云南大学丛书编辑委员会　主编

欧拉—泊松—达布方程

杨光俊　编著

云南教育出版社

封面设计：李泽衡

云南大学丛书编辑委员会主编

欧拉—泊松—达布方程

杨光俊 著

*

云南教育出版社出版

（昆明市书林街100号）

云南新华印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32　印张：15.75　字数：375,000

1989年5月第1版　　1989年5月第1次印刷

印数：1—2,200

ISBN 7-5415-0214-6/G·196　　定价：5.95 元

出版说明

这是云南大学丛书的一种。

云南大学建校六十余年，学科门类比较齐全，各门学科的专家比较集中，拥有众多的教师和研究生，具有良好的学术和信息交流环境，一些学科已在国内外形成了自己的特色。为提高教育质量和全民族的科学文化水平，促进国际学术交流，增强各门学科主动适应经济建设、社会发展需要的活力，为加速实现社会主义四个现代化服务，我们选编了这套丛书。

本丛书的选编分哲学社会科学和自然科学两类，既重视传统学科，又突出具有特色的新兴学科和边缘学科。

本丛书的性质为学术性专著，以反映我校基础理论研究和具有学术理论价值的应用研究和开发性研究的成果。

本丛书不定期出版，可供高等院校师生、科学和技术工作者、中等学校教师以及有关从事学术和科技工作的读者阅读。

鉴于编者水平的限制，本书的缺点、错误在所难免，请批评指正。

云南大学丛书编辑委员会

一九八六年四月七日

序

早期对超双曲方程的探索，稍后对混合型方程的研究都涉及到EPD方程。远在黎曼解 Laplace 双曲方程时创造黎曼方法，但对黎曼函数的存在性并未证明。达布用长函数法证明了这个存在性。这个证明归结为EPD方程解的存在性的证明，从而得到了所谓的泊松公式的证明。达布并认为这个方程是二阶线性方程的代表，它反映了这一大类方程解的许多性质。Le-Roux接着在他的博士论文中进一步深入探讨了这个方程，可惜后继者很少，并且重要的是没有能把探索的范围扩大到高维。

我国学者进一步认识这个方程事实上类似于常微分方程Fuchs理论，从而提出要把常微分方程的Fuchs理论推广到偏微分方程。国内有许多青年学者在这方面做出了工作，这里先后就有王光寅、齐民友、杨光俊等同志。杨光俊同志把多年教学和科研的结果，系统地写了这本书，内容充实、文笔流畅，一定会对线性偏微分方程定性研究起很好的作用。这个理论也是我国学者首先提出的。中间也包括线性偏微分方程的Fuchs的理论。

Hadamard的基本理论事实上是以特征角面为奇性的Fuchs理论，可惜没有考虑到方程式系数的奇性与解的奇性的关系。那末究竟如何使基本解能够反映出系数的奇性与解的奇性的关系呢？我们认为似应从特征角面的奇性入手。邱佩璋、陈立诚、栾文贵的结果[128] 可以增强我们信心，这就是说这本书将大有发展余地。特此为序。

吴新谋

1985年8月于北京中国科学院数学研究所

目　　录

引　言

考虑一类含奇线的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{a}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{b}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{c}{(\xi-\eta)^2}u=0. \tag{0.1}$$

其中 a，b，c 均为常数。它称为Euler-Poisson-Darboux方程，或简写为EPD方程。该方程最早于1790年由Euler[1]给出，尔后是Poisson[2]于1823年对其特殊情形进行过研究，1914年Darboux在他的名著《曲面论》一书[3]中对（0.1）作了系统的总结。并因此而以该三位数学家的名字命名（0.1）。其实，历史上研究过(0.1)的著名数学家并不仅只是他们三人，例如 Riemann[4]也研究了（0.1）的特殊情形，并导出了著名的 Riemann 法。Volterra[5]，Beltrami[6]等都对（0.1）作过研究工作。直到1958年，Weinstein[30, 47, 48, 62]，Erdélyi[29, 67]和Lions[31, 64, 66]等著名数学家都深入地研究过（0.1）的特殊情形。

令 $u(\xi,\ \eta)=(\xi-\eta)^{\alpha}U(\xi,\ \eta)$，代入（0.1），直接计算表明，若 α 是方程

$$\alpha^2+(a+b-1)\alpha+c=0, \tag{0.2}$$

的两个根，则在上述变换下，（0.1）变为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{a+\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{b+\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial U}{\partial\eta}=0.$$

因此，不失一般性，只须讨论 $c=0$ 时的EPD方程。按照Euler的

记号，将其写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \quad (\beta,\ \beta'=\text{const.}). \tag{0.1$'$}$$

如果$\beta=\beta'$，则令$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

于是（0.1）′化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{0.3}$$

这是一个双曲型方程．相应地，有一个椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{0.4}$$

有人称（0.4)为Beltrami 方程，或广义轴对称位势方程．但我们仍称其为椭圆型EPD方程．

方程（0.3）和（0.4）在理论和实际中应用十分广泛，与经典方程的联系也较紧密．

1.与波动方程和Laplace方程之间的联系

如众所周知，波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0, \tag{0.5}$$

在柱坐标$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$t=t$的变换下变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0. \qquad (0.6)$$

求变量分离解$u(r,\ t,\ \theta)=E(r,\ t)H(\theta)$，则$E$满足方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{\lambda^2}{r^2}E=0,$$

其中λ为比例常数．这正是（0.1)型的方程．对于 Laplace 方程也有类似结果．

如果我们要求波动方程（0.5)或三维 Laplace 方程的轴对称解，那就导致

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0, \qquad (0.7)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0. \qquad (0.8)$$

轴对称方程在数学物理中有许多应用．例如见I. N. Sneddon 的专著[7]和K. B. Ranger的几篇文章[8－11]．

此外，在空间波动方程的求解上，EPD方程也起着重要的作用．M. H. Martin[12, 13]曾给出柱波方程的一种新解法（其后又推广到多维的情形，M. H. Protter[14]曾用于解决特征问题)，以引入“伴随方程”的方法代替共轭方程，而其中“伴随方程”正是$\beta=\beta'=\frac{1}{2}$时的 EPD 方程，对应的基本解就是EPD方程的Riemann函数．其实，波动方程的基本解

$$\left[(t-t_0)^2-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

和Laplace方程的基本解

$$\left[(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

正是（0.7）和（0.8）的特解。

至于波动方程的解 $u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$和空间EPD方程的解 $v\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$的关系，其中

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v-\frac{2}{t}\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

导致解Cauchy问题的Poisson公式，更是人们所熟知的事实〔例如可参见F. John：偏微分方程，科学出版社（1986）〕

2.与混合型方程的关系

Tricomi方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在双曲域（$y<0$）和椭圆域（$y>0$）分别化为（0.3）和(0.4)的特殊情形$E\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$，即$\beta=\beta'=\frac{1}{6}$。对一般的混合型方程

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (m>0,\ y>0). \tag{0.9}$$

在特征变换$\xi=x+\frac{2}{2+m}y^{\frac{2+m}{2}}$，$\eta=x-\frac{2}{2+m}y^{\frac{2+m}{2}}$之下，化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{m}{2(2+m)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{m}{2(2+m)}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0. \tag{0.10}$$

这也是EPD方程的特殊情形。

更一般地，还可考虑

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p y^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (p = \text{const.}), \qquad (0.11)$$

而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\frac{m}{2} - p}{2+m} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\frac{m}{2} + p}{2+m} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \qquad (0.12)$$

另一种混合型方程

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (m > 0,\ y > 0), \qquad (0.13)$$

在特征变换 $\xi = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$，$\eta = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$ 之下，可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m}{2(2-m)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{m}{2(2-m)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \qquad (0.14)$$

因此，EPD方程在混合型方程中的作用如同双曲型方程中弦振动方程和椭圆型方程中的Laplace方程一样（参见Tricomi[15]和M. M. Смирнов[16]）. 直到现在，混合型方程的求解仍然是建立在EPD方程上. 正是对混合型方程的研究，近二、三十年来给出EPD 方程的许多结果. 对混合型方程的研究要有新的突破，也还有待于对EPD方程的进一步研究.

3. 与Fuchs型方程的关系

EPD 方程的特点是它的系数有奇性，以 $\xi - \eta = 0$ 为奇线，而且未知函数的第 n 阶微商前的系数的奇性为 $2-n$ 阶（$n = 0$,

1，2），这点和Fuchs型常微分方程一致，对方程（0.1）也可仿Fuchs型方程引入"指数"概念．所谓"指数"是指：如果存在一个常数α和一个正则函数$Z(\xi,\eta)\neq 0$，使得

$$u(\xi,\eta)=(\xi-\eta)^{\alpha}Z(\xi,\eta). \tag{0.15}$$

是（0.1）的解，则称α是（0.1）的"指数"，$Z(\xi,\eta)$是解的正则部分．

可以证明：方程（0.1）有两个指数值，可完全由方程系数中的参数a，b，c所确定．

事实上，将（0.15）代入（0.1），得到

$$(\xi-\eta)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\partial\eta}-(\xi-\eta)\left[(a+\alpha)\frac{\partial Z}{\partial\xi}-(b+\alpha)\frac{\partial Z}{\partial\eta}\right]$$

$$+[-\alpha(\alpha-1)-\alpha(a+b)-c]Z=0.$$

令$\xi\to\eta$，由Z的正则性和$Z(\xi,\xi)\neq 0$，立得

$$F(\alpha)=\alpha(\alpha-1)+\alpha(a+b)+c=0.$$

即

$$F(\alpha)=\alpha^2+\alpha(a+b-1)+c=0. \tag{0.16}$$

（0.16）就是"指数方程"，它至多有两个根α_1，α_2．

自然会产生这样的问题：二阶线性偏微分方程中，在$\xi=\eta$附近具有形如（0.15）的解($\alpha\neq 0$)的方程，其最一般的形势是什么？方程（0.1）是否是一种标准形式？

其次，方程（0.1）和广义超几何方程类似，例如将EPD方程写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+P(D)u=0. \tag{0.17}$$

的形式，其中$P(D)=\pm\frac{\partial^2}{\partial x^2}$是微分算子，与下面的Bessel方

程

$$Z''(y)+\frac{2\beta}{y}Z'(y)+\lambda Z(y)=0\ (\lambda=\text{const}).\quad (0.18)$$

比较，（0.18）的解为

$$Z(y)=\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{\lambda y^2}{4}\right)^m}{m!\,\Gamma(\beta+m+\frac{1}{2})}$$

$$=\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}y}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}y\right),$$

上列级数如将参数 λ 代以算子 $P(D)$，则得（0.17）的一个算子级数解。因而，可将（0.18）的许多性质推广到（0.17）上去。

Fuchs 型方程有许多性质，如解的集合构成群，导致了自守函数理论。偏微分方程如何？这都是有待探讨的问题。

4.与重特征方程的关系

F. Treves 1974年[25]提出，方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}=0.\qquad (0.19)$$

作为具有重特征方程的一个例，证明了（0.19）的零 Cauchy 问题 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$，当 $p=1, 3, 5, \cdots$ 时有非零解，即解的唯一性有离散现象。王光寅[26]等也陆续证明了解的存在性，混合问题也有离散现象。

不难看出，方程（0.19）就是（0.11）当 $m=2$ 时的特别情形，即可化为 $\beta=\frac{1+p}{4}$，$\beta'=\frac{1-p}{4}$ 的EPD方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\frac{1-p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\frac{1+p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

通过对 EPD 方程的研究，可以帮助我们弄清楚重特征方程的某些奇怪现象。

5.和Hens Lewy无解方程例的关系

1957年，Hens Lewy提出如下方程

$$i(x_2+ix_3)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial x_3}=f'(x_1). \qquad (0.20)$$

证明了当 $f(x_1)$ 解析时，(0.20) 无解。

上述问题的证明有多种方法. 我们将问题化为与 EPD 方程有关的方程，从与EPD方程有关的理论去考虑它。

引入复变量 $z=x_2+ix_3$，$\overline{z}=x_2-ix_3$，则

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-i\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

于是 (0.20) 化为

$$iz\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}=f'(x_1).$$

令 $z=r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$，则

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=r_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\theta_{x_2}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=r_{x_3}\frac{\partial}{\partial r}+\theta_{x_3}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

其中 $r=x_2^2+x_3^2$，$\theta=tg^{-1}\frac{x_3}{x_2}$，$r_{x_2}=2x_2$，$r_{x_3}=2x_3$，

$$\theta x_2=-\frac{x_3}{x_2^2+x_3^2},\quad \theta x_3=\frac{x_2}{x_2^2+x_3^2}.$$ 从而

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=2x_2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{x_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=2x_3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{x_2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

于是，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)=(x_2+ix_3)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{2r}(x_2+ix_3)\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$=z\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

从而，原方程变为

$$r^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta}\left(i\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{i}{2r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=f'(x_1).\tag{0.21}$$

为去掉方程中对 θ 的导数，令

$$\bar{u}(x_1,\ r)=i\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u(x_1,\ x_2,\ x_3)d\theta,\tag{0.22}$$

将（0.21）对 θ 从 0 到 2π 积分，得

$$r^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}-i\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{2r}\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta\right)=2\pi f'(x_1).\tag{0.23}$$

但是，

$$i\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}ud\theta=-i\bar{u},$$

从而得到

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}-i\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}-\frac{i}{2r}\bar{u}=2\pi r^{-\frac{1}{2}}f'(x_1).\tag{0.24}$$

（0.24）是非齐次的EPD方程组．事实上，如让 $\bar{u}=\bar{u}_1+i\bar{u}_2$，分离实部和虚部，上述齐次方程部分化为

$$\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial r}+\frac{1}{2r}\bar{u}_2=0,\tag{0.25}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}-\frac{1}{2r}\bar{u}_1=0. \tag{0.26}$$

(0.25) 对 r 求导得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r \partial x_1}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}-\frac{1}{2r^2}\bar{u}_2=0. \tag{0.27}$$

(0.26) 对 x_1 求导得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r \partial x_1}-\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}=0.$$

以 (0.25) 代入得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}+\frac{1}{4r^2}\bar{u}_2=0. \tag{0.28}$$

(0.27)+(0.28)，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}-\frac{1}{4r^2}\bar{u}_2=0.$$

类似地在 (0.25) 两边对 x_1 求导，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}+\frac{1}{4r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.30}$$

(0.26) 对 r 求导，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2}-\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}+\frac{1}{2r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.31}$$

(0.30)－(0.31)，得

$$\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial r}-\frac{1}{4r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.32}$$

即实部与虚部都满足同样的椭圆型 EPD 方程， 而且该方程的参数是特殊的。

为进一步化简，令$\bar{u}_1=r^\lambda\bar{v}_1$，则

$$\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial r}=r^\lambda\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial r}+\lambda r^{\lambda-1}\bar{v}_1,$$

$$\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial r^2}=r^\lambda\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial r^2}+2\lambda r^{\lambda-1}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial r}+\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\bar{v}_1.$$

代入（0.32），得到

$$\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial x_1^2}+\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial r}+\frac{\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{1}{4}}{r^2}\bar{v}_1=0.$$

它的指数方程为$\lambda^2-\frac{1}{4}=0$，由此得$\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$。取$\lambda=-\frac{1}{2}$，则$\bar{v}_1$是Laplace方程

$$\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial r^2}=0$$

的解。于是，如令

$$\overline{W}(x_1,\ r)=r^{-\frac{1}{2}}\bar{u}(x_1,r)=ir^{-\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u(x_1,\ x_2,x_3)d\theta,$$

则应有

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}=-\frac{1}{2}ir^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}ud\theta+ir^{-\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta. \tag{0.33}$$