

吕洪生 曾新吾 编著

31.8

连续介质力学

动载固体力学与应力波



国防科技大学出版社



连续介质力学

Continuum Mechanics

(下)

动载固体力学与应力波

Dynamical Solid Mechanics and Stress Waves

吕洪生 曾新吾 编著

国防科技大学出版社
长沙

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学. 下册, 动载固体力学与应力波/吕洪生, 曾新吾编著. —长沙: 国防科技大学出版社, 1999. 10

. ISBN 7-81024-593-7

I. 连… II. ①吕…②曾… III. ①连续介质力学②动载荷-固体力学③应力波
IV. O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47857 号

内容简介

本书是《连续介质力学》下册, 介绍动载(爆炸、冲击)作用下固体的动态弹塑性的应变分析、本构关系以及粘弹等力学行为, 并介绍了固体材料在强脉冲载荷作用下的响应的分析手段——应力波理论、流体弹塑性理论与数值计算、有限元法初步等。本书适合于爆炸物理、爆炸力学、爆炸加工、一般力学等专业的本科生、研究生作教材, 并可供相关专业技术人员参考。

国防科技大学出版社出版发行

电话: (0731) 4555681 邮政编码: 410073

E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑: 潘生 责任校对: 黄八一

新华书店总店北京发行所经销

长沙交通学院印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张: 13 字数: 300 千

1999 年 10 月第 1 版第 1 次印刷 印数: 1000 册

*

定价: 20.00 元

序 言

连续介质力学(Continuum Mechanics),从广义上讲,它是以连续介质假设为基础的众多力学学科的总称,例如流体力学、水利力学、气体动力学、弹性力学、塑性力学、爆炸力学等均属于连续介质力学的范畴。它是一般的力学专业、工程力学专业、爆炸力学专业等最重要的共同基础或专业内容。

连续介质力学是经典理论力学的发展。作为力学,它当然是研究连续介质的宏观性状的,即研究物质的宏观机械运动,而不管物质的真实微观结构,尽管物质是由大量的分子组成。因此,连续介质不对物质的真实微观结构作任何探讨,但与物质结构理论并不矛盾,而是相辅相成的。物质结构理论研究的是物质微观情况,即研究物质的特殊结构,而连续介质力学则研究具有不同微观结构物质的共同性状。

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型,并给出各种物质的本构关系的数学表达式,同时在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解。概括起来,它涉及如下基本内容:①变形几何学。研究连续介质变形的几何性质,确定变形所引起物质各部分空间位置和方向的变化,以及各邻近点相互距离的变化,即研究诸如运动、变形、变形梯度、变形张量等。②运动学。主要研究连续介质力学中各种物理量随时间的变化率,这包括速度梯度、变形速率、旋转速率等。③基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程,例如对于热力连续介质力学建立有连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等。④本构关系。⑤特殊理论。例如弹性理论、塑性理论、流体与气体动力学、粘性流体理论等。⑥问题的求解。

连续介质力学分为经典连续介质力学(Classical Continuum Mechanics)和近代连续介质力学(Modern Continuum Mechanics)。

1. 经典连续介质力学。它侧重研究两种典型的理想介质,即线弹性物质和线粘性物质。这两种物质模型能够很好地描述在工程技术上所处理的很多介质的特性,因此经典连续介质理论至今仍被广泛应用并将继续发挥解决实际问题的能力。

2. 近代连续介质力学。它是在二次大战以后发展起来的,它是经典连续介质力学的发展和扩充,具体表现在:①物体不必只看作是质点的集合;它可能是由具有微结构的质点集合体。②运动不必总是光滑的,运动有激波、扩散等。③物体不必只受力的作用,它也可承受体力偶、力偶应力,以及电磁场所引起的效应等。④对本构关系进行更加概括的研究。⑤重点研究非线性问题。

近年来,近代连续介质力学在其深度和广度上都取得了很大进展,并出现了下述三个方向:①按照理性力学(Rational Mechanics)的观点和方法研究连续介质理论,从而发展成理性连续介质力学。②把近代连续介质力学和电子计算机结合起来,从而发展成为计算连续介质力学。③把近代连续介质力学的研究对象扩大,从而发展成为连续系统物理学(Continuum Physics)。

然而,本书“别具一格”、“与众不同”,它既非“经典”,又非“近代”。它介于经典与近代之间,它也不同于现已出版的众多的《连续介质力学》,这些书都是针对具有流体力学和固

体力学基础的读者的高级概论。本书主要是针对爆炸力学和爆炸物理专业的本科生和研究生的,它系统地给出:连续介质力学的数学基础、应力分析、运动与变形、基本物理规律、本构方程、不可压流体力学、气体动力学、爆轰学、爆炸作用、动载固体力学、应力波理论等。总之,它给出了该专业所需要的全部基础内容。所以从本书的结构体系和所述内容来看,它也不同业已出版的针对爆炸物理和爆炸力学专业的力学著作。本书既考虑到该专业的已往基础,又考虑到该学科的最新发展,如增加了动载固体力学、应力波理论和不可压流体力学、本构方程等内容;同时结合大型专题介绍了力学中的三大计算方法(特征法计算、有限差分法和有限元法)。

本书除了适用于本专业的本科生和研究生之外,它还可作为爆炸作用、强冲击载荷、材料动载响应、爆炸加工以及一般的力学专业的本科生、研究生和有关的科技人员的教材或参考书。

本书分成三册,上册为《连续介质力学基础》,其内容包括:序言、张量基础、场论初步、应力分析、运动与流动、守恒规律和本构关系等;中册为《流体力学与爆炸力学》,内容包括:流体力学基本方程组、流体静力学、不可压流动、位势理论与射流、气体动力学方程、冲击波与特征线理论、量纲理论、波的相互作用与具体应用、炸药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用等;下册为《动载固体力学与应力波》,内容包括:应变分析、弹性、塑性、滑移线理论、粘弹、流体弹塑性理论与计算、有限元法、高压本构、应力波理论基础等。

本书是在作者为原电力部工程技术人员编著的《爆炸压接理论基础》的基础之上,以 G. E. Mase 的《Continuum Mechanics》为基本蓝图,并参照有关流体、固体与爆炸等方面的专著,扩充改编而成。由于内容较广、跨度较大,全书约 120 万字;更兼写作匆忙、作者学识有限,所以本书作为初次尝试,难免有缺点与不足,望多指正。

作者 1999 年 9 月

目 录

序 言

第十二章 动载固体力学基础

12.1	位置矢量·位移矢量	(1)
12.2	变形梯度·位移梯度	(3)
12.3	变形张量·有限应变张量	(4)
12.4	小变形理论·无限小应变张量	(6)
12.5	自然应变·自然应变增量	(12)
12.6	主应变·应变不变量·体膨胀系数	(19)
12.7	线性应变的协调方程	(22)
12.8	弹性材料·广义胡克定律·弹性应变能	(23)
12.9	不同对称条件下的弹性常数	(27)
12.10	各向同性介质的弹性常数	(29)
12.11	弹性力学问题·叠加原理·圣维南法则	(33)
12.12	塑性·屈服条件与加载准则	(36)
12.13	塑性变形的微观机制	(41)
12.14	塑性变形的本构关系	(42)
12.15	弹性应变能函数和塑性势函数	(49)
12.16	弹塑性问题·平面问题概念	(51)
12.17	滑移线理论	(53)
12.18	固体在动态高压·较高压下的本构关系·冲击绝热曲线	(60)
12.19	粘弹性本构关系	(66)
12.20	蠕变和松弛现象	(70)
12.21	蠕变函数·松弛函数·遗传积分	(72)
12.22	三维粘弹体对加载的响应	(77)
12.23	粘弹问题·对应法则	(80)
12.24	弹粘塑性本构关系	(83)
12.25	一维弹塑性流动的数学表述与数值计算方案	(86)
12.26	二维弹塑性流动的数学表述与数值计算方案	(97)
12.27	绝热剪切带	(114)
12.28	有限元法初步	(119)
附录 12.1	自然应变分析	(139)

一、自然应变增量张量	(139)
二、自然应变应变率与变形速度张量	(142)
三、自然应变的计算	(144)
附录 12.2 导出柱坐标系中的应变表达式	(146)
附录 12.3 导出柱坐标系中自然应变率的表达式	(149)
附录 12.4 导出柱坐标系中习用应变的表达式	(152)
附表 12.1 简单物质(元素)的物性常数	(152)
附表 12.2 密实介质的雨贡纽参数	(157)
附表 12.3 一些非金属及部分金属和合金的雨贡纽参数	(158)
习题	(160)
参考文献	(162)

第十三章 应力波理论基础

13.1 强脉冲载荷与应力波	(163)
13.2 一维应力的控制方程组	(166)
13.3 一维应力连续波的特征线解	(168)
13.4 半无限长杆中弹塑性加载连续纵波	(170)
13.5 连续波·冲击波	(173)
13.6 冲击波阵面上的守恒条件	(174)
13.7 杆中弹性冲击波的相互作用	(177)
13.8 应力波在自由面反射引起的拉应力与断裂	(180)
13.9 一维应力从塑性态卸载的卸载波	(184)
13.10 杆中弹塑性波的迎面相互作用	(185)
13.11 杆中弹塑性波的追赶卸载	(189)
13.12 几点重要内容的概述	(193)
附表 13.1 压力或应力单位换算表	(198)
习题	(198)
参考文献	(202)

第十二章 动载固体力学基础

爆炸与冲击的直接作用对象不外乎两种——固体和流体(液体与气体)。对于气体与液体的作用,我们已经研究过了;对于固体的作用,有时忽略其剪切变形强度而把固体介质作为可压缩流体,有时又把它作为不可压缩流体或刚体(rigid body),如对爆炸驱动抛体的处理,这要视冲击强度和解决的问题而定。然而,由于实际物体是有强度的,所以研究动载冲击下具有变形强度的固体行为(behaviour),不但实际需要而且意义重大,它关系到爆炸与冲击下材料的变形、破坏的预测与防护问题的解决。

12.1 位置矢量·位移矢量

物体在爆炸与冲击下,不但发生变形,而且发生位移。图 12.1 表示出一个物体在两个时刻的位形(configuration)。

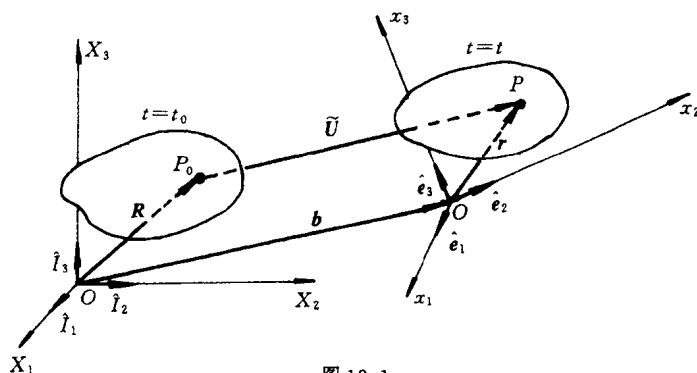


图 12.1

图中取了两个直角笛卡尔坐标系(system of rectangular Cartesian coordinates),其中 $OX_1X_2X_3$ 称作物质坐标系(system of material coordinates),它是用来表述物体在变形开始时刻($t = t_0$)各个质点所处空间位置的,如 P_0 点的初始位置以坐标(X_1, X_2, X_3)来表示, P_0 与原点 O 的有向连线 R 称作初始位置矢量(initial position vector):

$$R = X_1 \hat{i}_1 + X_2 \hat{i}_2 + X_3 \hat{i}_3 = X_K \hat{i}_K \quad (12.1)$$

其中 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ 为沿物质坐标轴向上的单位矢量, (X_1, X_2, X_3) 称作物质坐标,一般以它来标记质点,正如我们在 § 3.1 中所指出那样,除了特别指出,本书将以质点变形前在空间的坐标(X_1, X_2, X_3)来标记质点,有时亦用矢量 R 来代表。

在图中所取的另一坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 称作空间坐标系(system of spatial coordinates),它是用来表述物体在变形开始后的任一时刻($t = t$)各质点所处的空间位置的,如前面所提到的原处于 P_0 点的那个质点现处于 P 点,它在 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系中的坐标为(x_1, x_2, x_3), P 与原点 O 的有向连线 r 称为位置矢量。

$$r = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_k \hat{e}_k \quad (12.2)$$

其中 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 为沿空间坐标轴向的单位矢量, (x_1, x_2, x_3) 称作空间坐标, 以它来标记质点现在($t = t$ 时)所处的空间位置或任一时刻所处的空间位置。

物质坐标系 $OX_1X_2X_3$ 与空间坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 之间的相对方位(relative orientation)由方向余弦(direction cosines) α_{kK} 或 α_{Kk} 来确定, 它为 $\hat{e}_k$ 与 $\hat{I}_K$ 的点积(dot product):

$$\alpha_{kK} = \hat{e}_k \cdot \hat{I}_K = \hat{I}_K \cdot \hat{e}_k = \alpha_{Kk} \quad (12.3)$$

在 α_{kK} 或 α_{Kk} 中出现的下标不是哑标(dummy indices), 而是自由指标(free indices), 因 K 与 k 为大小写而不同。利用式(12.3)所定义的方向余弦, 则可写出

$$\hat{e}_k = \alpha_{kK} \hat{I}_K = \alpha_{Kk} \hat{I}_K \quad (12.4)$$

$$\hat{I}_K = \alpha_{Kk} \hat{e}_k = \alpha_{kK} \hat{e}_k \quad (12.5)$$

由于 $Ox_1x_2x_3$ 和 $OX_1X_2X_3$ 都是正交系(orthogonality system), 所以

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad \hat{I}_P \cdot \hat{I}_Q = \delta_{PQ} \quad (12.6)$$

由(12.4)、(12.5)和(12.6)式则推出

$$\begin{cases} \alpha_{iK} \alpha_{jK} = \alpha_{Ki} \alpha_{Kj} = \delta_{ij} \\ \alpha_{Pk} \alpha_{Qk} = \alpha_{kP} \alpha_{kQ} = \delta_{PQ} \end{cases} \quad (12.7)$$

一个质点在两个时刻所处的空间位置(如点 P_0 和点 P) 的有向连线(如 $\tilde{U}$) 称作位移矢量(displacement vector)。图 12.1 所示的 $\tilde{U}$, 在两个坐标系中分别表成

$$\tilde{U} = \tilde{U}_K \hat{I}_K, \quad \tilde{u} = \tilde{u}_k \hat{e}_k \quad (12.8)$$

即

$$\tilde{U} = \tilde{U}_K \hat{I}_K = \tilde{u}_k \hat{e}_k = \tilde{u} \quad (12.9)$$

$$\tilde{U}_K = \alpha_{kK} \tilde{u}_k \quad (12.10)$$

图 12.1 中的矢量 b 为两个坐标系(物质坐标系和空间坐标系)的原点(origin)之间的有向连线, 根据图示的几何关系则有

$$\tilde{U} = \tilde{u} = b + r - R \quad (12.11)$$

两种重要的特殊情况:

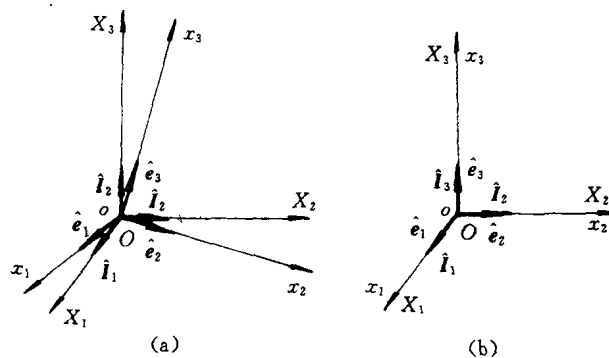


图 12.2

①物质坐标系与空间坐标系的原点重合, 如图 12.2(a)所示, 这时图 12.1 中所示的 $b = 0$, 于是式(12.11)变成

$$\tilde{U} = \tilde{u} = r - R \quad (12.12)$$

即有

$$\tilde{u}_k = x_k - a_{kK} X_K \quad (12.13)$$

②物质坐标系与空间坐标系重合,如图 12.2(b)所示。这是一种最重要的常用的情况,在本书的如下论述中,除非特别需要,将只限于使用这种情况^①。在此情况下

$$\hat{e}_j = \hat{I}_j, \quad \alpha_{jK} = \alpha_{Kj} = \delta_{jk} = \delta_{JK} \quad (12.14)$$

从而式(12.13)变成

$$\tilde{u}_k = x_k - X_k \quad (12.15)$$

12.2 变形梯度·位移梯度

物体在变形过程中,构成物体的各个质点要发生运动;当质点不同、时刻不同,它们各自所处的空间位置亦不同。质点 (X_1, X_2, X_3) 亦以 R 代表,它所处空间位置 r 与时间 t 的关系(即该质点的轨迹)为

$$r = r(R, t), \text{ 或 } x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(R, t) \quad (12.16)$$

其中

$$R = r(R, t_0) = X_i \hat{e}_i \quad (12.17)$$

式中 t_0 为运动开始的时间或某一固定时刻,不过在如下,则取 $t_0 = 0$,即运动变形开始的时刻。而 $\hat{e}$ 即 $\hat{I}$,从此开始将物质坐标系与空间坐标系取在一起且均在直角坐标系中研究问题。

反过来,在任一时刻 t ,在介质(物体)所占空间中的任一点(r)均对应一个确定的质点 R ,即

$$R = R(r, t), \text{ 或 } X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(r, t) \quad (12.18)$$

式(12.18)实际是式(12.16)所示函数的反函数(inverse function),存在的条件是雅可比行列式(Jacobian) J 不为零,即

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0 \quad (12.19)$$

12.2.1 变形梯度(deformation gradient)

对(12.16)式对 X_j 求偏导则给出物质变形张量(material deformation tensor)

$$F = \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial X_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial r}{\partial X_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial r}{\partial X_3} \hat{e}_3 = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (12.20)$$

其中 $\{\partial x_i / \partial X_j\}$ 称作物质变形梯度(material deformation gradient),它的矩阵写法为

$$\mathcal{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

对式(12.18)对 x_j 求偏导则给出空间变形张量(spatial deformation tensor)

$$M = \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial R}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial R}{\partial x_3} \hat{e}_3 = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (12.22)$$

① 同时,在本章以下的研究中均使用直角笛卡尔坐标系(简称直角坐标系)。

* 关于在柱坐标等曲线坐标系的应变、应变率的表达式,请看附录 12.2~12.4。

其中 $\{\partial X_i/\partial X_j\}$ 称作空间变形梯度(spatial deformation gradient), 它的矩阵写法为

$$\mathcal{M} = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial X_1/\partial x_1 & \partial X_1/\partial x_2 & \partial X_1/\partial x_3 \\ \partial X_2/\partial x_1 & \partial X_2/\partial x_2 & \partial X_2/\partial x_3 \\ \partial X_3/\partial x_1 & \partial X_3/\partial x_2 & \partial X_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

根据偏微商的连锁法则(chain rule), 物质变形梯度与空间变形梯度之间满足

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial X_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \quad (12.24)$$

12.2.2 位移梯度(displacement gradient)

据(12.12)式, 位移矢量现写作(从此开始, 位移矢量只用 $\tilde{U}$ 表示)

$$\tilde{U} = \tilde{u}_i \hat{e}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R} = x_i \hat{e}_i - X_i \hat{e}_i \quad (12.25)$$

对于上式对 X_j 求偏导, 则给出物质位移张量(material displacement tensor)

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \hat{e}_i \hat{e}_j = \mathbf{F} - \mathbf{I} \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \end{cases} \quad (12.26)$$

其中 $\{\partial \tilde{u}_i/\partial X_j\}$ 称作物质位移梯度(material displacement gradient), 它的矩阵写法为

$$\mathcal{J} = \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial \tilde{u}_1/\partial X_1 & \partial \tilde{u}_1/\partial X_2 & \partial \tilde{u}_1/\partial X_3 \\ \partial \tilde{u}_2/\partial X_1 & \partial \tilde{u}_2/\partial X_2 & \partial \tilde{u}_2/\partial X_3 \\ \partial \tilde{u}_3/\partial X_1 & \partial \tilde{u}_3/\partial X_2 & \partial \tilde{u}_3/\partial X_3 \end{bmatrix} \quad (12.27)$$

对(12.25)式对 x_i 求偏导, 则给出空间位移张量(spatial displacement tensor)

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j = \mathbf{I} - \mathbf{M} \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \end{cases} \quad (12.28)$$

其中 $\{\partial \tilde{u}_i/\partial x_j\}$ 称作空间位移梯度(spatial displacement gradient), 它的矩阵写法为

$$\mathcal{K} = \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial \tilde{u}_1/\partial x_1 & \partial \tilde{u}_1/\partial x_2 & \partial \tilde{u}_1/\partial x_3 \\ \partial \tilde{u}_2/\partial x_1 & \partial \tilde{u}_2/\partial x_2 & \partial \tilde{u}_2/\partial x_3 \\ \partial \tilde{u}_3/\partial x_1 & \partial \tilde{u}_3/\partial x_2 & \partial \tilde{u}_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

12.3 变形张量·有限应变张量

在物质坐标系与空间坐标系重合的空间里, 给出一个连续介质体(物体)的初始(未变形)与变形后某个时刻 t (由于考虑到物体的动态变化, t 不一定是变形结束时间) 的位形, 如图 12.3 所示。

在变形开始时($t = 0$), 有一质点处在 P_0 , 该点的坐标为 (X_1, X_2, X_3) , 现以这个坐标或者说位置矢量 $\mathbf{R} = X_i \hat{e}_i$ 标记这个质点; 在该点附近有另一质点处在 Q_0 , Q_0 的坐标与矢径(即位置矢量)分别为 $(X_1 + \delta X_1, X_2 + \delta X_2, X_3 + \delta X_3)$ 和 $\mathbf{R} + \delta \mathbf{R}$, 如图所示, 其中 $|\delta \mathbf{R}|$ 为小量, 当然亦以这点的坐标或位置矢量代表该质点。

在变形后的 t 时刻, 原处于 P_0 点的质点移至 P 点 (x_1, x_2, x_3) ; 原处于 Q_0 点的质点移至 Q 点 $(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3)$, 即物质线元 $\delta \mathbf{R} \rightarrow \delta \mathbf{r}$ 。按(12.16)式和(12.18)式, 则有

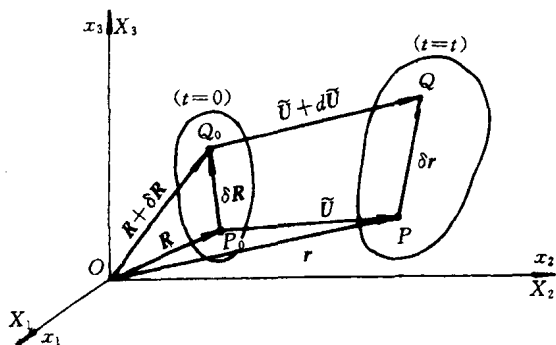


图 12.3

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\delta \mathbf{r} = \delta x_i \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_j} \delta X_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \delta X_j \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} \quad (12.30)$$

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\delta \mathbf{R} = \delta X_i \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_j} \delta x_j = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (12.31)$$

于是有

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{R})^2 &= \delta \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R} = \delta X_k \delta X_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \delta x_i \delta x_j \\ &= C_{ij}^{\nabla} \delta x_i \delta x_j = \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}^{\nabla} \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned} \quad (12.32)$$

其中

$$\mathbf{C}^{\nabla} = \mathbf{M}_c \cdot \mathbf{M}, \quad C_{ij}^{\nabla} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (12.33)$$

二阶张量 $\mathbf{C}^{\nabla}$ 称作哥西变形张量 (Cauchy's deformation tensor)。

据(12.30)式,则有

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{r})^2 &= \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = \delta x_k \delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \delta X_i \delta X_j \\ &= G_{ij} \delta X_i \delta X_j = \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{R} \end{aligned} \quad (12.34)$$

其中

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F}, \quad G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (12.35)$$

二阶张量 $\mathbf{G}$ 称作格林变形张量 (Green's deformation tensor)。

利用如上所述线元变形前后的平方差: $(\delta \mathbf{r})^2 - (\delta \mathbf{R})^2$ 来量度该物质线元的变形, 如果这个差为零, 则称这个线元发生的为刚性位移 (rigid displacement)。由(12.34)和(12.32)式可给出这差的表达式

$$(\delta \mathbf{r})^2 - (\delta \mathbf{R})^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \delta X_i \delta X_j = 2L_{ij} \delta X_i \delta X_j$$

或写成

$$(\delta r)^2 - (\delta R)^2 = \delta R \cdot (\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \delta R = \delta R \cdot 2\mathbf{L}_G \cdot \delta R \quad (12.36)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{L}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{I}) \\ L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}(G_{ij} - \delta_{ij}) \end{cases} \quad (12.37)$$

张量 $\mathbf{L}_G$ 称作拉格朗日(或格林)有限应变张量(Lagrangian (or Green's) finite strain tensor), 它是对称的二阶张量。

由式(12.34)和(12.32)亦可给出线元平方差的另一种表达形式

$$(\delta r)^2 - (\delta R)^2 = (\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}) \delta x_i \delta x_j = 2E_{ij} \delta x_i \delta x_j$$

或写成

$$(\delta r)^2 - (\delta R)^2 = \delta r \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{M}_C \cdot \mathbf{M}) \cdot \delta r = \delta r \cdot 2\mathbf{E}_A \cdot \delta r \quad (12.38)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{M}_C \cdot \mathbf{M}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^\nabla) \\ E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - C_{ij}^\nabla) \end{cases} \quad (12.39)$$

张量 $\mathbf{E}_A$ 称作欧拉(或埃勒曼司)有限应变张量(Eulerian (or Almansi's) finite strain tensor), 它是对称的二阶张量。

拉格朗日和欧拉有限应变张量的特别有用的形式是将它们表成位移梯度的函数。因此, 利用(12.26)式可将(12.37)式改写成

$$\begin{cases} \mathbf{L}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_C + \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{J}) \\ L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_j}\right) \end{cases} \quad (12.40)$$

利用(12.28)式可将(12.39)式改写成

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_C - \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{K}) \\ E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j}\right) \end{cases} \quad (12.41)$$

如上给出有限应变的各种形式。有限应变是用来处理物体变形有限且随时间的变化率不大的力学问题。如果物体变形很小或者是随时间变化很快的大变形, 则用另外形式的应变, 特别是对于动载大变形情况。

12.4 小变形理论·无限小应变张量

在连续介质力学中所谓的小变形理论, 它的基本要求是位移梯度的各分量值远小于“1”, 从而保证是小变形, 这可从将式(12.36)或(12.38)中的应变换成位移后清楚地看出。小变形下的应变称作无限小应变(infinitesimal strain), 通称小应变, 亦称习用应变(conventional strain)。

在小变形的情况下,问题得到很大的简化,不仅应变可表成位移梯度的线性形式,而且在一般情况下可以不必区分空间坐标与物质坐标。导出小应变的表达式有两种方法。

12.4.1 从有限应变出发

在式(12.40)中由于 $\|\partial \tilde{u}_i / \partial X_j\| \ll 1$ (注意,在此为了避免与取行列式值的情况混淆,用“ $\|\quad\|$ ”表示取绝对值),故可从该式中略去二级小量,于是

$$\begin{cases} \mathbf{L}_G \rightarrow \mathbf{L}^\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_C) \\ L_{ij} \rightarrow L_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}) \end{cases} \quad (12.42)$$

同理,在式(12.41)中略去二阶小量后则

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{E}^\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_C) \\ E_{ij} \rightarrow E_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}) \end{cases} \quad (12.43)$$

式(12.42)和(12.43)就是小应变的表达式,它们与位移梯度的关系是线性的。有人将 $\mathbf{L}^\Delta$ 称作拉格朗日线性应变张量, $\mathbf{E}^\Delta$ 称作欧拉线性应变张量。

在导出 $\mathbf{L}^\Delta$ 和 $\mathbf{E}^\Delta$ 的表达式时,使用了 $\partial \tilde{u}_i / \partial X_j$ 和 $\partial \tilde{u}_i / \partial x_j$ 同是小量的假设,其实由前者是小量便可推出后者亦为小量;反之亦然,即在小变形的情况下

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (12.44)$$

从而

$$\mathbf{L}^\Delta \approx \mathbf{E}^\Delta \quad \text{或} \quad L_{ij}^\Delta \approx E_{ij}^\Delta \quad (12.45)$$

故从此开始,对于小应变,本书(第十三章除外)一般不再区分空间坐标与物质坐标、拉格朗日应变与欧拉应变,而统一使用如下符号和表达式表示小应变,即用

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\Delta = E_{ij}^\Delta \hat{e}_i \hat{e}_j = \{E_{ij}^\Delta\} \\ E_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}) \end{cases} \quad (12.46)$$

12.4.2 从最常见的方式出发

为了能从物理上较好地解释小应变的各分量的意义,我们再按最常用的方式导出小应变。在常用的方式中,其坐标、单位矢量和位移分量在直角坐标系中一般采用 (x, y, z) 、 (X, Y, Z) 、 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ 和 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 等符号,对照如上即有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \end{cases} \begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{i} \\ \hat{e}_2 = \hat{j} \\ \hat{e}_3 = \hat{k} \end{cases} \begin{cases} \tilde{u}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{u}_2 = \tilde{v} \\ \tilde{u}_3 = \tilde{w} \end{cases} \quad (12.47)$$

根据质点轨迹与位移的关系并参见图 12.3,则有

$$\mathbf{r} - \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{U}} \quad (12.48)$$

$$\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{R} = d\tilde{\mathbf{U}} = d\tilde{u}\hat{i} + d\tilde{v}\hat{j} + d\tilde{w}\hat{k} \quad (12.49)$$

两质点的位移差 $d\tilde{\mathbf{U}}$ 是由于 $\delta \mathbf{R}$ 的伸长(或压缩)和旋转所致,图 12.4 表示出矢量 $\delta \mathbf{r}$ 和 $\delta \mathbf{R}$ (在图 12.4 中是将 $\delta \mathbf{R}$ 和 $\delta \mathbf{r}$ 作为自由矢量,把二者的尾端放在一起)。由于为小变形,所

以 $d\tilde{u}, d\tilde{v}, d\tilde{w}$ 为比 $\delta X, \delta Y, \delta Z$ 更小一阶的量, 作为一级近似, 它们可取成

$$\begin{cases} d\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \delta X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \delta Z \\ d\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \delta X + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \delta Z \\ d\tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} \delta X + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \delta Z \end{cases} \quad (12.50)$$

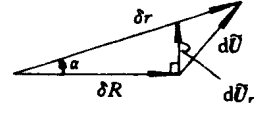


图 12.4

式中 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}, \dots$ 等偏导数均在点 (X, Y, Z) 处点取值。将 $d\tilde{U}$ 按张量写法, 表成

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{R} \\ &= J_{1j} \delta X_j \hat{i} + J_{2j} \delta X_j \hat{j} + J_{3j} \delta X_j \hat{k} \end{aligned} \quad (12.51)$$

其中

$$\mathbf{J} = \{J_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (12.52)$$

将张量 $\mathbf{J}$ 作和分解

$$\mathbf{J} = \mathbf{E}^\Delta + \mathbf{H} \quad (12.53)$$

其中对称张量:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\Delta &= \{E_{ij}^\Delta\} = \left\{ \frac{1}{2} (J_{ij} + J_{ji}) \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \right) & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.54.1)$$

$$\text{即:} \quad E_{ij}^\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad (12.54.2)$$

$$\text{在上式中} \quad \begin{cases} \tilde{u}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{u}_2 = \tilde{v} \\ \tilde{u}_3 = \tilde{w} \end{cases}, \quad \begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \end{cases}, \quad \text{如 } \tilde{u}_{1,2} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial X_2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}.$$

反对称张量:

$$\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \left\{ \frac{1}{2} (J_{ij} - J_{ji}) \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (12.55)$$

令：
其中

$$\alpha = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k} \quad (12.56)$$

$$\begin{cases} \alpha_x = \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \right) = h_{32} = -h_{23} \\ \alpha_y = \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} \right) = h_{13} = -h_{31} \\ \alpha_z = \alpha_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = h_{21} = -h_{12} \end{cases} \quad (12.57)$$

则有

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{R} = \alpha \times \delta \mathbf{R} = d\tilde{\mathbf{U}}, \quad (12.58)$$

矢量 $d\tilde{\mathbf{U}} = \alpha \times \delta \mathbf{R}$ 垂直 $\delta \mathbf{R}$, 见图 12.4, $d\tilde{\mathbf{U}}$ 为 $\delta \mathbf{R}$ 作为刚体的旋转矢量, α 为旋转角度。

利用以上结果, 式(12.51)可表成

$$d\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E}^\Delta \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{R} = \mathbf{E}^\Delta \cdot \delta \mathbf{R} + \alpha \times \delta \mathbf{R} = \mathbf{E}^\Delta \cdot \delta \mathbf{R} + d\tilde{\mathbf{U}}, \quad (12.59)$$

因 $d\tilde{\mathbf{U}}$ 为 $\delta \mathbf{R}$ 作为刚体旋转的位移矢量, 所以 $d\tilde{\mathbf{U}} - d\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E}^\Delta \cdot \delta \mathbf{R}$ 为 $\delta \mathbf{R}$ 的“纯变形”矢量, 即 $\mathbf{E}^\Delta \cdot \delta \mathbf{R}$ 可以看作 $\delta \mathbf{R}$ 的“纯伸长或缩短”。

$\mathbf{E}^\Delta$ 称作应变张量, 它是对称的 $E_{ij}^\Delta = E_{ji}^\Delta$. 它的主对角线上的分量 $E_{11}^\Delta = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial(x-X)}{\partial X}$, $E_{22}^\Delta = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = \frac{\partial(y-Y)}{\partial Y}$, $E_{33}^\Delta = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} = \frac{\partial(z-Z)}{\partial Z}$ 分别表示在 x, y, z 轴向的线元 $\delta X, \delta Y, \delta Z$ 的相对伸长(或压缩); $E_{12}^\Delta = E_{21}^\Delta$, $E_{13}^\Delta = E_{31}^\Delta$, $E_{23}^\Delta = E_{32}^\Delta$ 为切应变分量, 它们分别表示微元 δX 和 δY , δX 和 δZ , δY 和 δZ 的夹角改变量的一半。(详细解释, 见 12.4.3 段)

注意, 如上所述的应变张量与固体静力学所用的张量之区别在于, E_{ij}^Δ 不但随质点变化, 而且随时间变化, $E_{ij}^\Delta = E_{ij}^\Delta(X, Y, Z, t)$ 。

12.4.3 解释 $d\tilde{\mathbf{U}}$ 为何表示线元作刚性旋转

按(12.49)式, 则有

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \delta \mathbf{R} + d\tilde{\mathbf{U}} \\ &= (\delta X + d\tilde{u})\hat{i} + (\delta Y + d\tilde{v})\hat{j} + (\delta Z + d\tilde{w})\hat{k} \\ (\delta r)^2 &= (\delta X + d\tilde{u})^2 + (\delta Y + d\tilde{v})^2 + (\delta Z + d\tilde{w})^2 \end{aligned} \quad (12.60)$$

由于现在研究的是小变形, 故: $|\delta X| \gg |d\tilde{u}|$, $|\delta Y| \gg |d\tilde{v}|$, $|\delta Z| \gg |d\tilde{w}|$, 于是在上式中略去二级小量后则成为

$$(\delta r)^2 = (\delta R)^2 + 2(d\tilde{u}\delta X + d\tilde{v}\delta Y + d\tilde{w}\delta Z) \quad (12.61)$$

如若线元 $\delta \mathbf{R} \rightarrow \delta \mathbf{r}$ 只发生了刚性旋转(rigid rotation), 则 $(\delta r)^2 - (\delta R)^2 \equiv 0$, 于是由上式推出

$$d\tilde{u}\delta X + d\tilde{v}\delta Y + d\tilde{w}\delta Z \equiv 0$$

利用(12.51)式,可将上式化成

$$J_{11}(\delta X)^2 + J_{22}(\delta Y)^2 + J_{33}(\delta Z)^2 + (J_{12} + J_{21})\delta X\delta Y + (J_{13} + J_{31})\delta X\delta Z + (J_{23} + J_{32})\delta Y\delta Z \equiv 0 \quad (12.62)$$

由于 δR 是任取的,即 $\delta X, \delta Y, \delta Z$ 是任取的,要保证如上恒等式成立,则 $\delta X, \delta Y, \delta Z$ 之前的各系数必须为零,即有

$$\begin{cases} J_{11} = J_{22} = J_{33} = 0 \\ J_{12} + J_{21} = 0, \quad J_{13} + J_{31} = 0, \quad J_{23} + J_{32} = 0 \end{cases} \quad (12.63)$$

根据 E^Δ 的定义式(12.54),则由上式推出

$$E_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}(J_{ij} + J_{ji}) = 0 \quad \text{或} \quad E^\Delta = 0 \quad (12.64)$$

于是由式(12.49)、(12.51)、(12.53)以及上式推出

$$\delta r - \delta R = J \cdot \delta R = H \cdot \delta R = d\tilde{U}, \quad (12.65)$$

从而说明 $d\tilde{U}$ 表示线元 δR 作刚性旋转的位移矢量。当然 $E^\Delta \cdot \delta R$ 则表示线元 δR 的“纯变形”的矢量。

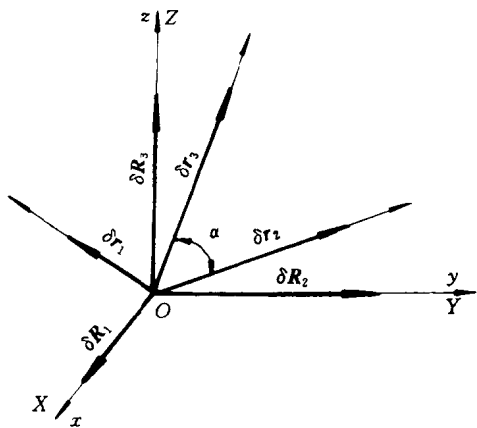


图 12.5

12.4.4 关于 E^Δ 各分量的物理意义

设在变形开始时有一物质线元 δR

$$\delta R = \delta R_1 + \delta R_2 + \delta R_3$$

其中

$$\delta R_1 = \delta X \hat{i}, \quad \delta R_2 = \delta Y \hat{j}, \quad \delta R_3 = \delta Z \hat{k}$$

变形后 $\delta R \rightarrow \delta r$, 即

$$\delta R_1 \rightarrow \delta r_1, \quad \delta R_2 \rightarrow \delta r_2, \quad \delta R_3 \rightarrow \delta r_3$$

在图 12.5 中表示出 δR 与 δr 的各分矢量,但没有画出 δR 和 δr 的本身。

按(12.49)式则有

$$\begin{aligned} \delta r_1 - \delta R_1 &= (d\tilde{u})_1 \hat{i} + (d\tilde{v})_1 \hat{j} + (d\tilde{w})_1 \hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \delta X\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \delta X\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} \delta X\right) \hat{k} \end{aligned} \quad (12.66)$$