三杆就可能不符合满应力条件。因此我们以迭代法迫使三杆都同时符合满应力条件时，其结果就使其中一杆的截面收敛至零，而使余下的两杆形成满应力静定桁架（称为原结构的“静定子结构”）以同时符合满应力条件及变形协调的条件。

（2）在单一工况条件下超静定桁架的满应力解不是唯一的。这一结论可自上一结论引伸而得：一般说来，从一个超静定桁架中可以形成不止一个静定子桁架，而每一个静定子桁架的满应力设计也就是原桁架的一个满应力设计（其中有某些杆件截面为零）。因此单一工况下超静定桁架的满应力解不是唯一的。

（3）满应力设计的解未必同时又是最轻结构的解。因为既然符合满应力条件的解不止一个，我们就不能指望满应力设计一定能收敛到最轻结构的一个解上。就本例来说，优化后结构总重为 2.8142，而理论最轻重量解为 2.6390，相差 6.64%。

超静定桁架具有这样的特点，即增大某一杆件的截面，杆件内力也随之增大；反之亦然。因此按应力比法来调整截面，由于内力随之变化，截面的调整总是落后一步，从表 2-2-1 中的 K_1 及 K_2 的数值可以看出，无论迭代多少次，原先大于 1 的 K 总还是大于 1，反之亦然。因此收敛较慢。本例为一最简单的桁架，迭代次数竟需 98 次！为了加速迭代过程，改善收敛性能，可将 (2-2-1) 式改为

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} \left(\frac{\sigma_i^{(k)}}{[\sigma_i]} \right)^\beta \quad (2-2-9)$$

式中 β 为一大于 1 的值，叫做“超松弛因子”，一般可在 1.5 左右取值。

下面我们将例 (2-2-1) 引入 $\beta = 1.7$ 的超松弛因子，再计算一次，全部计算结果摘录于表 2-2-2 并用虚线示于图 2-2-3。

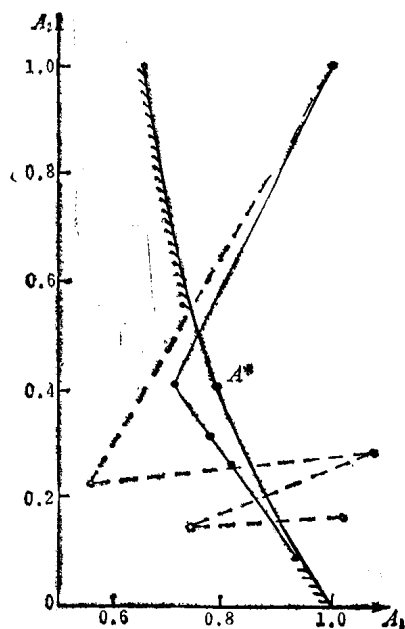


图 2-2-3

表 2-2-2

k	A_1	A_2	K_1	K_2	W
1	1	1	0.7071	0.4142	3.8284
2	0.5548	0.2235	1.4754	1.1483	1.7927
3	1.0747	0.2827	0.8044	0.6782	3.3223
4	0.7422	0.1461	1.2006	1.0539	2.2455
...					
54	0.9894	0.01503	1.0001	0.9895	2.8134
55	0.9896	0.01476	1.0001	0.9897	2.8137
56	0.9897	0.01450	1.0001	0.9898	2.8139
57	0.9899	0.01425	1.0001	0.9900	2.8142

与表 2-2-1 相比较，采用超松弛因子后，迭代过程加快了。从图 2-2-3 中可见，采用超

松弛因子迭代时, 迭代的过程是按折线形逐步走向最优解, 为了提高计算的精确性, 最优结果应取最后二次迭代结果的平均值。所以, 最后结果为 $A_1 = 0.9898$, $A_2 = 0.01438$, $W = 2.8141$ 。

值得提醒的是若超松弛因子选择不当, 则迭代过程可能不收敛。表 2-2-3 表示本例在不同的超松弛因子 β 值时, 迭代次数和最优解的情况。

表 2-2-3

β	k	A_1	A_2	W
1	98	0.9899	0.01422	2.8142
1.3	75	0.9899	0.01434	2.8141
1.5	65	0.9899	0.01431	2.8141
1.7	57	0.9898	0.01438	2.8141
1.8	54	0.9899	0.01432	2.8141
1.9	40	0.9876	0.01825	2.8115
1.95	78	0.9938	0.00919	2.8201
2	发散	—	—	—

当结构承受多种可能工况时, 在每一工况下杆件都有相应的应力比值, 为了确保安全, 修改截面时应选择该杆件在各工况下应力比中的最大值, 即(2-2-1)式应相应修改为:

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} \cdot (\max_j K_{ij}^{(k)}) \quad (2-2-10)$$

上式中下标的第一个字母代表杆件号, 第二个字母代表工况号。

下面, 我们还是通过简单的数例来说明在多工况时, 如何用应力比法进行满应力设计。

例[2-2-2] 与例 2-2-1 题相同, 但作用荷载 $P_1 = 4000\text{kg}$, $P_2 = 2000\text{kg}$ (不同时作用)。

解: 本题设计变量有三个, 即 A_1, A_2, A_3 。参照(2-2-2)式各杆应力分别为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= P_1 \frac{A_2 + \sqrt{2} A_3}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ \sigma_{12} &= P_2 \frac{-A_2}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ \sigma_{21} &= P_1 \frac{\sqrt{2} A_3}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ \sigma_{22} &= P_2 \frac{\sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ \sigma_{31} &= P_1 \frac{-A_2}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \\ \sigma_{32} &= P_2 \frac{A_2 + \sqrt{2} A_1}{\sqrt{2} A_1 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_3} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-11)$$

各杆的应力比相应为: