52.1

高等學校教學用書

理論力學基本教程

下册

H. H. 蒲赫哥爾茨著

商務印書館

高等學校教學用書

理論力學基本教程

下册

H. H. 蒲赫哥爾茨著
錢偉武　錢敏譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的蒲赫哥爾茨(Н. Н. Бухгольц)著"理論力學基本教程"(Основной курс теоретической механики)第二部分1939年修訂第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學和師範大學數理系的教科書。

理論力學基本教程

下　冊

錢尙武　錢敏譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新　華　書　店　總　經　售

商　務　印　書　館　印　刷　廠　印　刷

上海天通菴路一九〇號

(51041B)

1953年12月初版　　版面字數 223,000

1955年2月3版(12月第2次印)印數8,501—10,000

印張 8 3/4　　定價(7)¥1.11

序　言

"理論力學基本教程"的第二部分具有和第一部分相同的使命，這一部分包含質點組動力學，剛體動力學和分析動力學的原理，篇幅和蘇聯國立大學的課程大綱相符合。

我有義務對我的學生——講師 П. А. 乞連莫欣和 В. Н. 希切爾卡乞夫——表示深深的謝意，因爲他們在準備本版的付印時給我很大的協助。

Н. 蒲赫哥爾次。

1936 年 2 月序於莫斯科

第二版序言

在"理論力學基本教程"第二部分第二版中，改正了第一版中的錯誤和錯字；此外增添了論述量綱和相似性理論這一新的一章(第八章)。

我對 В. К. 哥爾次孟和 В. П. 批拉托夫斯基表示衷心的感謝，因爲他們在校正課文時給我協助，並對所有有價值地指出本書第一版中疏忽大意和錯字的人們致以深切的謝忱。

Н. 蒲赫哥爾次。

1939 年 6 月序於莫斯科。

下 册 目 錄

第一章　質點組動力學的普遍定理

§1　基本概念·約束

1. 力學組·約束　力學組是指這樣的一個質點集合，其中每一質點的運動都與組中其他質點的位置和運動有關。限制組中質點運動的條件稱爲約束；這些條件可以解析地表示成聯系組中各質點的坐標和速度的方程式(或不等式)的形式，也就是說，這些條件具有下列形式：

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \cdots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t)=0,$$

或者，縮寫爲

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)=0❶, \qquad (1)$$

式中 n 是組中質點的數目。在可解約束的情形下，等號換以不等號(見第一部分，第四章，§1)。因爲當質點組運動時坐標 x, y, z 和速度 $\dot{x}$, $\dot{y}, \dot{z}$ 是時間的函數，所以時間經由這些變量隱含在約束方程式中；此外，t 也可能顯含在約束方程式中。不是時間的顯函數的約束稱爲穩定約束；而如果約束是時間的顯函數，那末它就稱爲不穩定約束。穩定約束具有下列形式：

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})=0, \qquad (2)$$

而類型(1)所表示的約束就是不穩定的。

形式(1)和形式(2)的約束不僅限制了組中質點的坐標，而且也

---

❶ 如果字母旁沒有指標時，就約定將每一字母了解爲各該帶有所有可能指標的字母的全體；例如，x 表示 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n 的全體等等。

限制了它們的速度；這種約束稱爲運動約束或微分約束。祇限制組中質點位置的，因而以祇聯系諸質點坐標的方程式來表示的約束就稱爲幾何約束或非無限小約束；幾何約束具有下列形式：

$$f(x, y, z; t)=0 \quad 或 \quad f(x, y, z)=0 。 \tag{3}$$

在大多數場合下，具有實際意義的運動約束是以組中諸質點速度的線性方程式來表示的。這種約束，如果它們是不穩定的，具有下列形式：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \dot{x}_\nu+b_\nu \dot{y}_\nu+c_\nu \dot{z}_\nu)+a=0, \tag{4}$$

式中 a_ν, b_ν, c_ν, a 是坐標 x, y, z 的函數，也可能是時間 t 的函數，也就是說

$$a_\nu,\ b_\nu,\ c_\nu,\ a \left| \begin{matrix} x,\ y,\ z, \\ t \end{matrix} \right. 。$$

而如果這一約束是穩定的，那末它就以下列形式的方程式來表示：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \dot{x}_\nu+b_\nu \dot{y}_\nu+c_\nu \dot{z}_\nu)=0, \tag{5}$$

式中 a_ν, b_ν, c_ν 祇有賴於坐標 x, y, z 。

將方程式（4）和（5）乘上 dt，就得到以下列形式的方程式來表示運動約束的式子：

對不穩定約束來說是

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\, dx_\nu+b_\nu\, dy_\nu+c_\nu\, dz_\nu)+a\, dt=0, \tag{4a}$$

對穩定約束來說是

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\, dx_\nu+b_\nu\, dy_\nu+c_\nu\, dz_\nu)=0 。 \tag{5a}$$

方程式(4a)和(5a)的左端是坐標的微分也許還有時間的微分的線性的形式；如果這些線性微分多項式是全微分（亦即可以積分），那末在積分之後微分約束就不再是微分約束而成爲將條件祇加在組中各質點的坐標上的非無限小約束亦即幾何約束。因而，約束祇有在它不能積分的

場合下才是微分的。

按照 H. 赫芝的術語，力學組祇有以非無限小(幾何)形式來表示的約束時，這種力學組就稱爲完整的；而如果在力學組上加以不能積分的微分約束，這種力學組就稱爲非完整的。被迫在一個面上無滑動地滾動的剛體就是非完整力學組的例子。在這一場合下，該面就是非完整約束，因爲它的效果就是剛體和面接觸點的速度必須等於零，從這裏可以淸楚看出約束的運動性質(見第一部分，第四章，§ 1)。

2. **約束加在坐標變更上的條件** 假定說我們有一個由 n 個質點所組成的完整的力學組，有 k 個下列類型的非無限小約束加在這個力學組上：

$$f_\varkappa(x,y,z;t)=0\text{。}\qquad(\varkappa=1,\,2,\,\cdots,\,k)$$

這時此力學組獨立坐標的數目將等於 $3n-k$（見第一部分，第四章）。讓我們使這一力學組發生某一微小的虛位移，由於這一虛位移力學組中質點的坐標得到和這些坐標的變更相等的增量

$$\delta x_\nu,\ \delta y_\nu,\ \delta z_\nu\text{。}\qquad(\nu=1,\,2,\,\cdots,\,n)$$

這 $3n$ 個增量不是互不相關的，因爲由於非無限小約束它們應該滿足 k 個下列形式的條件：

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0,\ (\varkappa=1,\,2,\,\cdots,\,k)\qquad(6)$$

祇要變更約束方程式，我們就可以得到這些條件(見第一部分，第五章)。因而，獨立變更的數目將等於 $3n-k$，亦卽等於力學組坐標的數目。

現在假定說力學組是非完整的，除了下列形式的非無限小約束以外：

$$f_\varkappa(x,\,y,\,z;\,t)=0,\qquad(\varkappa=1,\,2,\,\cdots,\,k)$$

還有 r 個下列形式的微分(不能積分的)約束加在這個力學組上：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\,dx_\nu+b_{\rho\nu}\,dy_\nu+c_{\rho\nu}\,dz_\nu)+a_\rho\,dt=0\text{。}\quad(\rho=1,\,2,\,\cdots,\,r)\quad(7)$$

方程式(7)將力學組質點在時間 dt 內所作的實位移的投影 dx, dy, dz

聯系起來。在虛位移的情形下，力學組諸質點坐標的變化以它們的變更 δx, δy, δz 來表示，而且 $\delta t=0$，因為虛位移是力學組位置和這一瞬間相應的變化(亦卽並不變更時間)。因此我們衹要以變更代替微分並考慮到 $\delta t=0$，就可以從方程式(7)得出將坐標的變更聯系起來的方程式；因而，類型(7)的微分約束在坐標的變更上加上條件：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\,\delta x_\nu+b_{\rho\nu}\,\delta y_\nu+c_{\rho\nu}\,\delta z_\nu)=0\text{。}\quad(\rho=1,2,\cdots,r)\qquad(8)$$

從這裏清楚看出，當有微分約束在場時，正像當有非無限小約束在場時那樣，虛位移衹有在那種場合下才和實位移相合，卽約束是穩定的，亦卽微分約束具有下列形式：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\,dx_\nu+b_{\rho\nu}\,dy_\nu+c_{\rho\nu}\,dz_\nu)=0,$$

而且 $a_{\rho\nu}$, $b_{\rho\nu}$, $c_{\rho\nu}$ 衹是坐標的顯函數而不是時間的顯函數。

總之，設加在力學組上的約束有 k 個下列類型的非無限小約束：

$$f_\varkappa(x,y,z;t)=0,\qquad(\varkappa=1,2,\cdots,k)$$

並有 r 個下列類型的不能積分的微分約束：

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\,dx_\nu+b_{\rho\nu}\,dy_\nu+c_{\rho\nu}\,dz_\nu)+a_\rho\,dt=0\text{。}\quad(\rho=1,2,\cdots,r)$$

力學組獨立坐標的數目將等於 $3n-k$，這裏 n 是力學組中質點的數目。坐標的變更將以下列條件聯系起來：

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0,\quad(\varkappa=1,2,\cdots k)$$

和
$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\,\delta x_\nu+b_{\rho\nu}\,\delta y_\nu+c_{\rho\nu}\,\delta z_\nu)=0\text{。}\quad(\rho=1,2,\cdots,r)$$

這些條件的數目等於 $k+r$，因而，獨立變更的數目等於 $3n-(k+r)$。由此得出結論：在非完整的力學組中，獨立變更的數目小於力學組獨立坐標的數目，而在完整力學組的場合下這兩個數目是相同的。

獨立的坐標變更的數目稱為力學組自由度的數目。那麼對完整的

力學組來說自由度的數目等於獨立坐標的數目，而對非完整的力學組來說小於獨立坐標的數目。

3. 往往方便的是以一個帶有和各坐標軸相應的不同指標的字母來表示各質點的坐標，這些坐標軸自身又以號碼 1, 2, 3 來表示(圖 1)。比方說，

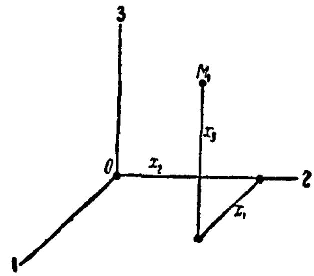

圖 1

質點 M_1 的坐標不用 x_1, y_1, z_1 而用 x_1, x_2, x_3 來表示，

質點 M_2 的坐標不用 x_2, y_2, z_2 而用 x_4, x_5, x_6 來表示，

……………………………………………………………………

質點 M_n 的坐標不用 x_n, y_n, z_n 而用 x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n} 來表示。

爲求和方便起見，這些質點的質量以一個帶有和這些質點坐標的指標相同的指標的字母來表示；例如質點 M_1 的質量以 m_1，或者以 m_2，或者以 m_3 來表示，而且當然 $m_1=m_2=m_3$，質點 M_2 的質量以 m_4，或者以 m_5，或者以 m_6 來表示，而且 $m_4=m_5=m_6$，質點 M_n 的質量以 m_{3n-2}，或者以 m_{3n-1}，或者以 m_{3n} 來表示，而且 $m_{3n-2}=m_{3n-1}=m_{3n}$。我們將有時候使用這種符號。

§2 基本的動力學的量

4. 取一個由 n 個質點所組成的力學組，此力學組在運動中。那麼在任一瞬間在力學組每一質量爲 m_ν 的質點 M_ν 上將附一矢量——這一質點的動量 $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$。將諸矢量 $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$ 移到任一個中心 O 上(圖 2)；結果就得到主矢量

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

它稱爲力學組的動量並等於力學組各質點動量之和，還得到主矩

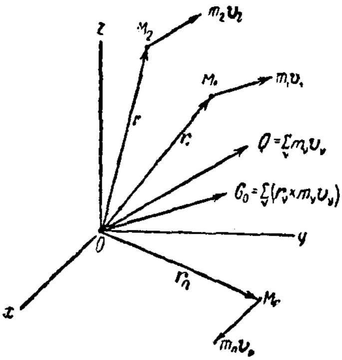

圖 2

$$\boldsymbol{G}=\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu),$$

它等於力學組各質點對中心O的動量矩之和，並稱爲力學組的主動量矩或力學組對中心O的動矩。

5. **力學組的動量**　讓我們來考察力學組的動量

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{v}_\nu\text{。}$$

因爲 $\boldsymbol{v}_\nu=\dfrac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}$，所以

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu;$$

但力學組對中心O的靜矩 $\sum\limits_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu$ 等於

$$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu=M\boldsymbol{r}_C,$$

式中 $M=\sum\limits_{\nu=1}^{n}m_\nu$ 是整個力學組的質量，而 $\boldsymbol{r}_C$ 是質量中心的矢坐標；因此

$$\boldsymbol{Q}=M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}=M\boldsymbol{v}_C,\qquad (9)$$

式中 $\boldsymbol{v}_C$ 是質量中心的速度。由此得到定理：力學組的動量等於力學組質量中心的動量，整個力學組的質量都集中在質量中心這一點上。從這一定理得出結論：當力學組對它的質量中心運動時，力學組的動量等於零，因爲在這一場合下 $\boldsymbol{v}_C=0$。

力學組動量在坐標軸上的投影將等於

$$Q_x=\sum_\nu m_\nu\dot{x}_\nu,\quad Q_y=\sum_\nu m_\nu\dot{y}_\nu,\quad Q_z=\sum_\nu m_\nu\dot{z}_\nu\text{。}$$

6. **力學組的動矩**　前面已經指出，力學組各點對中心O的動量矩之和，亦卽矢量

$$G_O=\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\boldsymbol{r}_\nu\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right),$$

稱爲力學組對中心 O 的動矩。

設 C(圖 3)是力學組的質量中心，而且 $OC=\boldsymbol{r}_C$，$CM=\boldsymbol{r}'_\nu$；那麽

$$\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_\nu\text{。}\qquad(11)$$

如果力學組運動着，那麽 $\boldsymbol{r}_\nu$，$\boldsymbol{r}_C$ 和 $\boldsymbol{r}'_\nu$ 都是時間的函數；因此

$$\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\text{。}\qquad(12)$$

將表示式(11)和(12)代入動矩的表示式(10)中，就得到：

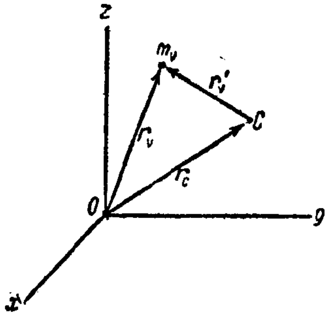

圖　3

$$G_O=\sum_{\nu=1}^{n}\left[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_\nu)\times m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)\right],\qquad(13)$$

或者，打開括弧並以 $\boldsymbol{v}_C$ 表示質量中心的速度 $\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}$，就得到：

$$G_O=\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)+\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)+$$
$$+\sum_{\nu=1}\left(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)\text{。}$$

如果考慮到：　$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu=M\boldsymbol{r}_C$，　$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=M\boldsymbol{r}'_C=0$，

就得到下列很明顯的等式：

$$\sum_\nu(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C,$$

$$\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}_C\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)=\boldsymbol{r}_C\times\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=\boldsymbol{r}_C\times\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=0,$$

$$\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_C)=0,$$

$$\sum_\nu\left(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu),$$

根據這些等式，就可以得到下列形式的表示動矩 G_O 的式子：

$$G_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu)\text{。}\tag{14}$$

右端第一項是質量中心(整個力學組的質量都集中在這一點上)對中心 O 的動量矩;第二項是力學組當它對活動坐標系運動時所有質點對質量中心的動量矩之和,此活動坐標系的原點在質量中心上,軸和基本坐標系的軸相平行(因爲 $\boldsymbol{v}'$ 是質點 M_ν 對此坐標系的速度)。

由此得到定理:力學組對任何中心的動矩等於力學組的質量中心(整個力學組的質量都集中在這一點)對同一中心的動量矩,加上力學組當它對原點在質量中心上而軸和基本坐標軸平行的活動坐標系運動時對質量中心的動矩,亦卽

$$G_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+G'_C\text{。}\tag{14}$$

如果取坐標系並設

$$\boldsymbol{r}_\nu=x_\nu\boldsymbol{i}+y_\nu\boldsymbol{j}+z_\nu\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}'_\nu=x'_\nu\boldsymbol{i}+y'_\nu\boldsymbol{j}+z'_\nu\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}_C=x_C\boldsymbol{i}+y_C\boldsymbol{j}+z_C\boldsymbol{k},$$

那末力學組的動矩在坐標軸上的投影,或者同樣的,力學組對坐標軸的動矩表示成這樣:

$$G_O=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}'_\nu),$$

或者表示成坐標的形式:

$$\left.\begin{aligned}
G_x&=\sum_\nu m_\nu(y_\nu\dot z_\nu-z_\nu\dot y_\nu)=M(y_C\dot z_C-z_C\dot y_C)+\sum_\nu m_\nu(y'_\nu\dot z'_\nu-z'_\nu\dot y'_\nu);\\
G_y&=\sum_\nu m_\nu(z_\nu\dot x_\nu-x_\nu\dot z_\nu)=M(z_C\dot x_C-x_C\dot z_C)+\sum_\nu m_\nu(z'_\nu\dot x'_\nu-x'_\nu\dot z'_\nu);\\
G_z&=\sum_\nu m_\nu(x_\nu\dot y_\nu-y_\nu\dot x_\nu)=M(x_C\dot y_C-y_C\dot x_C)+\sum_\nu m_\nu(x'_\nu\dot y'_\nu-y'_\nu\dot x'_\nu)\text{。}
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

在本節 n°4 中已經說明,力學組的動量 $\boldsymbol{Q}$ 和力學組對中心 O 的動矩 G_O 分別是諸矢量 $m_\nu\boldsymbol{v}_\nu$ 的主矢量和主矩,$m_\nu\boldsymbol{v}_\nu$ 這些矢量是力學組諸質點對歸結中心 O 的動量。如果取另一歸結中心 O',那末,顯然,主矢量 $\boldsymbol{Q}$ 保持不變,而主矩,亦卽在這一情形下力學組對中心 O' 的動矩,已經不同。事情是這樣的,因爲(圖 4)

$$G_{O'}=\sum_\nu(\boldsymbol{r}'_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu)\quad\text{和}\quad \boldsymbol{r}'_\nu=\boldsymbol{r}_\nu-\overline{OO'},$$

所以

$$G_{O'}=\sum_{\nu}[(\boldsymbol{r}_\nu-\overline{OO'})\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu]=\sum_{\nu}(\boldsymbol{r}_\nu\times m_\nu\boldsymbol{v}_\nu)-\overline{OO'}\times\sum_{\nu}m_\nu\boldsymbol{v}_\nu,$$

如果考慮到 $\sum_{\nu}m_\nu\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{Q}$，就可以從這個式子得到：

$$\boldsymbol{G}_{O'}=\boldsymbol{G}_O-\overline{OO'}\times\boldsymbol{Q}\text{。}\tag{16}$$

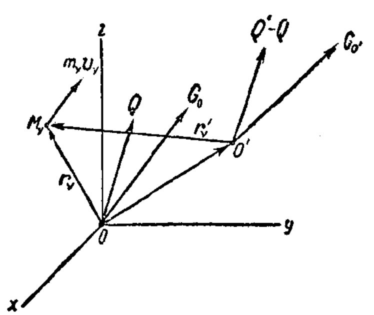

圖 4

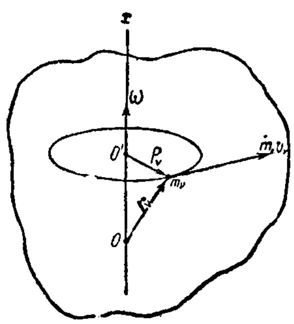

圖 5

作爲例子，我們來求以角速度 ω 繞 x 軸轉動的剛體對於此軸的動矩（圖 5）。剛體對 Ox 軸的動矩是剛體各質點對此軸的動量矩之和。因爲剛體各質點的速度和轉動軸垂直，所以質量爲 m_ν 的質點對於 Ox 軸的動量矩等於 $m_\nu v_\nu \rho_\nu$，這裏 ρ_ν 是質點離轉動軸的距離。因此

$$G_x=\sum_{\nu}m_\nu v_\nu\rho_\nu,$$

但是因爲 $v_\nu=\rho_\nu\omega$，所以

$$G_x=\sum_{\nu}m_\nu\omega\rho_\nu^2=\omega\sum_{\nu}m_\nu\rho_\nu^2\text{。}$$

量 $\sum_{\nu}m_\nu\rho_\nu^2$ 等於物體每一點的質量和此點到某軸距離的平方之積的和，此量稱爲物體對此軸的轉動慣量，它在剛體動力學中起着十分重要的作用。設 $\sum_{\nu}m_\nu\rho_\nu^2=J_x$，就得到：

$$G_x=J_x\omega\text{。}$$

讓我們用另一種方法來求同樣的量。剛體對任何的軸 x 的動矩等於對此軸任何一點的動矩在軸上的投影，亦即

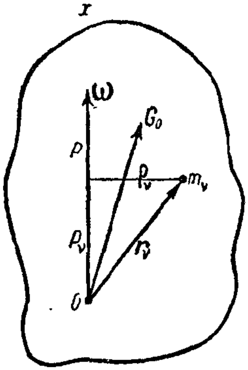

圖 6

$$G_x = \boldsymbol{G}_0 \cdot \boldsymbol{x}^0 。$$

式中 $\boldsymbol{x}^0$ 是 x 軸方向的單位矢量。但是

$$\boldsymbol{G}_0 = \sum_\nu \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

而且 $$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu,$$

因此

$$\boldsymbol{G}_0 = \sum_\nu \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu) =$$
$$= \boldsymbol{\omega} \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu^2 - \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_\nu)。$$

(從這裏可以看出,一般地動矩的方向和轉動軸的方向不相同。) 將矢量 $\boldsymbol{G}_0$ 投影到 Ox 軸上,就得到

$$G_x = \boldsymbol{G}_0 \cdot \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}^0 \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 - \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_\nu) 。$$

因爲 Ox 軸和轉動軸的方向一樣,所以(見圖 6)

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}^0 = \omega; \quad \boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{x}^0 = OP = p_\nu; \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_\nu = \omega p_\nu;$$

由此得到

$$G_x = \omega \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 - \omega \sum_\nu m_\nu p_\nu^2 = \omega \sum_\nu m_\nu (r_\nu^2 - p_\nu^2),$$

或者,因爲 $r_\nu^2 - p_\nu^2 = \rho_\nu^2$, 這裏 ρ_ν 是 m_ν 點到轉動軸的距離,

$$G_x = \omega \sum_\nu m_\nu \rho_\nu^2 = J_x \omega 。$$

7. **活力** 力學組各質點活力之和稱爲力學組的活力或動能。如果以 $\boldsymbol{v}_\nu$ 表示質量爲 m_ν 的質點的速度,那末力學組的活力將爲

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu v_\nu^2, \qquad (17)$$

而且和遍及於力學組的所有質點。

如果 $\boldsymbol{r}_\nu$ 是質點 m_ν 對中心 O 的坐標, $\boldsymbol{r}'_\nu$ 是同一質點對質量中心 C 的坐標,而且 C 對 O 的坐標爲 $\boldsymbol{r}_C$ (圖 7), 那末

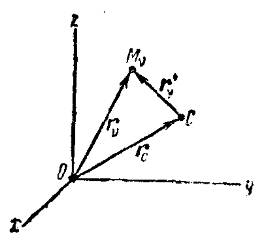

圖 7

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_\nu$$

和

$$\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}=\boldsymbol{v}_\nu=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}。\tag{18}$$

將(18)的值代入活力表示式(17)中，就得到：

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)^2。\tag{19}$$

打開括弧，就得到：

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)^2+\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)^2。$$

讓我們將右端各項加以變換。我們得到：

$$\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\right)^2\sum_\nu m_\nu=Mv_C^2,$$

式中 $\boldsymbol{v}_C$ 是質量中心的速度，而 $M=\sum\limits_\nu m_\nu$ 是整個力學組的質量。其次

$$\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\cdot\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt},$$

但是

$$\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu\boldsymbol{r}'_\nu=\frac{d}{dt}M\boldsymbol{r}'_C=0,$$

因爲 $\boldsymbol{r}'_C$ 是質量中心 C 對 O 的坐標；因而，

$$\sum_\nu m_\nu\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}=0。$$

這樣一來；

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}\right)^2。\tag{20}$$

(20)右端第一項是質量中心(整個力學組的質量集中在這一點上)的活力；第二項是力學組當它對原點在質量中心上而軸和基本坐標系的軸相平行的活動坐標系運動時的活力，蓋因 $\frac{d\boldsymbol{r}'_\nu}{dt}$ 是質點 m_ν 對此坐標系的速度。因而，力學組的活力等於質量中心(整個力學組的質量集中在這一點上)的活力，加上力學組當它對原點在質量中心上而軸和基本坐標系的軸相平行的活動坐標系運動時的活力(寇尼格定理)。