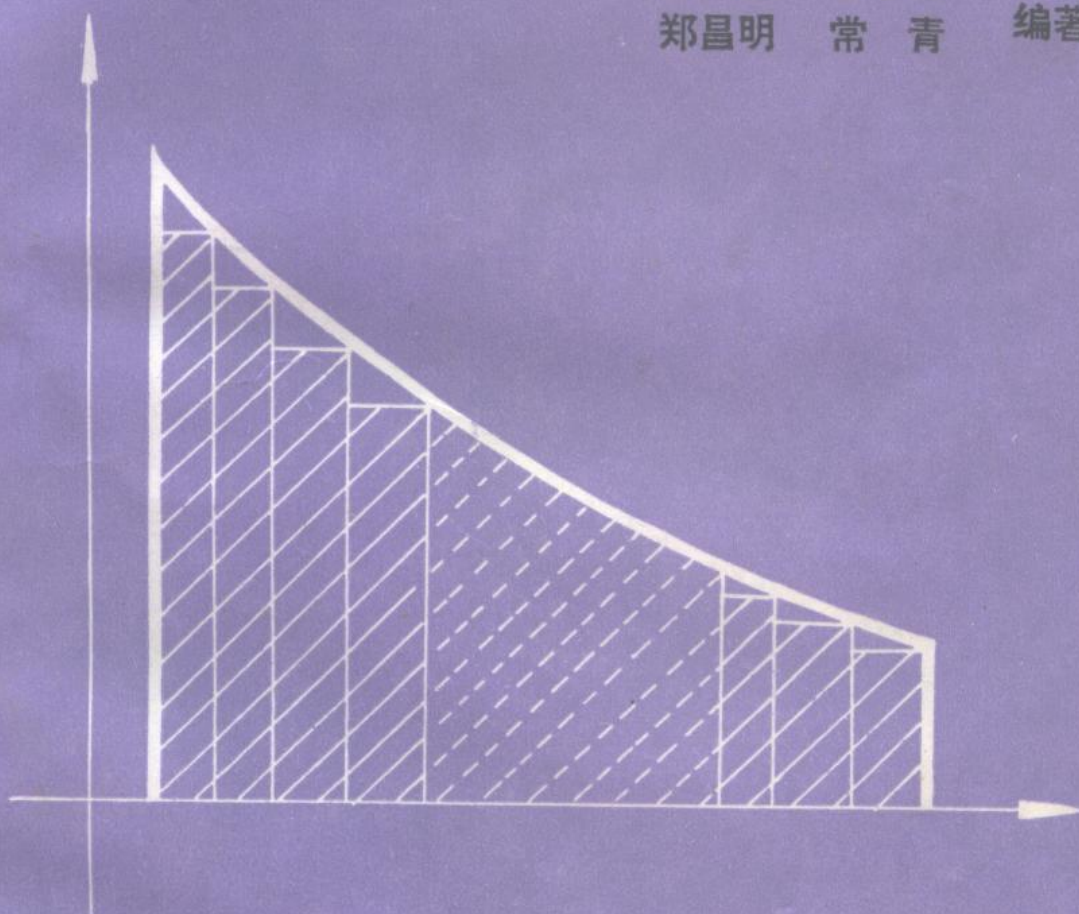


微积分典型例题分析

张银生 - 李秉林
郑昌明 常 青 编著



南开大学出版社

微积分典型例题分析

张银生 李秉林 编著
郑昌明 常 青

南开大学出版社

微积分典型例题分析

张银生 李秉林 编著
郑昌明 常 青

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

邮编:300071 电话:3508542

新华书店天津发行所发行

天津宝坻第二印刷厂印刷

1996年1月第1版

1996年1月第1次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:16.75

字数:424千

印数:1—6000

ISBN 7-310-00908-8

O·96 定价:18.00元

内容简介

本书是根据 1991 年国家教委高教司颁发的微积分课程教学大纲编写的一本教学参考书。其主要内容有:一元函数和二元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程等十章。各章均按内容提要、典型例题分析、思考与练习和自我检查题的顺序编写。在典型例题分析中着重分析解题思路、解题技巧及一题多解的方法,藉以培养和提高学生分析问题及解决问题的能力;在思考与练习中除了选编各类习题供读者使用外,还结合专业的特点,给出了适量的经济应用题。书末附有答案或提示。

本书可作为大学本、专科(包括自学考试和函授)的经济、管理类专业的教学参考书,也可作为报考同类专业研究生的学生以及教师的参考书。

前 言

微积分是高等学校财经管理类专业核心课程之一,对高年级专业课的学习以及工作后的进一步深造有着重要的作用,而学生在学习这门课的时候往往又感到困难很多,尤其是在解答习题上,常常感到无从下手。为此,我们在1991年按照国家教委颁发的微积分课程教学大纲编写了《微积分典型例题分析及习题》一书。在这几年的试用过程中,该书得到了广大读者的关心和支持,对提高教学质量起到了积极的作用。

为了更好地适应教学的需要及广大读者的要求,在总结这几年教学实践的基础上,我们对该书进行了重新编写。在这次编写中,我们做了以下几点:

1. 进一步加强了解题思路的分析和学习方法的指导,增添了一部分例题。
2. 增加了经济应用方面的例题和习题。
3. 在答案中,对证明题及较难的计算题增加了提示。
4. 去掉了原书中偏繁的题目,增加了一些概念性和技巧性较强的题目(题目前加*号)。
5. 在习题中增加了一部分客观性选择题。
6. 适当加强了微分方程与差分方程的内容。
7. 改正了原书中的一些印刷错误。

重新编写后的书有以下特点:

1. 各章都有内容提要。
2. 例题和习题的选择均具有典型性、指导性。
3. 例题分析中配有解题分析,注意事项及一题多解的各种方法。
4. 适用面广,初学者易读,学有余力的同学也可受益。每章均配有针对基本概念的理解和基本技能训练的思考题和练习题,也有供学有余力同学选择的较难的题。
5. 结合专业实例和经济实例。
6. 几乎各章都配有自我检查题,同时书末还配有微积分课程上、下两学期试卷各二套。书末附有全部习题及检查题的答案和提示。

参加1991年原书编写工作的有:霍日查、张银生、肖迎新、吴乃西、李秉林。由吴乃西主编,赵文审编。

在这次重新编写本书中,第一、五、六章由郑昌明执笔,第二、三、四章由张银生执笔,第七、八章由李秉林执笔,第九、十章及余篇由常青执笔。由张银生主编,赵文审编。

在编写过程中,参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢!

限于编著者水平,难免有不当和错误之处,望批评指正,以便不断修改和提高。

编者

目 录

预篇.....	1
第一章 函数.....	6
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
第二章 极限与连续	22
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第三章 导数与微分	39
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第四章 中值定理, 导数的应用.....	56
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第五章 不定积分	77
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第六章 定积分	99
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第七章 无穷级数.....	120
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	

第八章 多元函数	144
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
第九章 微分方程	175
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
第十章 差分方程	209
一、内容提要	
二、典型例题分析	
三、思考与练习	
四、自我检查题	
附录一 微积分试卷	222
附录二 习题与检查题答案	229
附录三 微积分试卷答案	258

预 篇

为了方便读者,现将本书中要用到的一些公式、符号及某些符号的内在含义列举于下.

一、初等代数的一些公式

1 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根

1) 求根公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2) 根的性质

$$\text{当 } b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, & \text{二次方程有两个相异的实根} \\ = 0, & \text{二次方程有两个相等的实根} \\ < 0, & \text{二次方程有共轭复根} \end{cases}$$

2 对数的性质

- 1) 若 $a^y = x$, 则 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) 2) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
3) $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ ($A > 0, B > 0$) 4) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
5) $\log_a A^r = r \cdot \log_a A$ 6) $a^{\log_a x} = x$

3 指数 ($a > 0, b > 0, x_1, x_2, x$ 为任意实数) 的性质

- 1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ 2) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$ 3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

4 不等式的性质

若 $a > b$, 则

- 1) $a \pm c > b \pm c$ 2) $ac > bc (c > 0); ac < bc (c < 0)$
3) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} (c > 0); \frac{a}{c} < \frac{b}{c} (c < 0)$
4) $a^n > b^n (n > 0, a > 0, b > 0); a^n < b^n (n < 0, a > 0, b > 0)$
5) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \text{ 为正整数}, a > 0, b > 0)$

5 数列

- 1) 等差数列: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ (公差为 d)
(1) 通项 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
(2) 前 n 项之和 $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

2) 等比数列: $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$ (公比为 q)

(1) 通项 $a_n = a_1q^{n-1}$

(2) 前 n 项之和 $s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

3) 某些数列前 n 项和

(1) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

(3) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

(4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(5) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$

(6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2$

(7) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

(8) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(9) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

6 二项公式

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

7 阶乘

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

二、初等几何的一些公式

在下面的公式中,我们以字母 r 表示半径, h 表示高, s 表示底面积, l 表示母线长。

1 圆

$$\text{周长} = 2\pi r, \quad \text{面积} = \pi r^2$$

2 圆扇形

$$\text{面积} = \frac{1}{2}r^2\alpha (\alpha \text{ 为扇形的圆心角的弧度})$$

3 正圆柱体

$$\text{体积} = \pi r^2 h, \quad \text{侧面积} = 2\pi r h, \quad \text{表(全)面积} = 2\pi r(r+h)$$

4 正圆锥体

$$\text{体积} = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad \text{侧面积} = \pi r l, \quad \text{表(全)面积} = \pi r(r + l)$$

5 球体

$$\text{体积} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{表面积} = 4\pi r^2$$

三、三角学的一些公式

1 弧长公式

半径为 r , 圆心角为 θ , 弧度圆弧长为 S , 则 $S = r \cdot \theta$ 。

2 常用基本公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

四、平面解析几何常用公式

1 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2 线段 M_1M_2 的斜率

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta \quad (\theta \text{ 为直线 } M_1M_2 \text{ 与 } x \text{ 轴正方向的夹角})$$

3 以点 (a, b) 为圆心, 以 r 为半径的圆方程

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

4 以原点为圆心, 分别以 a 和 b 为半长轴, 半短轴的椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5 抛物线方程 $p > 0$

1) 开口向右, 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$, 准线 $x = -\frac{p}{2}$ 方程为 $y^2 = 2px$ 。

2) 开口向左, 焦点 $(-\frac{p}{2}, 0)$, 准线 $x = \frac{p}{2}$ 的抛物线方程 $y^2 = -2px$ 。

3) 开口向上, 焦点 $(0, \frac{p}{2})$, 准线 $y = -\frac{p}{2}$ 的抛物线方程 $x^2 = 2py$ 。

4) 开口向下, 焦点 $(0, -\frac{p}{2})$, 准线 $y = \frac{p}{2}$ 的抛物线方程 $x^2 = -2py$ 。

6 双曲线方程

1) 实半轴 $= a$, 虚半轴 $= b$, 焦距 $= 2c$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

2) 方程 $xy = k$, 当 $k > 0$ 时图形的位置在 1、3 象限; 当 $k < 0$ 时图形的位置在 2、4 象限。

7 点 (x, y) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。

五、希腊字母

字母	用英文标注的读音
$\Lambda\alpha$	alpha
$\mathbb{B}\beta$	beta
$\Gamma\gamma$	gamma
$\Delta\delta$	delta
$\mathbb{E}\epsilon$	epsilon
$\Xi\xi$	xi
$\Pi\eta$	eta
$\Theta\theta$	theta
$\mathbb{K}\kappa$	kappa
$\Lambda\lambda$	lambda
$\mathbb{M}\mu$	mu
$\mathbb{N}\nu$	nu
$\mathbb{P}\rho$	rho
$\Phi\phi$	phi
$\Psi\psi$	psi
$\Omega\omega$	omega
$\Sigma\sigma$	sigma

六、下列符号的含义

“ $[a]$ ”指不超过实数 a 的最大整数, 例 $[3.5] = 3, [-2.7] = -3$

“ $\in$ ” 属于

“ $\lim$ ” 极限

“ $\sum$ ” 和数

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$$

$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中最小者。

$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中最大者。

$\cup$ 表示集合 A 与集合 B 的并集。

$\cap$ 表示集合 A 与集合 B 的交集。

$\subset$ 表示包含的意思。

$\{x|a < x < b\}$ 表示满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数的集合。

$\{y|y = f(x), x \in D\}$ 表示满足关系式 $y = f(x)$ 的全体 y 值的集合, 其中 x 属于 D 。

第一章 函 数

一、内容提要

1 预备知识

1) 实数及其几何表示

(1) 实数

有理数是指形如 $\frac{p}{q}$ 的数(其中 p, q 是互质的整数,且 $q \neq 0$)。任何一个有限小数或循环小数都可化为有理数。反之亦然。

无理数是指无限不循环的小数。例如 $\sqrt{2}, \sin 5, \lg 3$ 等。

有理数与无理数统称为实数。一般来讲,在微积分中研究的数是实数。

(2) 数轴(实数轴)

一条规定了原点、正方向与长度单位的直线称为数轴。

全体实数与数轴上的点的全体建立一一对应关系。

(3) 实数的性质

有序性:任意两个实数 a, b 之间满足以下三种关系之一:

$$a > b, a = b, a < b$$

稠密性:任何两个实数之间,总可以找到无穷多个有理数和无穷多个无理数。

连续性:实数充满整个数轴而无空隙。

2) 绝对值

(1) 实数的绝对值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示数轴上的点 x 与原点之间的距离。

(2) 绝对值的基本性质

$$1^\circ |x| = \sqrt{x^2} \quad 2^\circ |x| \geq 0$$

$$3^\circ |-x| = |x| \quad 4^\circ -|x| \leq x \leq |x|$$

$$5^\circ |xy| = |x||y| \quad 6^\circ \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0 \text{ 时})$$

(3) 绝对值不等式

$$1^\circ |x+y| \leq |x| + |y| \quad 2^\circ |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$3^\circ \text{ 若 } a > 0 \text{ 则下面两个集合相等: } \{x | |x| < a\} = \{x | -a < x < a\}$$

$$4^\circ \text{ 若 } b > 0 \text{ 则下面两个集合相等: } \{x | |x| > b\} = \{x | x < -b\} \cup \{x | x > b\}$$

3) 区间与邻域

(1) 区间

1° 有限区间

满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为开区间,记为 (a, b) 。

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合,称为闭区间,记为 $[a, b]$ 。

满足不等式 $a < x \leq b$ (或 $a \leq x < b$) 的所有实数 x 的集合,称为半开区间,记为 $(a, b]$ (或 $[a, b)$)。

2° 无限区间

满足不等式 $x > a$ 或 $x \geq a$ 或 $x < b$ 或 $x \leq b$ 的所有实数 x 的集合,称为无限区间并分别记为 $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, 全体实数所表示的区间记为 $(-\infty, +\infty)$ 。

〔注〕 “ $-\infty$ ” 和 “ $+\infty$ ” 是两个记号而不是数。

(2) 邻域

设 a 与 δ 为两个实数,且 $\delta > 0$,则适合不等式 $|x - a| < \delta$ 的所有实数 x 的集合,称为点 a 的 δ 邻域。

$|x - a| < \delta$ 等价于开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域半径。

2 函数

1) 常量与变量

在某一过程中,保持一定数值的量叫常量,可以取不同数值的量叫变量。

2) 函数的定义

若 D 是一个非空实数集合, f 为一对应规则,对于每一个实数 $x \in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应规则 f 为定义在 D 上的函数,记作 $y = f(x)$, $x \in D$ 。变量 x 称为自变量, y 称为因变量。集合 D 称为函数的定义域,也可记为 $D(f)$ 。

对于 $x_0 \in D$ 所对应的 y 值,记作 $y_0 = f(x_0)$,称为当 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值。全体函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in D\}$,称为函数 $y = f(x)$ 的值域,记作 $Z(f)$ 。

3 函数的几种特性

1) 单调性

如果函数 $y = f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的;当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \geq f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的。

如果上式中不出现等号,就说函数 $f(x)$ 是严格增加(严格减少)的。单调增加(减少)函数的图形,当 x 增加时,至少不向下降(不向上升)。

2) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义,如果存在一个常数 $M > 0$,使得对任意的 $x \in (a, b)$ 恒有

(1) $|f(x)| < M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的,否则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是无界的。

(2) $f(x) < M$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有上界。

(3) $f(x) > -M$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有下界。

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必有界。

3) 奇偶性

对于给定的函数 $y = f(x)$ 如果

(1) 对所有的 $x \in D(f)$, 有 $f(-x) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数。

(2) 对所有的 $x \in D(f)$, 有 $f(-x) = -f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于原点。

4) 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在正的常数 a , 使得 $f(x) = f(x+a)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 a , 称为函数的周期。

4 反函数

1) 反函数的定义及其图形

设函数 $y = f(x)$, 其值域为 $Z(f)$, 如果对于 $Z(f)$ 中每一个 y 值, 都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定唯一的一个 x 值, 则得到一个定义在 $Z(f)$ 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数 $x = g(y)$, 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数。

函数 $y = f(x)$ 的反函数常记为 $x = f^{-1}(y)$ 。因为习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量。因此, 将 $x = f^{-1}(y)$ 改记为 $y = f^{-1}(x)$ 。这时我们说 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数。

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是同一个, 而函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y = x$ 。

2) 反三角函数及其主值

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ 的反函数称为反三角函数, 分别记为 $y = \operatorname{Arcsin} x, y = \operatorname{Arccos} x, y = \operatorname{Arctg} x, y = \operatorname{Arctctg} x$, 它们都是多值函数, 常按下列区间取其一段, 并称为反三角函数的主值, 分别记作

$$y = \arcsin x \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = \arccos x \quad y \in [0, \pi] \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y = \operatorname{arctctg} x \quad y \in (0, \pi) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

5 复合函数的定义

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, 再设函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, 若 $Z(\varphi) \cap D(f)$ 非空, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数。其中 x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量。

6 初等函数

1) 基本初等函数

(1) 常数函数: $y = C$ (C 为常数)

(2) 幂函数: $y = x^a$ (a 为任何实数)

(3) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(4) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(5) 三角函数: $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$ $y = \sec x$ $y = \csc x$

(6) 反三角函数: $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arcctg} x$ $y = \operatorname{arcsec} x$
 $y = \operatorname{arccsc} x$

2) 初等函数的定义

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算所构成的并用一个式子表示的一切函数称为初等函数。

初等函数是微积分研究的主要对象。

7 分段函数

如果函数对于其定义域内自变量 x 的不同值, 不能用一个统一的数学表达式表示, 而要用两个或两个以上的式子表示, 那么该函数称为分段函数。必须明确, 分段函数在其整个定义域上是一个函数, 而不是几个函数。由初等函数的定义可知, 分段函数一般不是初等函数。

二、典型例题分析

例 1 解下列不等式, 并将其解用区间表示。

(1) $|2x - 1| < 3$ (2) $|3x + 2| \geq 3$

(3) $(x - 2)^2 < 4$ (4) $0 < (x - 1)^2 < 9$

〔解〕 (1) 将 $|2x - 1| < 3$ 去掉绝对值符号, 得
 $-3 < 2x - 1 < 3$

化简得 $-1 < x < 2$, 即 $(-1, 2)$ 。

(2) 将 $|3x + 2| \geq 3$ 去掉绝对值符号, 得

$$3x + 2 \leq -3 \text{ 或 } 3x + 2 \geq 3$$

故 $x \leq -\frac{5}{3}$ 或 $x \geq \frac{1}{3}$, 即 $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ 。

(3) 对 $(x - 2)^2 < 4$ 两边开方, 得

$$|x - 2| < 2$$

即 $-2 < x - 2 < 2$, 再化简得 $0 < x < 4$, 即 $(0, 4)$ 。

(4) 由 $0 < (x - 1)^2 < 9$ 开方, 得

$$0 < |x - 1| < 3$$

得 $-3 < x - 1 < 3$ 且 $x \neq 1$, 化简得 $-2 < x < 4$ 且 $x \neq 1$, 即 $(-2, 1) \cup (1, 4)$ 。

〔注〕 解(1)~(4)利用了绝对值的基本性质 1° $|x| = \sqrt{x^2}$ 与绝对值不等式 3° $|x| < a$ 同 $-a < x < a$ ($a > 0$) 等价以及绝对值不等式 4° $|x| > b$ 同 $x < -b$ 或 $x > b$ ($b > 0$) 等价的关系。

例 2 将开区间 $(-5, 10)$ 化为带有绝对值的不等式的形式。

〔解〕 区间的中心为 $\frac{10 + (-5)}{2} = \frac{5}{2}$, 半径为 $10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$, 所以带绝对值的不等式为

$$|x - \frac{5}{2}| < \frac{15}{2}$$

它也叫点 $\frac{5}{2}$ 的 $\frac{15}{2}$ 邻域。

〔注〕 因为 $|x - x_0| < \delta$ 等价于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 因此化区间为绝对值不等式时, 先求出

区间的中心 x_0 , 再求半径 δ 即可求得。

例 3 将点 $\frac{1}{3}$ 的 $\frac{2}{3}$ 邻域表示为不带绝对值的不等式。

〔解〕 点 $\frac{1}{3}$ 的 $\frac{2}{3}$ 邻域为满足不等式 $|x - \frac{1}{3}| < \frac{2}{3}$ 的开区间。去掉绝对值符号, 解得

$$-\frac{2}{3} < x - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

即

$$-\frac{1}{3} < x < 1$$

例 4 解下列不等式。

(1) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

(2) $\left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}$

(3) $|x+2| < |x+1|$

(4) $|x+2| + |x-2| \leq 12$

〔解〕 依题意, 解不等式就是要求出适合不等式的 x 值的集合。

(1) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \geq 0$

由此推得

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad (1.1) \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

解得

$$x \geq 1 \quad \text{或} \quad x \leq -3$$

即原不等式的解为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ 。

(2) 若 $\frac{x}{1+x} \geq 0$, 则 $\frac{x}{1+x} > \frac{x}{1+x}$ 不成立; 若 $\frac{x}{1+x} < 0$, 则有 $\frac{2x}{1+x} < 0$, 由此推得

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 1+x < 0 \end{cases} \quad (1.3) \quad \text{或} \quad \begin{cases} 2x < 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

不等式组 (1.3) 无解, 不等式组 (1.4) 的解为 $-1 < x < 0$ 。故原不等式的解为 $(-1, 0)$ 。

(3) 由绝对值的基本性质 1°, 有

$$\sqrt{(x+2)^2} < \sqrt{(x+1)^2}$$

由此有

$$x^2 + 4x + 4 < x^2 + 2x + 1$$

即 $2x < -3$, 解得 $x < -\frac{3}{2}$ 。

(4) $|x+2| + |x-2| \leq 12$

解法 1 当 $x < -2$ 时原不等式为 $-(x+2) - (x-2) \leq 12$

即

$$x \geq -6$$

所以当 $x < -2$ 时, 解为 $-6 \leq x < -2$ 。

当 $-2 \leq x < 2$ 时原不等式为 $(x+2) - (x-2) \leq 12$

即

$$4 \leq 12$$

故其解为 $-2 \leq x < 2$ 。

当 $x \geq 2$ 时原不等式为 $(x+2) + (x-2) \leq 12$

即

$$x \leq 6$$

所以解为 $2 \leq x \leq 6$ 。

综上所述, 适合不等式的 x 值的集合为 $[-6, 6]$ 。

解法 2 当 $(x+2)(x-2) \geq 0$ 时