

粘弹性理论

周光泉 刘孝敏 编著



中国科学技术大学出版社

粘 弹 性 理 论

周光泉 刘孝敏 编著

中国科学技术大学出版社

1996·合肥

图书在版编目(CIP)数据

粘弹性理论/周光泉 等编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,

1996年12月

ISBN 7-312-00851-8

I 粘弹性理论

II 周光泉 等编著

III ① 线性弹性力学 ② 粘性介质 ③ 非线性理论

IV O

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm/32 印张:7.625 插页:1 字数:195千

1996年12月第1版 1996年12月第1次印刷

印数:1—1500册

ISBN 7-312-00851-8/O·183 定价:15.00元

出版者的话

(1996年10月20日)

“粘弹性理论”是在力学和材料科学之间发展起来的边缘科学,是连续介质力学的一个重要组成部分。它以具有固体性质的同时又表现出某些流体特征的粘弹性材料(如聚合物材料、地质材料、混凝土、高温下的金属、生物材料等)为研究对象。因此,开展粘弹性理论的研究,对于科学技术研究工作和工业的发展都具有重大的现实意义。

“粘弹性理论”作为一门独立的材料力学行为方面的课程,在中国科学技术大学力学系作为高年级本科生和部分研究生课程已开设14年了。在此期间,编著者曾编印过两次讲义。使用过讲义的师生在对其教学内容给予充分肯定的同时,也提出了许多建设性的建议。本书就是编著者在原讲义的基础上,参照中外有关的文献编写而成的。

本书以介绍粘弹性的基本概念和基本原理为主,同时结合典型的工程问题介绍处理粘弹性问题的方法。本书的重点是讲解线性粘弹性理论,同时介绍了非线性理论和热粘弹性理论。在论述的过程中,还介绍了他们在粘弹性动态响应特性(包括动态材料参数与静态材料参数的转换关系)以及应力波方面的研究成果。

全书分为两大部分,共8章。第一部分包括前6章,着重介绍线性粘弹性理论的基本概念和基本原理。其中:第1章为绪论,第2~4章介绍一维线性粘弹性的力学模型和本构关系;第5章将上述的一维本构关系推广到三维,继而介绍线性粘弹性等温边界值问题的基本方程,然后介绍分析处理线性粘弹性问题的具体方法和技巧;第6章介绍线性粘弹性介质中应力波理论的基本概念和

基本原理。第二部分包括后两章,分别介绍非线性粘弹性理论和热粘弹性理论。

正当编著者整理书稿之际,本书的第一作者周光泉先生于1995年8月23日不幸与世长辞了。本书为周光泉先生生前与刘孝敏同志的合作作品。周光泉先生去世后,尔后的整理工作只能由刘孝敏同志独自承担了。周光泉先生,1939年7月21日生于四川省射洪县武安乡,1963年毕业于中国科学技术大学近代力学系,毕业后留校任教。历任中国科学技术大学近代力学系党总支副书记、系常务副主任、中国科学技术大学合肥研究生院副院长、中国工程爆破协会常务理事、中国力学学会理事、中国力学学会爆炸力学专业委员会副主任、《爆炸与冲击》副主编、中国国家安全委员会委员等职。周光泉先生曾赴美国、日本、英国和我国香港地区作访问学者或从事合作研究;1989年被晋升为教授,1993年任博士生导师。我社决定出版《粘弹性理论》一书,旨在推动我国粘弹性理论的发展,并借此向周光泉先生表示追念。

本书可作为高校力学专业高年级本科生或研究生教材,也可作为从事流变力学、聚合物科学、岩石地质力学、生物力学和建筑材料科学的科学技术工作者参考。

本书稿付排之前,曾承蒙暨南大学校长刘人怀教授认真审阅,谨此表示深切的谢意。

目 次

出版者的话.....	1
------------	---

第一部分 线性粘弹性理论

1 绪 论	3
1.1 何谓粘弹性理论	3
1.2 粘弹性理论研究的背景和意义	6
2 粘弹性模型	8
2.1 基本元件:弹簧、阻尼器和滑块	8
2.2 Maxwell 流体和 Kelvin 固体	10
2.3 单位阶跃函数,狄拉克函数,拉普拉斯变换	15
2.4 标准线性固体	20
2.5 更普遍的线性粘弹性模型的组成及其性质	23
3 遗传积分	36
3.1 响应函数:蠕变柔量和松弛模量	36
3.2 各种流变模型的松弛模量和蠕变柔量	38
3.3 卷积和 Stieltjes 卷积	44
3.3.1 卷 积	44
3.3.2 Stieltjes 卷积	45
3.4 Boltzmann 线性叠加原理和遗传积分	46
3.5 积分方程	53

4	线性粘弹性材料在振动中的力学行为和力学性质的 温度依赖关系	55
4.1	复模量和复柔量,复数型本构关系	55
4.2	耗散能	59
4.3	典型材料的力学行为	62
4.4	复模量与应力松弛量之间的关系和复柔量与蠕变 柔量之间的关系	64
4.5	简单弹簧-质量块系统的振动	71
4.6	强迫振动	73
4.7	高聚物的力学状态和时温等效原理	75
4.7.1	高聚物的力学状态	75
4.7.2	非晶态高聚物玻璃化转变粘弹性行为的时温等效 关系和 WLF 方程	79
4.7.3	WLF 方程的理论解释	82
5	三维本构关系和粘弹性问题	85
5.1	三维本构关系	85
5.2	线性粘弹性理论的基本方程及对应原理	92
5.3	对应原理的应用	97
5.3.1	厚壁筒问题的粘弹性解	97
5.3.2	柱体单向拉伸问题	103
5.3.3	地心引力引起的地壳应力的讨论	105
5.4	分离变量法	110
5.4.1	第一类问题(应力边界问题)	112
5.4.2	第二类问题(位移边界问题)	114
5.5	稳定的简谐振动	116
5.5.1	三维复数型本构关系和复数模量置换方法	116
5.5.2	圆柱管在稳态简谐条件下的扭振问题	118
5.6	圆柱加压	121

5.6.1	不可压缩粘弹性圆柱管的动态响应问题	121
5.6.2	可压缩粘弹性圆柱管的准静态响应	128
5.7	自由振动	133
6	粘弹性介质中波的传播	139
6.1	杆中纵波的运动微分方程	139
6.2	强间断波在半无限长线性粘弹性杆中的传播	141
6.2.1	波阵面	141
6.2.2	应力场和速度场	146
6.3	简谐扰动在半无限长杆中传播	152
6.4	无限粘弹性介质中波的传播	157
6.4.1	粘弹体三维运动方程	157
6.4.2	简谐波问题的对应原理	161
6.4.3	无体力情形下,无限粘弹性介质中的平面 简谐波	164
6.4.4	Rayleigh 表面波	166

第二部分 非线性粘弹性理论和热粘弹性理论

7	非线性粘弹性理论	179
7.1	一维非线性粘弹性本构理论	180
7.1.1	Boltzmann 叠加原理的经验扩展	180
7.1.2	一维本构关系的多重积分表达式	183
7.1.3	非线性粘弹性本构关系的 Schapery 表达式	193
7.1.4	微分型本构关系和复数型本构关系	195
7.2	三维非线性粘弹性本构理论	198
7.2.1	变形的描述	198
7.2.2	应 力	204
7.2.3	本构方程原理和简单物质本构方程的多重积分 表达式	205

7.2.4	单积分形式的三维本构关系	210
8	热粘弹性理论	214
8.1	热粘弹性材料的本构关系	216
8.1.1	热粘弹性材料	216
8.1.2	热粘弹性材料本构关系的推导	216
8.2	热粘弹性材料的能量守恒方程	226
8.3	热粘弹性边界值问题的基本方程	227
8.4	热流变简单材料的本构关系	231
	参考文献	234

第一部分

线性粘弹性理论

1 绪 论

1.1 何谓粘弹性理论

连续介质力学需要处理三种不同类型的物理量:应力,应变和位移。

应力描述了作用于物体内部的力。通常被定义为无限小微元的每单位面积上的力或力的分量。然而,板中的弯矩和扭矩,壳中的薄膜力,梁中的弯矩和剪力,轴中的扭矩也是属于这一类型的量,可以称之为广义应力。所有这些量描写了从微元的一边传递到另一边的力或力矩,它们成对出现,大小相等而方向相反。

应变描写了局部变形,例如线段长度的增加除以它的原始长度(正应变)或两线段间夹角的减小(剪应变)。此外还有一些关于应变的更复杂的定义,例如由线段平方的变化导出的张量应变,或者对数应变。另外,弯曲的梁或板的曲率以及轴的扭转也同样是属于应变变量。因为它们描写了与外部坐标系无关的形状的局部改变。

位移描写了变形过程中点和线段的运动,其参考坐标系取在变形体之外。弹性理论中的 u 、 v 、 w ,梁或板的挠度是线位移;梁的微元的转动是角位移。应力,应变和位移由三种类型的表征自然规律的方程相联系,这就是:

一、平衡条件或运动方程

平衡条件表征了应力分量及其空间导数之间的关系,它们通常是相对于无限小体积微元(偶尔也相对于有限体元)而写出的。在方程右边可以包含一个加载量。在线性问题中这些方程不包含应变或位移;而在非线性问题中则常常包含这些量。在动力学问题中,平衡方程被运动方程所取代,其中包含了位移的二阶时间

导数。

二、运动学关系

因为当每一点的位移为已知时物体的变形就完全已知,因此由位移计算应变必定是可能的。用位移表示应变的这些方程称作运动学关系,这便是我们需要的第二组方程。对于每一个应变分量有一个这样的方程。

依赖于不同的问题,可能有多于位移分量的运动学关系,在此情况下,可以消去这些方程中的位移而使方程的数目减少,在剩下的这些方程中仅仅包含应变,这些方程称作协调方程。因为它们可以由更基础的方程组表示,因此可以不作为基本方程的组成部分。

三、本构方程

无论平衡条件还是运动学关系均与构成物体的特定材料无关。这种材料性质的影响由第三组方程,即本构方程所表述。它们描写了应力和应变之间的关系。在最简单的情况下它们是用应力表示应变或用应变表示应力分量的六个代数方程式,如果这些关系式是线弹性的,则称之为虎克定律。

实际材料显示了各种不同的性质。几种理想化的材料模型已被构作出来,用以代表材料性质的不同侧面。对于弹性材料,应力和应变之间有着一一对应关系。许多材料在一定变形条件下则显示了塑性流动现象,其定义可具体表述如下:

- 1) 在达到屈服限以前,亦即应力分量的某一函数达到某一确定值以前,材料是弹性的;
- 2) 屈服之后在应力不增加情况下仍可能产生额外的应变;
- 3) 这个额外应变是永久性的,也就是在应力卸除后,仍能保留下来;
- 4) 应变的时间导数(应变率)在方程中不出现。

但是,人们发现有些材料对应变率非常敏感,即表现出明显的粘性性质。这类材料受力后的变形过程是一个随时间而变化的过程,卸载后的恢复过程又是一个延迟过程,因此,这类材料内的应

力不仅与当时的应变有关,而且与应变的全部变化历史有关。这时应力应变之间的一一对应关系已不复存在。我们把这类材料称为粘弹性材料。高分子材料、复合材料、地质材料、混凝土、高温下的金属即属于这种类型的材料。

粘弹性材料随时间而变化的变形过程,表现出下列四个主要特点:

- 1) 蠕变:在持续不变的加载下变形会逐渐增加;
- 2) 应力松弛:在持续不变的应变下应力会逐渐减弱;
- 3) 迟滞:材料的应变响应滞后于应力,致使一个加卸载过程中的应力应变曲线形成迟滞回线,迟滞回线下的面积代表一个加卸载过程的能量损失;

4) 应变率敏感:反映材料力学性质的一些物理量,如杨氏模量、剪切模量、泊松比等,一般与应变速率(或时间)有关。

粘弹性材料可以想像为一个“谱”,在这个“谱”的最右端是经典粘性流体,而在最左端是弹性固体。许多实际材料则展示出介于弹性和粘性两种极端情况之间的力学性质,这种粘弹性性质可以由弹性性质和粘性性质按某种相对比例组合出来。在一般情况下固体高聚物(如尼龙、刚化聚苯乙烯、塑料等)以及金属、橡胶等接近弹性端,而粘弹性流体(如高分子溶液)则靠近粘性端,熔融的高分子材料其性质似乎处于中间位置。任何一种具体材料到底处于粘弹性材料“谱”的何种位置除依赖于材料本身条件外还依赖于工作条件,如温度、加载速率等。钢材在一般条件下是固体,但在高速撞击下与流体无异。Silly putty(一种类似橡皮泥的材料)在通常情况下可塑性很大,但在快速落地时可以像皮球一样弹回。

粘弹性一词来源于模型理论,即这种性质可以用弹性元件和粘性元件串联或并联所组合而成的某种模型加以表示,如Maxwell模型,Kelvin-Voigt模型,标准线性体模型等。在不同场合,不同书刊中我们还常常接触到一系列相关而不尽相同的名词,如蠕变,松弛,粘性,阻尼,内摩擦,滞弹性或弹性后效等等,这统统

称之为材料的粘弹性性质或流变性质。

粘弹性理论是流变力学的重要内容,是从事现代材料科学研究的必备基础之一。在本教材中我们将着重介绍粘弹性材料的微分型本构关系,积分型本构关系以及复数型本构关系,以此为基础我们将讨论这些本构关系在三维情况下的推广,为了实用的目的我们还将介绍一些典型的粘弹性工程问题以及应力波在粘弹性介质中传播问题的具体处理方法。

阅读本书要求具备一定的基础,即熟悉力学的基本概念,包括二维条件下的应力、应变;熟悉由无限小微元的力学考虑推导微分方程的技巧。在数学方面,则要求事先熟悉微积分知识,以及对复变函数和线性常微分方程的初步了解;在本教材的许多地方还将用到更高级的数学工具,如卷积,拉普拉斯变换,积分方程,偏微分方程等,当然只要需要,在用到时还会给予较详细的解释。

1.2 粘弹性理论研究的背景和意义

随着现代新材料、新结构的应用,使得历来在经典材料力学、流体力学中所不考虑的物质性质,尤其是材料的粘弹性性质受到越来越大的重视,而且已经得到一些数学公式并被用于实际问题。随着生产的发展,工程实践的广度和深度的不断加强,我们常常会遇到处理结构材料在极端条件(高温、高压、高速)下工作的力学问题,例如某些结构和装置发生的严重脆断、倒塌事故的分析等等。但是请注意这些事故不是发生在加载瞬时,而是在经历了一段时间后突然发生的(与材料的蠕变特性有关),我们称之为“延迟断裂”,正因为其“延迟性”和“突发性”的特点,有如疲劳破坏一样,使人们很难预防。蠕变和松弛现象有时也使某些结构和装置不能正常工作。因此研究材料的“时间效应”,尤其是高温蠕变特性、粘弹性断裂理论便成为航空、宇航工程、造船工业和其他一些工程中所十分关注的问题。

古希腊哲学家 Heraclit 曾提出过“一切皆流,一切皆变”的观点,即任何物体和材料皆具流变特性。在常温、小变形情况下,多数金属为线弹性体,但即使在这种情况下,乐器的金属簧片的振动甚至在真空中也会很快衰减,说明材料并非完全 Hooke 体,材料内部存在粘滞阻力(内摩擦)。真实材料或多或少存在“蠕变”、“松弛”、“迟滞”等现象,只不过有的表现很很明显,有的在一定条件下却不甚明显,可以不加考虑,因而给人们带来一种偏见,似乎认为固体与流体的区别就在于固体有一定形状,不随时间而改变。其实固体的这种属性不是绝对的,这只是一定条件下的一种近似而已。任何固体都具有一定的流动性,例如大地在缓慢地流动,比萨斜塔斜度在逐渐增加,古老教堂的大窗玻璃变得上薄而下厚,等等。反之,流体也都具有一定的粘滞性(不流动性),如石油在管道中的流动,血液流动等都受到一定的粘滞阻力。因此材料流变特性或粘弹性特性的研究具有普遍的意义。

粘弹性理论重新受到重视一个很重要的原因是高聚物材料和复合材料等新型材料的不断出现。有人统计,目前世界上聚合物材料的产量在体积上已超过金属材料。在对这些材料的力学性能能进行的研究中,粘弹性理论起着特殊重要的作用。其次,岩土力学,地质力学,地震预报,生物力学等的蓬勃发展也给予粘弹性理论以新的极大刺激和推动。可以预期粘弹性理论的研究将在材料科学的发展以及国防、土建等工程中发挥越来越大的作用。

2 粘弹性模型

在单轴应力下粘弹性材料的性质十分类似于由弹性元件和粘性元件按一定规则构成的模型所具有的性质。下面我们将讨论如何应用这样的一些模型来描述粘弹性材料以及如何建立微分型本构方程等问题。

2.1 基本元件：弹簧、阻尼器和滑块

一、理想弹性元件

让我们来考察螺旋形弹簧(图 2.1), 当某一个力 P 作用到弹簧上时, 弹簧的长度伸长一定的量 u , 而当这个力移去的时候, 弹簧就回复到原来的长度。同样的现象在弹性杆的拉伸试验中也可以观察得到(图 2.2)。在这种情况下我们宁可用应力 σ 和应变 ϵ 的说法, 因为这样可以我们的讨论中把杆的长度和横截面积的特定值去掉, 从而使讨论更具普遍性。

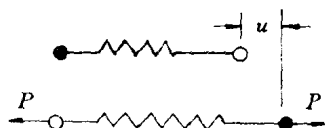


图 2.1 螺旋形弹簧

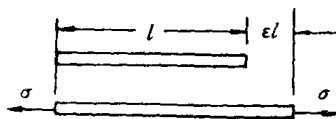


图 2.2 弹性杆

如果材料是线弹性的, 则有如下关系:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.1)$$

这就是著名的 Hooke 定律, 其中 E 是杨氏模量。