现代数学丛书

潘一民 著

随机过程的线性统计理论与方法

LINEAR STATISTICAL THEORY AND METHODS IN STOCHASTIC PROCESSES

PAN YIMIN

·现代数学丛书·

随机过程的线性统计理论与方法

潘一民 著

上海科学技术出版社

责任编辑　　赵序明

现代数学丛书

随机过程的线性统计理论与方法

潘一民　著

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092　1/20　印张 11.25　插页 4　字数 137,000

1993年11月第1版　　1993年11月第1次印刷

印数　1—1,400

ISBN 7-5323-3149-0/O·168

定价：18.00元

（沪）新登字108号

内 容 提 要

本书从再生核表示空间出发，统一而严格地论述了随机过程线性统计的理论基础，然后系统地介绍了各种线性随机系统的滤波、预测、平滑、参数估计以及最优控制的方法，特别是适用于计算机的递推算法，大大扩充了已知的模型．很多内容是作者本人的研究成果．本书可作为大学本科和研究生的参考书或教材，也可供有志于提高和深入的有关应用工作者参考．

Modern Mathematics Series

LINEAR STATISTICAL THEORY AND METHODS IN STOCHASTIC PROCESSES

Pan Yimin

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Linear Statistical Theory and Methods in Stochastic Processes

Pan Yimin

Abstract

In this monograph, based on the reproducing kernel representation, we discussed the linear statistical theory of stochastic processes in an united and rigorous way, then systematically presented the methods, especially the recursive algorithms, of filtering, prediction, smoothing, estimation of parameters and optimal control for various linear stochastic systems, which extended the well-known linear systems with white-noise remarkably. Many results are due to the author.

出版说明

从六十年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价．原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念．由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿．

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量．考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨．

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编，谷超豪教授任主编，十八位著名数学家任委员．编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作．

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流．

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前　言

一切统计问题的实质，都是要对随机现象(总体)的部分观测(样本)进行合理的分析，以求对该总体的性质作出某种判断、估计或预测. 如果所考虑的总体性质是随时间而演变的，就属于随机过程统计的范围. 在这类问题中，分析的观测值是前后相互关联的随机过程的一段或一部分采样(动态数据)，其结构比经典统计所分析的总体的简单重复抽样(静态数据)要复杂得多，因此研究手段和数学工具也相应地增加了难度. 其中方法上最成熟、应用上也最广泛的是随机过程的线性统计学，粗略地说，就是限于考虑由观测值的线性函数构成的统计量和均方最优准则. 适应这一条件的统计问题的范围固然有一定局限性，但也带来一个很大的好处，就是它们的最优解仅与过程的前二阶矩性质有关，而无须知道或假定总体的更详尽的概率分布性质. 从模型、理论与方法上讲，它是经典统计中相应问题的本质拓广，也是非线性统计手段的前提与基石；从应用角度讲，它概括了各种线性随机系统的滤波、预测、平滑、未知线性参数估计以及最优线性控制等内容. 据作者所知，迄今国内外还没有一本专门著作，既全面而严格地论述随机过程线性统计的理论基础，又统一而详尽地介绍解决各类有关问题的方法，特别是适用于计算机迭代运算的方法，而弥补这一缺陷，正是写作本书的一个目的.

此外，在过程统计的许多应用中，例如航天、雷达、电子对抗中的信号检测，人造卫星、火箭、工业过程的控制等等，动态数据并不是同时全部给出，而是按时间先后逐步到来的. 它们的数量极其

庞大，且需要适时地加以分析处理判断并作出必要的反应．这就对过程统计的方法论提出了严峻的要求．人们所期望的，往往不是涉及全部观测值的解析表达式，而是对动态数据的序贯处理．电子计算机的飞速进步和普遍使用更为这种要求提供了现实可能性．撰写本书的另一目的，就是希望对尽可能广泛的二阶随机过程(序列)和线性系统模型，提供一整套最优准则下的在线(on line)统计递推格式，使得在每增加一批观测数据时，只需依赖前面少数几步已有的估计值，便能进一步作出新的估计或改进，而无须保存历史数据，从而大大扩充著名的 Kalman 滤波方法．

本书是一本理论性著作，它包含了作者十多年来的研究工作(此项工作曾得到国家自然科学基金委员会资助)．许多结果是新的，而且大都是首次发表，某些已有的定理也给出了完全新的严格证明．第一章是全书的预备知识，即再生核表示理论．最先利用再生核空间来表述二阶过程及其线性统计问题的，乃是捷克数学家 J. Hájek[1]．在本章中，我们将这一概念推广到多维二阶过程，并明确地提出了正则过程这一重要定义．还给出了一套作者认为很方便的特殊记法．在第二章中我们详尽地介绍了任意指标集上随机过程的各类线性统计问题，论证了最优解存在的充分必要条件，并把它们统一归结为求出量测过程的再生核表示空间及其逆再生表示．其中有些问题是在参考文献[1]中讨论过的，这里只是把它们推广到多维情形．但还有一些问题，例如带线性约束条件的回归系数估计，关于可估性的讨论，以及注记 2.2.7 中含未知回归系数矩阵的模型，则是受经典统计模型的启发，第一次在本书中加以研究的．当然，作为特例，它们又包含了经典统计中对应问题的解答．

第三、四两章专门研究离散时间随机过程，即随机序列的线性统计问题．根据第二章的结果，我们首先讨论了在什么条件下，一个局部正则随机序列的再生核表示及逆再生表示可以进行有限步递推运算．为此，特别提出了“q 步后可分解协方差的随机序列”的概念．这一概念由作者与杜金观在参考文献[11]中首次给出，

本书又作了进一步推广．我们证明了这类序列与一类广泛的非白噪声线性随机系统的输出系列是等价的，从而对后者的最优滤波、预测与平滑问题给出了一套完整的递推公式．进一步，还研究了输入含有未知线性参数以及量测噪声为时变ARMA序列的系统，上述问题也获得圆满解决．这些模型的范围已远远超出了通常处理的白噪声系统．

第五章论述随机积分与多维正交随机测度，它是为后两章研究连续时间随机过程作准备的，但是为了扩大它的内涵，我们在一般的阵测度空间上进行讨论．本章的显著特点是用逆再生表示来定义两种随机积分，然后详细分析它们的基本性质．书中还顺便指出了现代鞅论中关于局部有界可料过程对局部平方可积鞅的积分，可以容易地归结为本章定义的一种情形．对平稳过程的谱表示问题也作了推广．

第六、七两章讨论连续时间过程的线性统计问题，其中的“线性新息定理”是一个十分重要的结果和关键的工具．原苏联数学家Y. A. Rozanov曾为此专门写了一本小册子，证明的思路与方法都相当复杂．我们用再生表示方法给出了一个简洁的新证明，并且减弱了原来的条件和推广到多维情形．利用这一定理，我们严格推导出连续时间系统的Kalman-Bucy滤波公式，同时还与离散时间系统对应地研究了输入含未知参数的情形以及非积累量测的情形，并获得表为微分方程的滤波公式．

第八章的主题是线性随机系统的最优控制．我们分别对离散时间与连续时间两种受控系统，给出了平均加权平方损失下最优控制的结构表达式，并与滤波公式作了对比．结果虽然是经典的，但证明却有新意．尤其是对连续时间系统，所给的证明既严格又初等，似乎尚未在别的文献中见到过．

本书的内容自成系统．读者只需具备概率论与测度论的基础知识和对Hilbert空间理论的初步了解，就足以看懂全书(第五章§5.4可以略过)．对严格的理论推导和尽可能广泛的假设条件不感兴趣的读者，尤其是有志于提高和深入的有关应用工作者，也可

以在假定某些结果的前提下涉猎本书，找到对应用有启发的思想与方法. 例如第四章列举的各类系统的递推滤波公式，第八章的最优控制结构，就可以很方便地编成计算机程序.

此外，本书也可以作为研究生的专业教材.

作者感谢老同学陈希孺教授，他于百忙之中仔细审阅了书稿，提出许多十分中肯的意见. 感谢汪嘉冈教授，他一直关注我的研究工作，经常给予支持和鼓励. 感谢上海科学技术出版社赵序明同志，他不惮其劳，热心推荐和编审，使本书得以迅速问世. 最后，我还想把一片感激之情献给我的妻子，作为我的同事和同行，她自始至终倾注了极大的心力，没有她的帮助与促进，本书是难以写成的.

作者学识浅陋，如发现错误与不当之处，敬请同行与读者不吝指正.

潘一民

1992年9月于中国科学院应用数学研究所

记号说明

记号	意　义	所在章节
$\boldsymbol{T}$	任意非空指标集	1.1.1
$\boldsymbol{N}$	正整数全体	1.1.1
$\boldsymbol{C}$	复数(或实数)全体	1.1.1
$\mathscr{X}^k$	以集 $\mathscr{X}$ 的元为分量的 k 维列向量全体	1.1.1
$\mathscr{X}^{k\times l}$	以集 $\mathscr{X}$ 的元为元的 $k\times l$ 矩阵全体	1.1.1
$\triangleq$	表"定义为"或"记为"	1.1.1
C^*	复(或实)矩阵 C 的共轭转置(或转置)矩阵	1.1.1
$\\|C\\|$	复或实矩阵 C 的范数，$\\|C\\|\triangleq\sqrt{\mathrm{tr}(C^*C)}$	
	(其中 tr 表示方阵的迹)	1.1.1
Γ^-	复 Hermite 阵或实对称阵 Γ 的弱逆	1.1.1
$\Gamma\geqslant 0$	表 Γ 为半正定 Hermite 阵	1.1.1
$\Gamma_1\geqslant\Gamma_2$	表 $\Gamma_1-\Gamma_2\geqslant 0$	1.1.1
$(\Omega,\mathscr{F},P)$	概率空间	1.1.1
$\mathscr{L}_2$	二阶矩有穷的随机变量全体	1.1.1
$\mathscr{L}_{20}$	二阶矩有穷且均值为 0 的随机变量全体	1.1.1
$R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵	1.1.1
$R(\boldsymbol{x})$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的方差阵，$R(\boldsymbol{x})\triangleq R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$	1.1.1
$R^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\triangleq E\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^*$	1.1.1
$R^+(\boldsymbol{x})$	$\triangleq R^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$	1.1.1
$\boldsymbol{z}_T$	以 $\boldsymbol{T}$ 为指标集的(m 维)二阶随机过程	1.2.1
$\mathscr{H}_0(\boldsymbol{z}_T)$	由 $\boldsymbol{z}_T$ 张成的线性空间	1.2.1
$Z^{\boldsymbol{x}}$	由 $\boldsymbol{z}_T$ 与随机向量 $\boldsymbol{x}$ 确定的矩阵值函数，	

	$Z_t^x \triangleq R(x, z_t),\ t\in T$	1.2.1
$\mathscr{H}(z_T)$	正则过程 z_T 生成的 Hilbert 空间	1.2.4
$\mathscr{R}(z_T)$	z_T 的再生核表示空间	1.2.4
$z(F)$	再生核表示空间的元 F 在 $\mathscr{H}(z_T)$ 中的逆再生表示	1.2.6
$S_s(F, G)$	再生核表示空间的元 F 与 G 的内积(阵)	1.2.6
$S_s(F)$	再生核表示空间的元 F 的平方范数(阵), $S_s(F)\triangleq S_s(F, F)$	1.2.6
$\mathscr{H}^+(z_T)$	$\triangleq \mathscr{H}(z_T)+C$	2.0.1
$\pi(y\|z_T)$	随机向量 y 基于 z_T 的线性最小方差预报	2.1.1
$\hat{\theta}$, $\hat{y}$	回归系数 θ 及随机向量 y 的 GM估计	2.2.1, 2.3.1
$\hat{\hat{\theta}}$, $\hat{\hat{y}}$	回归系数 θ 及随机向量 y 的带线性约束的GM 估计	2.2.3, 2.3.1
$\mu_{a\theta}$	回归系数 θ 的先验均值	2.2.5
$\Gamma_{a\theta}$	回归系数 θ 的先验方差(阵)	2.2.5
$\check{\theta}$, $\check{y}$	回归系数 θ 及随机向量 y 的 LB 估计	2.2.5, 2.3.4
r_x	x 的信噪比	2.4.1
$P\ll P^{\triangle}$	表示概率测度 P 对 $P^{\triangle}$ 绝对连续	2.5.1
$P\perp P^{\triangle}$	表示概率测度 P 与 $P^{\triangle}$ 相互奇异(正交)	2.5.1
$\dfrac{dP}{dP^{\triangle}}$	P 对 $P^{\triangle}$ 的 Radon-Nikodym 导数	2.5.1
z_N	二阶随机序列	3.1.1
N_t	不超过 t 的自然数全体	3.1.1
$\mathscr{H}(z, t)$, $\mathscr{H}_t$	$\triangleq \mathscr{H}(z_{N_t})$或 $\mathscr{H}(z_{[0,t]})$	3.1.1, 6.1.1
$\mathscr{R}(z, t)$, $\mathscr{R}_t$	$\triangleq \mathscr{R}(z_{N_t})$或 $\mathscr{R}(z_{[0,t]})$	3.1.1, 6.1.1
$S(F, G)_t$	局限于 N_t 或$[0, t]$上的再生核空间内积阵	3.1.1, 6.1.1
$z(F)_t$	局限于 N_t 或$[0, t]$上的逆再生表示	3.1.1, 6.1.1

ε_N	新息序列	3.1.2
Φ_{ts}	转移阵	3.2.1
$\Phi_t^{(q)}$	由转移阵 Φ 定义的局限于 N_{t-q} 上的矩阵值函数，$(\Phi_t^{(q)})_s \triangleq \Phi_{t,s+q}$	3.2.1
$\hat{x}_{\tau\mid t}$	x_τ 基于量测 z_{N_t} 或 $z_{[0,t]}$ 的线性最小方差预报	4.0.1, 7.2.4
$P_{\tau\mid t}$	$\hat{x}_{\tau\mid t}$ 预报 x_τ 的误差方差阵	4.0.1, 7.2.4
$\breve{\breve{x}}_{\tau\mid t}$	x_τ 基于量测 z_{N_t} 或 $z_{[0,t]}$ 的 GM 估计	4.2.1
$\Pi_{\tau\mid t}$	$\breve{\breve{x}}_{\tau\mid t}$ 估计 x_τ 的误差方差阵	4.2.1, 7.3.1
$\check{x}_{\tau\mid t}$	x_τ 基于量测 z_{N_t} 或 $z_{[0,t]}$ 的 LB 估计	4.2.1
$Q_{\tau\mid t}$	$\check{x}_{\tau\mid t}$ 估计 x_τ 的平均误差阵	4.2.1, 7.3.1
$(T, \mathscr{T})$	可测空间	5.1.1
1_S	集 S 的示性函数	5.1.2
$(T, \mathscr{T}, \mu)$	阵测度空间	5.1.3
$\mathrm{tr}\,\mu$	阵测度 μ 的迹测度	5.1.4
$\dfrac{d\mu}{d\,\mathrm{tr}\,\mu}$	阵测度对其迹测度的 RN 导数	5.1.4
$\int_T F_t\, d\mu G_t^*$	矩阵值函数对阵测度的积分	5.1.5
$L_2(\mu)^k$	对 μ 平方可积的 $C^{k\times m}$ 值函数全体	5.1.5
$\sigma L_2(\mu)^k$	对 μ 为 σ 平方可积的 $C^{k\times m}$ 值函数全体	5.1.5
$\int_T H_t\, d\mu\, z_t$	二阶可积过程 z_T 对阵测度 μ 的随机积分	5.2.3
$w_{\mathscr{S}}$	以集类 $\mathscr{S}$ 为指标集的正交随机测度	5.3.1
$\int_T H_t\, dw$	平方可积函数对正交随机测度的积分	5.3.4
$(G\cdot w)_{\mathscr{S}}$	由 G 和 $w_{\mathscr{S}}$ 导出的正交随机测度	5.3.7
$L_2(\Phi_T, \nu)$	由函数族 Φ_T 张成的 $L_2(\nu)$ 的闭子空间	5.5.2
$z_{[0,\infty)}$	二阶随机过程	6.0.1
$t'\uparrow\uparrow t$	t' 严格上升趋于 t	6.0.1
$t'\downarrow\downarrow t$	t' 严格下降趋于 t	6.0.1