工程系统中的随机过程

——随机系统分析与最优滤波

高钟毓

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是高等工科院校教材。全书共分十章，内容包括随机过程的数学描述方法，随机动态系统的数学分析方法以及最优估计的基础理论等三大部分。书末附录给出了有关计算程序，每章均附有习题。

本书可作为大专院校有关专业高年级本科生、研究生教材，也可供有关工程技术人员参考使用。

工程系统中的随机过程
——随机系统分析与最优滤波
富 钟 鑫
责任编辑 朱力

清华大学出版社出版
北京 清华园
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
☆
开本：850×1168 1/32 印张：12 字数：300 千字
1989 年 3 月第 1 版 1989 年 3 月第 1 次印刷
印数：0001-2500
ISBN 7-302-00334-3/TK・11
定价：3.05 元

序　　言

在许多工程系统中都存在着随机变化的有用信号和干扰，例如雷达跟踪系统和惯性导航系统。随着技术的发展，人们不仅从元器件方面，而且从系统设计方面来提高工程系统的质量，这里主要是指精度。为此，必须采用概率统计的方法来分析工程系统。可以肯定，不仅在精密仪器和自动控制技术的领域中，而且在其它工程领域中，甚至在生物工程和社会经济领域中，研究随机过程和随机的动态系统都将是十分必要的。

这本专著是作者多年来从事这方面理论和实验研究工作的成果，并在清华大学精密仪器与控制方向的研究生中作过多次讲授。它包括对随机过程的数学描述方法；对随机动态系统的数学分析方法以及最优估计的基础理论等三大部分。对于目前广大在职的工程技术人员和在校的研究生来说，这本书将帮助他们掌握这方面的基础理论知识，并能应用于解决工程中的实际问题。

这本书的特点在于理论上比较深入，它不仅介绍了工程中目前常用的相关函数理论，而且深入到随机微分方程的解法。在进一步认识随机过程和随机系统时，掌握比较深入的数学方法是必要的。它有助于读者在将来学习和探讨这方面新的研究成果。

本书的另一个特点是重视介绍工程中具有应用前景的方法，主要是卡尔曼滤波的计算程序。

我们推荐这本书作为高等工科院校的教材，并相信它将有助于我国广大工程技术人员为我国社会主义现代化建设作出更大贡献。

章燕申　1987年10月

目　　录

第一章　随机过程引论

内容提要： 本章首先简要复习概率论及随机变量的有关基本知识，包括概率空间，随机变量，分布函数、数学期望及矩等。然后，给出随机过程的定义。定义随机过程是时间附标的随机变量族。将分布函数、数学期望与矩、独立及不相关等概念推广应用于随机过程的概率表达。最后，根据随机过程的概率特性，介绍重要的随机过程的分类。

§1.1　概率空间

在现代的概率论中，最基本的概念是三元总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 组成的概率空间。其中，Ω 称为**基本事件空间，或样本空间**。它包括试验中一切可能出现的基本事件 ω。换句话说，每一个基本事件 ω 都可以想像为空间 Ω 中的一个点，即，$\omega \in \Omega$。现在，令 A 是感兴趣的某具体事件，它是基本事件的某种集合。那么，每一个这样的事件 A 是空间 Ω 的一个子集：$A \subset \Omega$。特别地，不可能事件 $\varnothing$（即不包含基本事件的事件）称为空集。如果在试验中观测到的基本事件 $\omega \in \Omega$ 是 A 的一个元素，那么就说事件 A 出现。

【例 1.1.1】 研究连续三次投掷一枚完好硬币的试验。样本空间由八个基本事件组成。如果 H 代表正面出现，T 代表反面出现，那么，八个可能的基本事件为 HHH，HHT，HTH，THH，HTT，THT，TTH，以及 TTT。样本空间 Ω 正是这八个基本事件的集合：

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT,$$

$$THT, TTH, TTT\} \tag{1.1.1}$$

如果我们感兴趣的事件是正面向上的次数。用 A_i 代表 i 次正面向上的事件，那么，我们有

$$\begin{aligned} A_0 &= \{TTT\} \\ A_1 &= \{HTT, THT, TTH\} \\ A_2 &= \{HHT, HTH, THH\} \\ A_3 &= \{HHH\} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

显然，A_0 和 A_3 由一个基本事件组成，而 A_1 和 A_2 由三个基本事件组成，并且它们都是 Ω 的子集，即，对于 $i = 0, 1, 2, 3$，$A_i \subset \Omega$。如果在一次试验中观测到的基本事件为 HHT，那么，我们就说事件 A_2 出现。

$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集 $A_i(A_i \subset \Omega)$ 的非空类，称为**随机事件的 σ-域**，或 **σ-代数**。设 A_i 是 Ω 的子集，如果 $A_i \in \mathscr{F}$，那么，

(1) $\overline{A}_i \in \mathscr{F}$，其中 $\overline{A}_i$ 是 A_i 的补，$\overline{A}_i = \Omega - A_i$；

(2) $\Omega \in \mathscr{F}$，因而，由于 (1)，空集 $\varnothing \in \mathscr{F}$；

(3) 如果 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，那么，它们的并及交也属于 $\mathscr{F}$，即

$$\bigcup_i A_i \in \mathscr{F} \text{ 和 } \bigcap_i A_i \in \mathscr{F}$$

其中，符号 $\bigcup\limits_i$ 和 $\bigcap\limits_i$ 分别表示可能有限的或可列无限的并和交。

【例 1.1.2】 仍以连续三次投掷硬币为例，考虑由事件 A_0, A_1, A_2, A_3 产生的 σ-域，那么，根据定义 (1)—(3)，不难验证，它可以表示为

$$\begin{aligned} \mathscr{F} = \{ &\varnothing, A_0, A_1, A_2, A_3, \\ &A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, \\ &A_0A_1A_2, A_0A_1A_3, A_0A_2A_3, A_1A_2A_3, \Omega\} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

P 是定义在 σ-域 $\mathscr{F}$ 上的非负实值函数，称为**概率测度**。对

于 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素 A，$P(\cdot)$ 赋值 $P(A)$。$P(A)$ 称为事件 A 的概率，满足下列公理：

(1) $P(A) \geqslant 0$，对于一切 $A \in \mathscr{F}$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 如果有限的或可列无限的 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，并且互不相交，即，

$$A_i \cap A_j = \emptyset，对于一切 \ i \neq j,$$

那么，

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \tag{1.1.4}$$

公理(1)是概率测度的非负性，公理(3)是概率测度的可加性。由公理(1)—(3)，不难看出概率测度有下列特性：

1) 对于一切 $A \in \mathscr{F}$，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2) $P\{A \cup B\} \leqslant P\{A\} + P\{B\}$；

3) 如果 $A \subset B$，那么，$P\{B\} \geqslant P\{A\}$。

【例 1.1.3】 再一次考虑连续三次投掷一枚硬币的试验。样本空间 Ω 由八个基本事件组成。如果我们感兴趣的事件是正面向上的次数，那么，相应的 σ-域 $\mathscr{F}$ 的组成如例 1.1.2。于是，对于 $\mathscr{F}$ 中的每一个随机事件 A，可以赋予概率为

$$P(A) = \frac{A\text{中的基本事件数}}{8} \tag{1.1.5}$$

易证，这样定义的 P 满足公理(1)—(3)。事件 A_0 和 A_3 的概率为 $1/8$，而事件 A_1 和 A_2 的概率为 $3/8$。事件 $A_1A_2A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，且 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$，所以，

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 7/8$$

至此，我们已经介绍了概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中的三元素的定义和性质，建立了概率论的公理结构。总之，Ω 为样本空间，由试验的一切基本事件所组成；$\mathscr{F}$ 为感兴趣的事件的 σ-域；P 是

定义在 σ-域 $\mathscr{F}$ 上的概率测度。

在我们工程实际的应用中，每次试验的基本事件 ω 是某种物理量(如位置、速度、温度、压力、电流、电压等)可能出现的数值，每一个数可用 n 维欧氏空间的一个点来表示。因此，由这样的基本事件全体所组成的样本空间 Ω 是 n 维欧氏空间 R^n 的点集，所感兴趣的事件 A 是下列形式的集合：

$$A = \{\omega:\ \omega < a,\ \omega \in \Omega\} \tag{1.1.6}$$

并且，σ-域 $\mathscr{F}$ 是由这样的 A 和它们的补、并及交产生的集合类。必须注意，(1.1.6) 式表明，集合 A 必须是 Ω 中的元素，而且满足 $\omega < a$。这里，ω 和 a 都是 n 维向量，a 是给定的。

由 (1.1.6) 描写的事件集合经过补、并及交运算，所产生的最小 σ-域称为**波雷尔 (Borel) σ-域**，或简称为**波雷尔域**，用符号 $\mathscr{F}_B$ 表示。$\mathscr{F}_B$ 中的元素称为**波雷尔集合**。显然，波雷尔集合在 n 维欧氏空间的每一个坐标轴上包含一切开、闭区间，半开半闭区间，以及点值。因此，波雷尔域实际上由 n 维欧氏空间的一切子集所组成。

【例 1.1.4】 设样本空间 Ω 为实线上的区间 $[0, 1)$，$\mathscr{F}_B$ 是由 Ω 中的一切子区间产生的波雷尔域。那么，对于 $\mathscr{F}_B$ 中的任意区间，都可以赋予概率测度等于该区间长度。

§1.2 随机变量及分布函数

随机变量定义

令 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为基本的概率空间，令 $x(\cdot)$ 是定义在 Ω 上的实值函数，$x:\ \Omega \to R$。如果对于每一个实数 α，逆映射满足

$$A = \{\omega:\ x(\omega) < \alpha\} \in \mathscr{F} \tag{1.2.1}$$

即，集合 A 是 σ-域 $\mathscr{F}$ 的元素，那么，我们称这样定义的函数 $x(\omega)$ 是 $\mathscr{F}$-可测函数，并且把它叫做**随机变量**。

n 维随机向量是定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一群随机变量组成的向量 $x(\omega)=[x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots, x_n(\omega)]^T$（这里上角标 T 表示转置），使得对于一切实数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，集合

$$B=\{\omega:\ x_1(\omega)<\alpha_1, x_2(\omega)<\alpha_2, \cdots, x_n(\omega)<\alpha_n\}$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:\ x_i(\omega)<\alpha_i\}\in\mathscr{F} \tag{1.2.2}$$

即，集合 B 是 σ-域 $\mathscr{F}$ 中的一个随机事件。

分布函数、分布密度函数

我们知道，凡是属于 σ-域 $\mathscr{F}$ 的一切事件都赋有一个概率 $P(\cdot)$，因此，我们可以定义一个新的函数

$$P_x(\alpha)\triangleq P(\{\omega:\ x(\omega)<\alpha\}) \tag{1.2.3}$$

我们把这个新函数 $P_x(\cdot)$ 叫做随机变量 $x(\omega)$ 的**分布函数**。由概率 $P(\cdot)$ 的性质，易知，分布函数 $P_x(\alpha)$，$-\infty<\alpha<\infty$，是一个非负实值函数，而且是非降和左连续的。

如果分布函数 $P_x(\alpha)$ 在点 $\alpha\in R$ 上连续，那么，我们可以把它关于 α 的偏导数定义为随机变量 $x(\omega)$ 的**分布密度函数**：

$$p_x(\alpha)\triangleq\frac{\partial}{\partial\alpha}P_x(\alpha) \tag{1.2.3a}$$

或者

$$\mathrm{d}P_x(\alpha)=p_x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.2.3b}$$

采用积分形式表示，我们有

$$P_x(\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha}p_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{1.2.4}$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，由概率测度定义 $P(\Omega)=1$，可知 $P_x(\infty)=1$，所以，

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi=1 \tag{1.2.4a}$$

即，分布密度函数对全状态空间的积分等于 1。

分布密度函数 $p_x(\alpha)$ 本身不是概率，但是，我们可以把

$p_x(\alpha)\,d\alpha$看作随机变量$x(\omega)$在点α位于$d\alpha$区间的概率。因此，有时候，$p_x(\alpha)\,d\alpha$又可以表示为$P_x(d\alpha)$。

类似地，对于n维随机向量$x(\omega)=[x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots, x_n(\omega)]^T$，我们定义$n$ **维联合分布函数**为

$$P_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \triangleq P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:\ x_i(\omega)<\alpha_i\}\right) \tag{1.2.5}$$

这里，$P_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$n$个实变量$\alpha_i$，$i=1, 2, \cdots, n$，的实值函数。

如果联合分布函数在点$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$上连续，那么，我们有

$$p_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \triangleq \frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\cdots\partial\alpha_n}P_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \tag{1.2.5a}$$

或者写成积分形式

$$P_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \int_{-\infty}^{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\alpha_2}\cdots\int_{-\infty}^{\alpha_n}p_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_n \tag{1.2.6}$$

我们称$p_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$为随机向量$x(\omega)$的**联合分布密度函数**。虽然联合分布密度函数本身不是概率，但是，我们可以把它解释为随机向量$x(\omega)$在点$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$位于$n$维超体积$d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_n$中的概率。

特征函数

随机变量的概率分布特性还可以用**特征函数**来表征。特征函数定义为分布密度函数的傅立叶变换

$$F_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(u_1, u_2, \cdots, u_n) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$\cdot \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} u_k\alpha_k\right\} \mathrm{d}\,\alpha_1\,\mathrm{d}\,\alpha_2\cdots\mathrm{d}\,\alpha_n \tag{1.2.7}$$

其中 u_k，$k=1,2,\cdots,n$，为虚拟变量，$i=\sqrt{-1}$。采用向量表示形式，(1.2.7) 可改写为

$$F_x(u) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} p_x(\alpha)\exp\{iu^T\alpha\}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\alpha} \tag{1.2.7a}$$

其中，

$$x \triangleq [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

$$u \triangleq [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$$

以及

$$\alpha \triangleq [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T$$

特征函数经常用于随机变量变换的分析。采用特征函数讨论具有高斯分布的随机变量的概率特性尤为方便。

【例 1.2.1】 高斯随机变量 $x(\omega)$ 具有分布密度函数

$$p_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{(\xi-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

根据特征函数定义 (1.2.7)，

$$F_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{iu\xi - \frac{(\xi-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}\mathrm{d}\,\xi$$

令 $\gamma = \xi - \mu_x$，则有

$$F_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\{iu\mu_x\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iu\gamma - \frac{\gamma^2}{2\sigma_x^2}\right\}\mathrm{d}\gamma$$

将被积式中的指数配方，并令 $\beta = \gamma - iu\sigma_x^2$，可得

$$F_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{iu\mu_x - \frac{u^2\sigma_x^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}\beta$$

易知，$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}\,\beta = \sqrt{2\pi}\,\sigma_x$

所以，高斯随机变量的特征函数为

$$F_x(u) = \exp\left\{iu\mu_x - \frac{u^2\sigma_x^2}{2}\right\}$$

类似地，n 维高斯随机向量 $x(\omega)$ 具有联合分布密度函数

$$p_x(\alpha)=(2\pi)^{-n/2}|P_x|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[\alpha-m_x]^TP_x^{-1}[\alpha-m_x]\right\}$$

其中，m_x 为 n 维向量，P_x 为 $n\times n$ 对称正定阵。可以证明，对应的联合特征函数为

$$F_x(u)=\exp\left\{iu^Tm_x-\frac{1}{2}u^TP_xu\right\}$$

条件分布密度函数

令 $x(\omega)$ 和 $y(\omega)$ 是两个随机变量，让我们定义事件 A 和 B 分别为

$$A=\{\omega:\ x(\omega)<\alpha\}$$

和
$$B=\{\omega:\ \beta\leqslant y(\omega)<\beta+\Delta\beta\}$$

那么，在给定事件 B 的条件下，事件 A 的条件概率可表示为

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\&=\frac{P(\{\omega:\ x(\omega)<\alpha,\ \beta\leqslant y(\omega)<\beta+\Delta\beta\})}{P(\{\omega:\ \beta\leqslant y(\omega)<\beta+\Delta\beta\})}\end{aligned}$$

其中 $P(\{\omega:\ \beta\leqslant y(\omega)<\beta+\Delta\beta\})>0$。等式右边的事件概率用分布密度函数表示，可得

$$P(A|B)=\frac{\int_{-\infty}^{\alpha}\int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta}p_{x,y}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta}p_y(\eta)\mathrm{d}\eta}$$

令 $\Delta\beta\to 0$，那么可得在给定 $y=\beta$ 条件下，x 的**条件分布函数**为

$$\begin{aligned}P_{x|y}(\alpha|\beta)&=\lim_{\Delta\beta\to 0}P(A|B)\\&=\frac{\int_{-\infty}^{\alpha}p_{x,y}(\xi,\beta)\,\mathrm{d}\,\xi}{p_y(\beta)}\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

等式两边对 α 取偏导数，可得**条件分布密度函数**为

$$p_{x|y}(\alpha|\beta)=\frac{p_{x,y}(\alpha,\beta)}{p_y(\beta)}$$

$$=\frac{p_{y|x}(\beta|\alpha)p_x(\alpha)}{p_y(\beta)} \tag{1.2.9}$$

通常，我们称 (1.2.9) 式为**贝叶斯法则**。

当两个随机变量的条件分布或条件分布密度不依赖于条件变量时，我们就说这两个随机变量是**独立**的。也就是说，当下列等式

$$P_{x|y}(\alpha|\beta)=P_x(\alpha)$$

或者

$$p_{x|y}(\alpha|\beta)=p_x(\alpha)$$

成立时，两个随机变量 $x(\omega)$ 和 $y(\omega)$ 互相独立。由贝叶斯法则 (1.2.9)，若两个随机变量独立，则它们的联合分布密度可表示为两个边缘分布密度的乘积，即

$$p_{x,y}(\alpha,\beta)=p_x(\alpha)\cdot p_y(\beta) \tag{1.2.10}$$

随机变量函数的分布密度

设 n 维随机向量 $y(\omega)$ 是由 n 维随机向量 $x(\omega)$ 经下列变换产生：

$$y(\omega)=f(x(\omega)) \tag{1.2.11}$$

此变换为可逆变换，逆变换存在且唯一，即，

$$x(\omega)=g(y)=g[f(x)] \tag{1.2.12}$$

注意，这里 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 都是 n 维向量函数。我们定义事件

$$B=\{\omega:\ y(\omega)<\beta\}$$

以及 x 对应的事件

$$A=\{\omega:\ f[x(\omega)]<\beta\}$$

$$=\{\omega:\ x(\omega)<g(\beta)\}$$

由于变换 (1.2.11) 是**一一对应**的，因而这两个事件应具有相同的概率，即，

$$P(\{\omega:\ y(\omega)<\beta\})=P(\{\omega:\ x(\omega)<g(\beta)\})$$

或者用分布函数表示为

$$P_y(\beta) = P_x[g(\beta)] \tag{1.2.13}$$

将 (1.2.13) 改写为分布密度函数的积分形式，可得

$$\int_{-\infty}^{\beta} p_y(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta = \int_{-\infty}^{g(\beta)} p_x(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

关于 β 的每一个分量，对此多重积分求导，最后可得随机向量 $x(\omega)$ 的函数 $y(\omega)$ 的**分布密度**

$$p_y(\beta) = \left|\det\left[\frac{\partial g(\beta)}{\partial\beta}\right]\right| p_x[g(\beta)] \tag{1.2.14}$$

其中表达式 $\partial g(\beta)/\partial\beta$ 是 $n\times n$ 矩阵：

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\beta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial\beta_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial\beta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial\beta_1} & \frac{\partial g_n}{\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\beta_n} \end{bmatrix} \tag{1.2.15}$$

且 $\det[\partial g/\partial\beta]$ 为此矩阵的行列式，通常称之为雅可比 (Jacobi) 行列式。表达式 $|\det[\partial g/\partial\beta]|$ 是它的绝对值。

【例 1.2.2】 假设 x_1 和 x_2 为两个随机变量，它们的联合分布密度函数为

$$p_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)},\ -\infty<\alpha_1,\alpha_2<\infty,$$

定义随机变量

$$y_1 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

和

$$y_2 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{x_2}{x_1}$$

那么，x_1 和 x_2 可表示为

$$x_1 = y_1\cos y_2$$

和