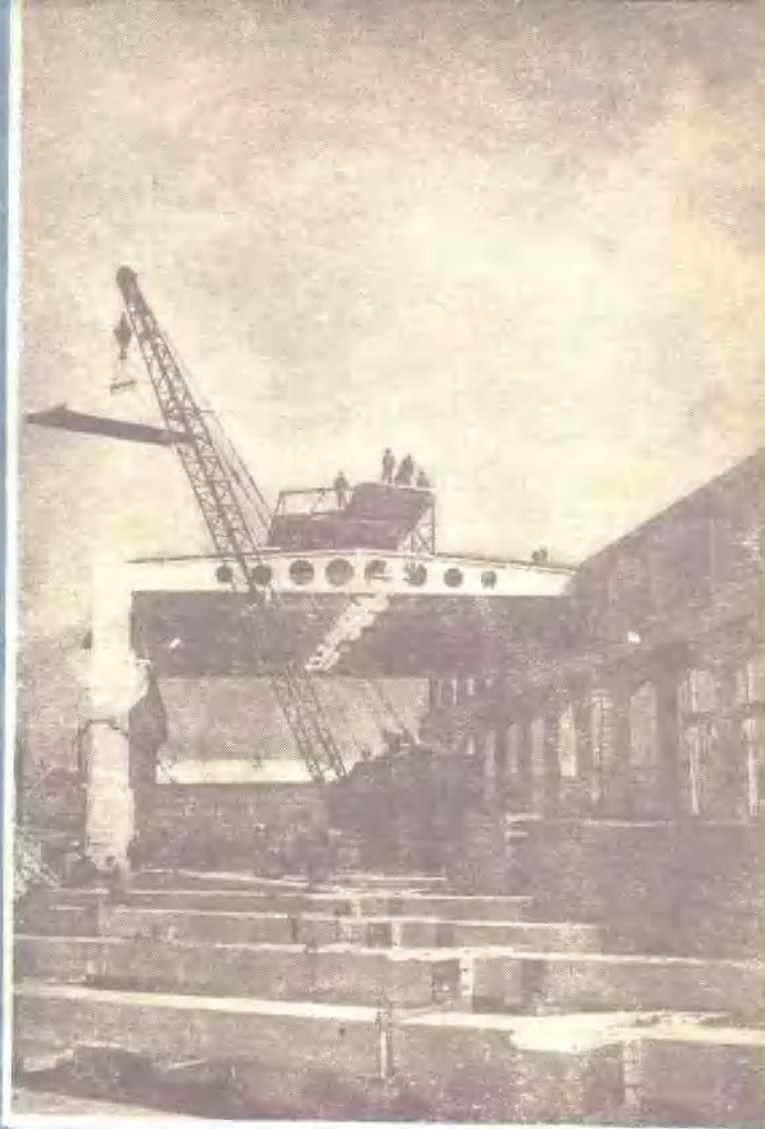




結構



II9

739

建筑设计技术革新資料汇编

建筑設計技術革新資料汇编

第一集（結構）

建筑工程部設計局 編

建筑工程出版社出版

內 容 提 要

本汇编第一集包括空間薄壳結構資料三篇；預应力混凝土結構資料二篇；預制装配式特种結構資料二篇。主要是介紹这些結構的設計理論、計算方法，以及試驗、試制、施工和使用的情况。

本汇编可供設計人員及科学研究工作者参考。

建筑設計技術革新資料汇编

第一集（結構）

建筑工程部設計局 編

1960年5月第1版 1960年5月第1次印刷 7,570册

850×1168 $\frac{1}{32}$ • 150千字 • 印張 5 $\frac{3}{16}$ • 定价 (10) 0.93元

建筑工程出版社印刷厂印刷 新华書店发行 書号: 1871

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业營業許可證出字第052号）

前 言

在党的建設社会主义总路綫的光輝照耀下，1959年我部系統各設計單位在完成国家交給的巨大的設計任务的同时，开展了技术革命和技术革新运动，进行了很多的科学研究工作，解决了生产中的一些复杂問題，使我們的設計水平有很大的提高。在今后的設計工作中我們將繼續大力开展技术革命和技术革新运动。为了及时地介紹各院在技术革命、技术革新以及科学研究工作中的成果，我們决定編輯出版“建筑設計技术革新資料汇编”，以供設計人員参考。各設計單位可結合具体設計任务予以采用。并希将采用时所发现的問題和取得的經驗及时函告我們，以便进一步总结提高。

本汇编分結構、建筑、設備三大部分，按專業不定期地分冊出版。

建筑工程部設計局

1960年1月

目 录

无筋扁壳理論及其应用	中南工业建筑設計院	袁嘯楚 (1)
預应力鋼弦混凝土波浪形薄壳的新計算方法 及其工程实践	西北工业建筑設計院	刘家荣 徐永基 (50)
四十米木網状筒拱設計及試驗总结	浙江工业設計院	(84)
預应力圓形貯水池若干問題的討論	东北工业建筑設計院	徐炳华 (112)
預应力电热混凝土的試驗資料与設計計算	西北工业建筑設計院	張彥鈞 (138)
預制装配式双曲綫型鋼筋混凝土冷却塔設計介紹	东北工业建筑設計院	張夢良 (146)
某鋼管厂框架設計介紹	北京工业建筑設計院	(173)

无筋扁壳理論及其应用

中南工业建筑設計院 袁嘯楚

前 言

最近“建筑科学簡訊”不只一次的报导了关于无筋双曲扁壳的技术情报消息。这种无筋扁壳又名为薄膜結構 (Membrane structure)。它的新的設計概念是匈牙利 J. Pelikan 教授于1957年7月在挪威奥斯陆召开的第二次国际薄壳結構會議上提出的。印度的洛基中央建筑研究院曾做了2米以内的小型自行成型的方形无筋扁壳的試驗，并于1958年8月开始提出一些試驗資料。这种扁壳的計算程序与一般薄壳恰恰相反，是先假定壳体的內力完全符合于理想情况，即是壳体中只存在着相互正交的二个主压內力，而且各点的主压內力均相同，然后再根据假定的理想內力情况反过来推求壳体的曲面方程式，因而毋需进行复杂的应力計算。同时，由于壳体中只存在着均匀的主压內力，而且內力很小，就可以不需要配置受力鋼筋，从而达到大量节约的目的。印度所試制的构件較小，他們采用麻布薄膜，使壳体自行成型的施工方法来进行預制，壳体的曲面坐标也不需要計算。但对于較大的构件來說，用这种施工方法实际上是很困难，甚至是不大可能的。同时从施工技术角度上看，即使是較小的构件，也还存在一些难以控制的因素，因而通常需要計算曲面坐标，用模板或地胎模来进行制作。由于曲面方程式中，包含相当麻烦的无穷級数項，計算曲面坐标就相当复杂。应用本文所提供的簡化計算程序和实用图表，将能使計算工作得到很大程度的簡化。此外，印度只提出矩形底边一种无筋扁壳曲面方程式，实际上无筋扁壳应用在圓形构筑

物上，受力性能更好，節約效果也更大。本文考慮了圓形構築物的結構布置，根據無筋扁壳基本方程式，結合新的邊界條件，補充推導了圓形底邊和扇形底邊兩種新無筋扁壳的曲面方程式，並提出應用有限差分法解任意底邊形狀無筋扁壳曲面坐標的途徑，從而推廣了這種結構的應用範圍。從1959年3月以來，我們已與武漢市幾個施工單位協作進行了一系列的試制和試驗工作，²並且在試點工程中開始應用了這種結構。經驗證明，圓形底邊無筋扁壳受力性能最好，節約價值最大。在同樣情況下，應用圓形無筋扁壳的鋼筋和水泥的消耗量，僅及平板結構的 $1/2 \sim 1/5$ ，其他類型的無筋扁壳，也有一定的實用和經濟價值。此外，物理概念明確、計算簡單、容易掌握，也是這種結構的突出優點。本文只着重介紹理論概念和計算公式圖表。對於具有柔性邊肋的單獨預制的矩形底邊無筋扁壳構件的邊肋的合理計算方法，還是很值得深入研究的問題，在這裡，我們也不揣冒昧，根據初步試驗資料提出一點在計算方面的探討意見，目的在於拋磚引玉，提供大家討論。限于水平，文中難免有不妥或錯誤之處，希望能得到各方面的指正。

一、無筋扁壳理論的基本概念，曲面 微分方程式和邊界條件

一般薄壳結構的計算程序是先確定壳體的曲面方程式，然後通過求解應力微分方程式來計算內力，通常計算過程都是相當複雜的。由於壳體在荷載作用下，不僅產生直接內力，也同時產生剪力、力矩與扭矩等，因而必須配置受力鋼筋。對於一般薄壳結構來說，充分發揮結構材料性能的最理想的內力情況，應該是壳體中不僅只存在着兩向相互正交的主壓內力，而且處處相等，兩向主壓內力恒為一常數。無筋扁壳理論的基本概念，即是假定壳

体内力完全符合于理想情况，然后再推求壳体的曲面方程式，决定壳体的曲面形状。由于无筋扁壳在均匀的垂直荷载作用下，只产生数值很小的均匀的主压内力，因而壳内毋需配置受力钢筋。

图1中 $ABCD$ 为一代表性的双曲壳微分体， $abcd$ 为该微分体的水平投影。 S_x 及 S_y 为直接内力， S_{xy} 为剪力，单位均为公斤/米。正号代表拉力。 N_x 、 N_y 及 N_{xy} 为水平投影面上的对应直接内力与剪力。则：

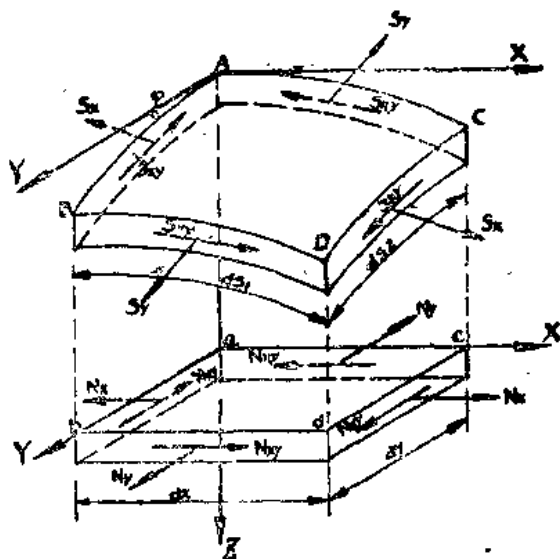


图 1

$$N_x = S_x \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = S_x \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \quad (1a)$$

$$N_y = S_y \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = S_y \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad (1b)$$

$$N_{xy} = S_{xy} \quad (1c)$$

众所周知，具有任意已知曲面的无弯矩薄壳在仅有竖向荷载情况下的平衡方程式可以写为：

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2b)$$

$$N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -W \quad (2c)$$

式中 W 为單位水平射影面积上的垂直荷载。当考虑壳体自重时， $W = \frac{W_z}{\cos \varphi \cos \theta} \sin \omega$ ，其中 W_z 为壳体單位体积重量乘上壳体厚度， ω 为曲面微分体二边綫之間的夹角（詳参考文献 2）。

$$\text{因 } \cos \omega = \sin \varphi \sin \theta$$

$$\sin \omega = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}$$

$$\text{故 } W = W_z \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \theta}$$

$$= W_z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (2d)$$

根据扁壳理論（参考文献 9）， $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ 及 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ 数值极小，一般忽而不計，故（1a）、（1b）及（2d）式变为：

$$S_x \cong N_x \quad (1d)$$

$$S_y \cong N_y \quad (1e)$$

$$W \cong W_z \quad (2e)$$

按上式 W 取 W_z 近似值后，所取荷载会偏小。实用上当曲面最高点及边界各点决定后，曲面形状几乎大体已定，总重可估出，再除以水平射影面积作为 W 进行計算，似较为合理。

无筋扁壳理論是在薄膜理論的基础上发展起来的，根据基本概念，再进一步令：

$$N_{xy} = 0 \quad (3a)$$

$$N_x = N_y = N \quad (3b)$$

以公式(3)代入公式(2)内, 则公式(2a)及(2b)自然满足, 公式(2c)变为:

$$N \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -W$$

即:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{W}{N} \quad (4)$$

公式(4)即是无筋扁壳的曲面微分方程式, 式中 N 实际上是壳的水平投影面上的对应直接内力, 按公式(1c)、(1e)可以近似地视为与壳的内力相同。

曲面微分方程式的边界条件, 在通常情况下是沿壳体周边的竖向坐标 $z=0$ 。不管壳体周边是什么形状, 这个曲面微分方程式和边界条件, 都是适合的。

二、三种常用的无筋扁壳的曲面方程式

1. 圆形底边无筋扁壳的曲面方程式

图2为无筋扁壳的圆形底边, 取坐标原点位于圆的中心, 并假定圆的半径为 r , 则边界条件为:

当 $x^2 + y^2 = r^2$ 时, 曲面竖向坐标 $z=0$ 。

在圆底周边以内, 曲面竖向坐标适合微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{W}{N} \quad (4)$$

令曲面微分方程式(4)的解为:

$$z = C(r^2 - x^2 - y^2) \quad (5)$$

此式符合于边界条件。将公式(5)对 x 及 y 各微分两次, 然后代入公式(4), 则:

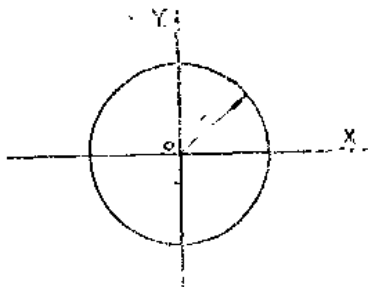


图 2

$$-C(2+2) = -\frac{W}{N} \quad \text{即} \quad C = \frac{1}{4} \cdot \frac{W}{N} \quad (6)$$

以公式(6)代入公式(5), 即得:

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{W}{N} (r^2 - x^2 - y^2) \quad (7)$$

公式(7)即为圆形底边无筋扁壳的曲面方程式, 代入曲面底边周界内各点之 x 及 y 坐标值即可求得相应各点之竖向坐标 z 值, 从而决定壳体的曲面形状。

2. 矩形底边无筋扁壳的曲面方程式

图3为无筋扁壳的矩形底边, 取坐标原点位于矩形中央, 并假定边长分别为 $2a$ 及 $2b$, 则边界条件为:

当 $x = \pm a$ 及 $y = \pm b$ 时, 曲面竖向坐标 $z = 0$ 。

在四周边界以内, 曲面竖向坐标适合微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{W}{N} \quad (4)$$

公式(4)中的 $\frac{W}{N}$ 为一常数, 可以把它展开为富里哀级数形式,

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{W}{N} &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \times \\ &\times (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \end{aligned} \quad (8)$$

代入(4)式即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{4W}{\pi N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \times \\ &\times (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \end{aligned} \quad (9)$$

取公式(9)的一个特解为

$$z_0 = C \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (10)$$

将(10)式分别对 x 及 y 各微分两次, 然后代入(9)式并

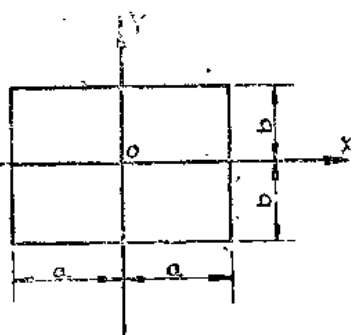


图3

消去 $\cos \frac{n\pi x}{2a}$, 即得:

$$-C \left[\frac{n\pi}{2a} \right]^2 = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\text{即 } C = \frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (11)$$

以公式(11)代入公式(10)即得曲面微分方程式(4)的一个符合 $x = \pm a$ 边界条件的特解为:

$$z_0 = \frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \times$$

$$\times (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (12)$$

再令曲面微分方程式(4)的通解为:

$$z = \frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} +$$

$$+ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_n(y) \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (13)$$

公式(13)已经满足了在 $x = \pm a$ 两边上的边界条件, 式中 $Y_n(y)$ 为待定函数, 根据在 $y = \pm b$ 两边上的边界条件($z=0$)来决定。

将公式(13)分别对 x 及 y 各微分两次, 然后代入公式(9)内, 经过简化后得:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} Y_n \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} = 0 \quad (14)$$

一个富里哀级数为零, 它的每一项系数都等于零, 即:

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} Y_n = 0 \quad (15)$$

公式(15)为一齐次线性常微分方程式, 其特征方程式为

$$D^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} = 0, \text{ 此特征方程式之解为 } D = \pm \frac{n\pi}{2a}, \text{ 由是得知}$$

公式(15)之通解为:

$$Y_n = ae^{-\frac{n\pi}{2a}y} + be^{-\frac{n\pi}{2a}y} = a_n \cos h \frac{n\pi y}{2a} + b_n \sin h \frac{n\pi y}{2a}$$

因为 Y_n 是 y 的偶函数, 故 $b_n=0$, 则公式 (15) 之通解为:

$$Y_n = a_n \cos h \frac{n\pi y}{2a} \quad (16)$$

由是曲面微分方程式 (4) 之通解可改写为:

$$z = \frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos h \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (17)$$

代入边界条件, 当 $y = \pm b$ 时, $z=0$, 则得:

$$\frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos h \frac{n\pi b}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} = 0 \quad (18)$$

$$\text{即 } a_n = -\frac{1}{\cos h \frac{n\pi b}{2a}} \left[\frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \cdot \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] \quad (19)$$

以公式 (19) 代入 (17) 式内, 则得:

$$z = \frac{16a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \left[1 - \frac{\cos h \frac{n\pi y}{2a}}{\cos h \frac{n\pi b}{2a}} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (20)$$

公式 (20) 即为矩形底边无筋扁壳的曲面方程式, 代入曲面边界内各点之 x 及 y 坐标值, 即可求得相应各点之竖向坐标 z 值, 从而决定壳体曲面的形状。

3. 扇形底边无筋扁壳的曲面方程式

图 4 中 $ABCD$ 为无筋扁壳的扇形底边,

当 $\theta = \alpha$ 及 $r = a$ 与 $r = b$ 时, 曲面竖向坐标 $z = 0$ 。

在 $ABCD$ 周界以内, 曲面竖向坐标适合微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{W}{N} \quad (4)$$

为了便于求解起见, 首先要把公式 (4) 改变为极坐标形式。根据直坐标与极坐标的关系:

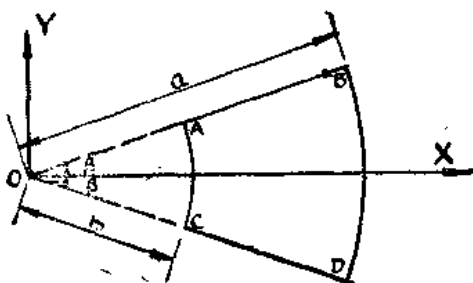


图 4

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{又} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{得} \quad \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \\ \text{又} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \sin \theta \cos \theta +$$

$$+\frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \sin^2 \theta +$$

$$+\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin^2 \theta$$

同理 $-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \sin \theta \cos \theta - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \times$

$$\times \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \cos^2 \theta + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \cos^2 \theta$$

因之得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ (23)

以公式(23)代入公式(4)內, 即得到用极坐标形式表达的无筋扁壳曲面微分方程式为:

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -\frac{W}{N} \quad (24)$$

暂时假定 $\beta = \frac{1}{4} \pi$ 及 $\beta = \frac{3}{4} \pi$, 則公式(24)的一个特解可写为:

$$z_0 = -\frac{r^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} \right) \quad (25)$$

通过直接验证可以得知公式(25)不仅满足微分方程式(24), 也同时满足 $\theta = \pm \beta$ 的边界条件。

通常齐次綫性微分方程式 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$

之通解, 可以表示为: $z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos \alpha \theta$ 或 $z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n} \cos \alpha \theta$ 之形式。

据此, 我們可以令公式(24)之通解为:

$$z = -\frac{r^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n +$$

$$+ B_n r^{-n}] \cos \alpha \theta \quad (26)$$

此式不仅适合公式(24), 亦符合 $\theta = \pm \beta$ 之边界条件。

式中: $\alpha = \frac{2n+1}{2\beta} \pi$; A_n 及 B_n 为待定常数, 可以利用二个圆弧边上的边界条件来决定。

为了便于比较系数起见, 可将公式(26)中的 $\left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta}\right)$ 展开为富里哀级数形式,

$$\begin{aligned} \text{即 } 1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} &= -\frac{64\beta^2}{\pi^3} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \alpha \theta}{(2n+1)(2n+1 + \frac{4\beta}{\pi})(2n+1 - \frac{4\beta}{\pi})} \end{aligned} \quad (27)$$

以(27)式代入(26)式得:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{r^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \cdot \frac{64\beta^2}{\pi^3} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta}{(2n+1)(2n+1 + \frac{4\beta}{\pi})(2n+1 - \frac{4\beta}{\pi})} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^{\alpha} + B_n r^{-\alpha}] \cos \alpha \theta \end{aligned} \quad (28)$$

根据圆弧边界条件, 当 $r = a$ 时, $z = 0$ 。以此代入公式(28)得:

$$\begin{aligned} A_n a^{\alpha} + B_n a^{-\alpha} &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \cdot \frac{64\beta^2}{\pi^3} \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+1 + \frac{4\beta}{\pi})(2n+1 - \frac{4\beta}{\pi})} \end{aligned} \quad (29)$$

当 $r = b$ 时, $z = 0$ 。以此代入公式(28)得:

$$\begin{aligned} A_n b^{\alpha} + B_n b^{-\alpha} &= \frac{b^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \cdot \frac{64\beta^2}{\pi^3} \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+1 + \frac{4\beta}{\pi})(2n+1 - \frac{4\beta}{\pi})} \end{aligned} \quad (30)$$

解联立方程式 (29) 及 (30) 得:

$$A_n = +16 \frac{W}{N} \cdot \frac{\beta^2}{\pi^3} \left(\frac{a^2}{b^a} - \frac{b^2}{a^a} \right) \times \\ \times \frac{(-1)^{n+1}}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{a} \right)^a \right] (2n+1) \left(2n+1 + \frac{4\beta^2}{\pi} \right) \left(2n+1 - \frac{4\beta^2}{\pi} \right)} \quad (31)$$

$$B_n = +16 \frac{W}{N} \cdot \frac{\beta^2}{\pi^3} (b^2 a^a - a^2 b^a) \times \\ \times \frac{(-1)^{n+1}}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{a} \right)^a \right] (2n+1) \left(2n+1 + \frac{4\beta^2}{\pi} \right) \left(2n+1 - \frac{4\beta^2}{\pi} \right)} \quad (32)$$

$$A_n r^a + B_n r^{-a} = +16 \frac{W}{N} \cdot \frac{\beta^2}{\pi^3} \times \\ \times \frac{(-1)^{n+1} \left[a^2 \left(\frac{r}{b} \right)^a - b^2 \left(\frac{r}{a} \right)^a + b^2 \left(\frac{a}{r} \right)^a - a^2 \left(\frac{b}{r} \right)^a \right]}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{a} \right)^a \right] (2n+1) \left(2n+1 + \frac{4\beta^2}{\pi} \right) \left(2n+1 - \frac{4\beta^2}{\pi} \right)} \quad (33)$$

以公式 (33) 代入公式 (28) 内则得:

$$z = -\frac{r^2}{4} \cdot \frac{W}{N} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} \right) + \frac{16\beta^2 a^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{r} \right)^a \right] \cos \alpha \theta}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{a} \right)^a \right] (2n+1) \left(2n+1 + \frac{4\beta^2}{\pi} \right) \left(2n+1 - \frac{4\beta^2}{\pi} \right)} + \\ + \frac{16\beta^2 b^2}{\pi^3} \cdot \frac{W}{N} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^a - \left(\frac{r}{a} \right)^a \right] \cos(\alpha \theta)}{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^a - \left(\frac{b}{a} \right)^a \right] (2n+1) \left(2n+1 + \frac{4\beta^2}{\pi} \right) \left(2n+1 - \frac{4\beta^2}{\pi} \right)} \quad (34)$$

式中: $\alpha = \frac{2n+1}{2\beta} \pi$ 。