M.库比切克 M.马雷克 著

分岔理论和耗散结构的计算方法

科学出版社

分岔理论和耗散结构的计算方法

M. 库比切克　M. 马雷克 著

刘式达　刘式适 译

朱照宣　赵惠芝 校

科 学 出 版 社

1 9 9 0

内 容 简 介

本书是有关分岔理论和耗散结构的计算方法的第一本专著．书中简要介绍了非线性系统的一些基本概念，如耗散结构、分岔等，还着重介绍了非线性系统中决定分岔点的计算方法以及稳态解、周期解、浑沌解和参数的依赖关系．它可供从事非线性系统的耗散结构、浑沌研究的科学家和工程技术人员使用；也可供有关专业的研究生和大学生及对非线性系统理论感兴趣的读者阅读．

M. Kubíček M. Marek

COMPUTATIONAL METHODS IN BIFURCATION THEORY AND DISSIPATIVE STRUCTURES

Spring-Verlag New York Inc., 1983

分岔理论和耗散结构的计算方法

M. 库比切克 M. 马雷克 著

刘式达 刘式适 译

朱照宣 赵惠芝 校

责任编辑 鄢德平 张邦固

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1990年3月第一次印刷 印张：9

印数：0001—1 600 字数：232 000

ISBN 7-03-001617-3/O·323

定价：10.10元

译 者 的 话

自从著名化学家 Prigoging 提出"耗散结构"理论以来，研究包括浑沌现象在内的有组织结构复杂形态已经受到物理学家、数学家、化学家、气象学家、生物学家的广泛重视。他们从分岔（bifurcation）理论、突变（catastrophe）理论、协同学（synergetics）、浑沌（chaos）概念、分形（fractal）和分维学说、细胞自动机（cellular automata）方法等不同角度共同研究自然界的复杂现象，形成了统一学科——非线性科学。

本书几乎涉及到非线性科学中的大部分问题，它用较为通俗的语言介绍了非线性科学中的一些基本概念和术语，如分岔点、极限点、Hopf 分岔、不变流形、余维等；且用大量篇幅介绍了作者的研究组多年来积累的求分岔点、解分支的延拓方法和打靶法，并在附录中给出了相应的程序。这些数值方法在计算机上行之有效。可以说，作者所提出的方法对研究非线性分岔问题和耗散结构均有重大实际意义，是对计算数学的新发展，对计算物理学的新贡献。

目前国内许多科学家特别是青年大学生、硕士和博士生对非线性分岔理论和耗散结构都非常有兴趣。本书可以作为非线性科学的入门书，同时也可为解决实际非线性问题的科学家和工程师提供数值方法和程序。

本书承北京大学力学系朱照宣教授校订，在此表示感谢。

本书得到中国科学院大气物理所的资助，表示感谢。

译者

1987 年 8 月于北京大学

序

“耗散结构”是物理学中近来讨论时空中有组织的结构形态所用的概念，这种有组织的结构是通过消耗从外部流进系统的能量而形成的．从亚细胞层次开始、直到生态系统的生物系统的时空结构组织，激光和等离子体物理中的相干结构，力学中弹性稳定性问题，导致湍流发展的流体动力学不稳定性，电网络和化学反应中的形态就是这个范围内所要研究的大致内容．

描述这些系统而构造出的数学模式通常是非线性的，常常形成包括许多特征参数的代数方程、常微分方程或偏微分方程的复杂系统．在理论上有意义的问题以及实际的工程问题中，我们要涉及解和参数的依赖关系，特别要涉及随着参数值的变化会出现（分岔出）定性上新的类型的解，例如振荡解，新的稳态以及浑沌吸引子．

本书详细研究并讨论了确定各分岔点以及确定稳态解、周期解与参数的依赖关系的各种数值方法．希望本书不仅可以成为学生和对耗散结构有兴趣的研究者的一本指南，而且也能成为处理结构模式与解非线性复杂系统问题的实际工程师的一本指南．计算机容量的扩大及计算速度的提高，使使用在本书中所讨论的比较复杂的计算方法成为可能．

本书包括五章和三个附录．第一章节 1.2 介绍了为说明本书中所讨论的数值方法而使用的非线性系统模型的许多例子．这些例子取自化学动力学、流体动力学、形态发生学、反应扩散系统以及化学和生物反应．节 1.3 定义了本书中所用到的基本概念，解释并讨论了一些术语：解的多样性，解的稳定性，极限环，奇异（浑沌）吸引子，解图，分岔图，演化图．

第二章讨论了研究集中参数系统（通常用常微分方程组来描

述)的数值方法。 详细讨论了决定分支点(极限点和分岔点)以及沿着解弧而延拓的方法。我们还提出了解非线性方程组和解非线性常微分方程组的数值方法,以及说明这些方法的详细例子,读者可以用这些方法来解决他自己的问题。第二章最后一节讨论了浑沌吸引子以及用来表征它们的各种数值方法。

第三章我们研究主要用非线性偏微分方程组来描述的分布参数系统,讨论了计算分支点的方法以及解和参数的依赖关系。这些方法仍然在发展,特别是对于出现周期解的情况。有一个详细例子涉及"Brusselator"反应扩散系统分岔图的构造,这个系统原来曾由 Prigoging 小组用来研究在远离平衡的反应介质中浓度的时空组织。

第四章是利用前面各章的结果去讨论发展方程的解,并根据分岔图来解释参数中的一个参数随时间缓慢变化时所出现的一系列结构。 用形态发生学的反应扩散模式的 Gierer-Meinhardt 例子来说明分布系统的计算方法。随着系统的特征长度的变化,其结果出现复杂性不断增加的空间形态浓度廓线。

第五章我们归纳了最近由其他人提出的解决本书所处理问题的数值方法。最后,因为是有关这方面的第一本书,而且问题仍处于发展的早期阶段,我们探索了可能的进一步发展。附录A和B以 FORTRAN 程序形式给出的算法对读者是有用的。

近来,在文献中已经出现许多有关微分方程定性理论、动力系统和分岔理论的新结果。有些结果对于学生、研究工作者和工程师们不是非常熟悉的。因此,我们在附录C中讨论了涉及不变流形、标准形式、分岔的余维和其它术语的概念。用简单的例子说明了分岔的有代表性的类型。我们希望附录将能使读者熟悉对解释复杂系统结果所必须的有关分岔理论的现有文献。然而,本书并不依赖于附录,在最初阅读时附录可以不看。

本书是在我们研究组的应用数学家和工程师过去 10 年共同努力所取得结果的基础上写成的,谨向我们的同事 Alois Klič, Martin Holodniok, Vladimir Hlaváček, Igor Schreiber, 以及参

加讨论问题的学生们表示诚挚的感谢。

我们感谢 Beiglböck 教授和 Keller 教授，他们提出有意义的建议和批评。我们要感谢 Springer 出版社纽约分社的各位编辑，他们协助出版了本书。

Marie Ruzkoxa, Dana Suchanova, Zdenka Svobodova 进行了原稿的打字工作，我们也向她们表示感谢。

目　　录

第一章　引言 …… 1
1.1　综合引论 …… 1
1.2　物理、化学和生物系统中的耗散结构 …… 2
1.2.1　弹性稳定性问题 …… 3
1.2.2　流动诱发振荡中发散和抖动的分岔 …… 5
1.2.3　滚动轮系统的非线性摆动问题 …… 5
1.2.4　扁弹性拱的屈曲 …… 6
1.2.5　流体力学中的耗散结构 …… 6
1.2.6　生物系统 …… 11
1.2.7　反应-扩散问题 …… 16
1.3　非线性系统的基本概念和性质 …… 20
1.3.1　稳态解 …… 21
1.3.2　解的稳定性 …… 26
1.3.3　演化系统 …… 30
1.4　例子 …… 31
第二章　集总参数系统（LPS）的多样性和稳定性 …… 40
2.1　稳态解 …… 40
2.2　稳态解与参数的依赖关系——解图 …… 43
2.3　稳态解的稳定性 …… 51
2.4　分支点——实分岔 …… 54
2.4.1　极限点和分岔点的计算 …… 56
2.4.2　分岔点处各分支的方向 …… 62
2.4.2.1　延拓方法开始点的选择 …… 66
2.4.2.2　用以说明的例子 …… 68
2.4.2.3　高阶退化的分岔点 …… 70
2.4.3　孤立点的出现、孤立中心的形成 …… 72

2.5 分支点——复分岔 …………………………………… 76
2.5.1 Hopf 分岔定理 …………………………………… 77
2.5.2 确定复分岔点位置的直接分解方法 ……………… 79
2.5.3 直接迭代方法 …………………………………… 84
2.6 分岔图 …………………………………………… 89
2.7 LPS 的瞬变状态——数值方法 ……………………… 92
2.7.1 Runge-Kutta 法 …………………………………… 93
2.7.2 多步方法 ………………………………………… 94
2.7.3 沿解弧线的积分 ………………………………… 95
2.7.4 自治系统相轨迹的积分 ………………………… 96
2.7.5 常微分方程刚性系统的数值方法 ……………… 96
2.7.6 微分方程和代数方程系统 ……………………… 100
2.7.7 时间延迟微分方程组的积分 …………………… 101
2.8 周期解的计算 ……………………………………… 103
2.8.1 转换为初值问题——打靶法 …………………… 104
2.8.2 周期解的稳定性 ………………………………… 107
2.8.3 周期解的延拓 …………………………………… 107
2.8.4 周期解的分岔 …………………………………… 111
2.9 浑沌吸引子 ………………………………………… 112
2.9.1 浑沌吸引子的特征 ……………………………… 114
2.9.2 Liapunov 指数 …………………………………… 114
2.9.3 功率谱 …………………………………………… 121
2.9.4 Poincaré 映射 …………………………………… 124
第三章 分布参数系统（DPS）的多样性和稳定性 ………… 126
3.1 稳态解——求解非线性边值问题的方法 ………… 128
3.1.1 有限差分法 ……………………………………… 129
3.1.2 拟线性化 ………………………………………… 132
3.1.3 打靶法 …………………………………………… 132
3.2 稳态解与参数的依赖关系 ………………………… 136
3.3 分支点——计算实分岔点和复分岔点的方法 …… 148
3.3.1 主分岔 …………………………………………… 148
3.3.2 次实分岔 ………………………………………… 153

3.3.3 次复分岔 …… 161
3.4 抛物型方程组的瞬变模拟方法——有限差分法 …… 167
3.4.1 非线性近似 …… 169
3.4.2 时间步长 k 的自动控制 …… 171
3.4.3 空间步长 h 的自动控制，等距离网格 …… 172
3.4.4 自适应非等距离网格 …… 173
第四章 可变参数准稳态模型的研究 …… 177
4.1 在 LPS 中的准稳态——例子 …… 180
4.2 在 DPS 中的准稳态——例子 …… 186
第五章 展望 …… 195
附录 A DERPAR——一种延拓算法 …… 202
附录 B 用打靶法求解非线性边值问题的一种算法 …… 206
附录 C 分岔理论和稳定性理论 …… 216
C.1 不变流型和中心流型定理（维数的化简） …… 217
C.2 标准形式 …… 218
C.3 向量场奇点的分岔 …… 229
C.4 向量场的余维数，向量场的扩展 …… 230
C.5 一个完全变形的构造 …… 237
C.6 余维数为 2 的分岔 …… 240
C.7 来自极限环的分岔 …… 243
参考文献 …… 259
索引 …… 268

第一章 引　言

1.1 综合引论

物理、化学和生物系统演化过程的共同特点是它们将导致多样化和增加复杂性. 研究这些现象主要方面之一是描述自组织的问题，也就是要详细研究系统的稳态和时间相关态随着特征参数变化的演化. 在描述那些系统时，我们有两种方法，即确定性模型和随机模型. 由确定性模型也可以得到具有随机特征的解(浑沌的解). 本书主要研究确定性模型，但是所描述的数值方法也可适用于随机系统.

本书所考虑的耗散系统的一般特点是:

1. 它用非线性方程组来描述，这个方程组可能是由代数方程、常微分方程、偏微分方程、差分方程或积分方程组成的.

2. 随着参数(一个或几个)的变化，新的稳态、时间周期解或浑沌解——耗散结构——在一定的临界(分岔)参数值处分岔出来. 随着参数的变化，这些解出现了，并且变得更为复杂了，随后就消失了.

原则上，"耗散结构"意味着结构是靠消耗外界进入系统的能量来维持的. 因此，我们要研究的通常是远离平衡的系统. 这种新的在结构上稳定的结构或具有相干性质，或具有浑沌状态.

人们早就知道耗散结构出现在流体动力学中. 例如，我们可以举出 Bénard 不稳定问题——在下部加热的液体层中出现规则的对流圈结构. 在流体动力学中，分岔通常叫做转移. 在化学反应系统(包括燃烧)中常出现的多稳态解、振荡、浓度和温度波也属于同样的范畴. 生物系统的时-空结构组织，从亚细胞层次直到生态系统层次，力学中的结构稳定性问题，激光和等离子体中的相干

结构，地球边界层的稳定性，经济系统的循环状态，所有这些问题都可以看作是耗散结构的范围。

耗散结构有三种不同的研究方法。第一是拓扑方法，它将给定模型的各种可能的形态从拓扑上加以分类，这是一种最通用的和定性的方法。突变理论和奇异理论[1.1,1.2]属于这个范畴。在过去15年中(参见文献[1.3，1.4])，这个方法的数学基础已经迅速地建立起来。

第二种方法是近似分析方法，它把在奇点附近线性化的方法、小参数方法、渐近展开法和平均方法等用来描写耗散结构的局部形态。然而，在大多情况，我们只能得到特解(例如靠近分岔点处的解，对于极端参数值的解)。这个方法的一个优点是，解的描述是显式的(即使是近似的)。

如果想将模型的预言与实验资料相比较，通常我们需要完整的解图[1)]，也就是在物理上有意义的整个区域中，解与参数的依赖关系。这就要用第三种方法——数值方法，它经常用来直接求模型方程的数值解。

例如，我们可以在给定某些参数的条件下求解一个问题，也可以当一个选择的参数在研究的区域变化时去求解。

本书着重描述有效的数值方法从而分析解与参数的依赖关系。由此可构造出完全的解图。

由于本书力图作为研究耗散结构数值方法的工作指南，所以将尽可能少地涉及理论的论述。然而，在文献目录中向读者提供了包括理论和应用两方面的各种参考书。

1.2 物理、化学和生物系统中的耗散结构

我们将从科学和工程的不同分支中举例来说明耗散系统的各

1) 所谓“解图”是指解的特征(例如解的模)与参数的依赖关系图。有些作者用“分岔图”这个词，但是我们将定义“分岔图”为分支(分岔)点与参数的依赖关系图，见节 2.4.

种类型，而且讨论在分析解与参数依赖关系中遇到的一些问题.

1.2.1 弹性稳定性问题

关于弹性稳定性问题有大量的论述[1.5,1.6]. 我们将概要地讨论一些例子.

最著名的例子之一是圆板屈曲问题. 一个弹性圆板的边缘是固定住的并受到均匀径向力压缩. 当推力充分小时，圆板平面均匀地收缩成一个较小半径的圆. 这个平衡态称为未屈曲的状态. 当推力超过临界值(称为屈曲载荷)时，未屈曲的状态变成不稳定，此时，圆板由于偏离其平面而变形.

我们假设 von Kármán[1.7] 的非线性平板理论可以描述圆板的非线性变形. 我们用 x 表示无量纲的径向变量，用 Θ 表示极角，那么圆板的无量纲侧向挠度 $w(x,\Theta)$ 和无量纲的附加应力函数 $f(x,\Theta)$ 由下列边值问题决定:

$$\Delta^2 f = -\frac{1}{2}[w, w], \tag{1.1}$$

$$\Delta^2 w = [f, w] - \lambda w_{xx}, \tag{1.2}$$

其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$.

相应的边界条件是

$$w(1,\Theta) = w_x(1,\Theta) = f(1,\Theta) = f_x(1,\Theta) = 0, \tag{1.3}$$

这里 $x = 1$ 是圆板的边缘.

在方程(1.1)和(1.2)中，Δ 是极坐标的 Laplace 算符，非线性算符 $[f, w]$ 定义为

$$[f, w] = \frac{1}{x}\left\{f_{xx}\left(w_x + \frac{1}{x}w_{\Theta\Theta}\right) + w_{xx}\left(f_x + \frac{1}{x}f_{\Theta\Theta}\right) - 2x\left(\frac{w_\Theta}{x}\right)_x\left(\frac{f_\Theta}{x}\right)_x\right\} \tag{1.4}$$

(下标表示对该变量的微商). 参数 λ 正比于径向推力 ($\lambda > 0$ 相应于压缩推力).

未屈曲状态是 $w = f = 0$，而且它是方程(1.1)和(1.2)对所

有 λ 值的解．随着 λ 值的增加，从 $\lambda=\lambda_c$ 开始，会出现不同的屈曲状态．因此，分析解与 λ 值的依赖关系是非线性屈曲理论的主要任务．随着 λ 值的增加，会出现轴对称的和非轴对称的解：在通过主分岔点时出现轴对称解，而在通过次分岔点时产生非对称解．当 $\lambda<\lambda_c$ 时，未屈曲状态是稳定的，而当 $\lambda>\lambda_c$ 时，它变成不稳定的．近似分析方法和数值方法都已经用来构造分岔的屈曲状态[1.8-1.13]．到目前为止，文献中还没有给出解连续依赖于参数 λ 的完整关系．

另外，我们再描述一个简单支承的矩形板的屈曲问题，当垂直于 x 轴的两个边受到均匀压缩推力时，板就变形(矩形的另外两个边可以在 y 方向自由膨胀)．描述该问题的微分方程组是

$$\Delta^2 f=-\frac{1}{2}[w,w], \tag{1.5}$$

$$\Delta^2 w=[f,w]-\lambda w_{xx}. \tag{1.6}$$

方程(1.5)和(1.6)定义在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant l$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上，边界条件是

$$w=\Delta w=f=\Delta f=0. \tag{1.7}$$

这里Δ是二维直角坐标的 Laplace 算符，$l(>0)$ 是矩形板的长宽比，λ 是正比于推力的参数，非线性算符 $[f,w]$ 定义为

$$[f,w]=f_{yy}w_{xx}+f_{xx}w_{yy}-2f_{xy}w_{xy}. \tag{1.8}$$

未屈曲状态 $w=f=0$ 是方程(1.6)—(1.8)对所有 λ 和 l 值的解．当 $\lambda<\lambda_c(l)$ 时，未屈曲状态是方程(4.1)的唯一解．当 $\lambda\geqslant\lambda_c(l)$ 时，主要的屈曲状态从未屈曲状态分岔出来．它们是成对地分岔出来的，但是如果相应的线性化问题的特征值为多重根，那么在临界特征值处可以有多对解分岔出来（例如在双重特征值处有四对解分岔出来[1.15,1.16]）．由实验已经看到[1.17]，当 λ 增加时，主分岔状态(屈曲状态)可以变得不稳定，并且平板的状态跳到另外一个平衡状态；随着 λ 的增加，这种跳跃可以发生多次．这种现象叫模态跳跃．另外，已经用分析方法和数值方法找到主分岔和次分岔的解[1.7,1.14,1.15,1.18,1.19,1.20]．对称和非对称的屈曲状态也已经找到．但

是，到目前为止，包含所有解的图像和解与解之间联系的完整的解图尚未发表．直到现在也还没有一个关于模态跳跃模拟的论述，即还没有人论述过当压缩推力（正比于 λ）缓慢变化（准稳态）时，屈曲状态的连续演变．解图和演化问题都可以用第三章和第四章讨论的方法解决．已经讨论了将拓扑方法用于非线性屈曲问题，例如，Chilling worth[1.21,1.22]．

1.2.2 流动诱发振荡中发散和抖动的分岔

抖动板（流动诱发振荡）的非线性振荡问题是一个著名的气动弹性问题[1.23]．一个两端固定，在 $z=0$ 和 $z=1$ 之间受到柱形挠曲的薄板的运动方程，可用侧向挠度 $v=v(z,t)$ 写成

$$\begin{aligned}\alpha\dot{v}'''' + v'''' - \Big\{ &\Gamma + \kappa\int_0^1 (v'(\xi))^2 d\xi \\ &+ \sigma\int_0^1 v'(\xi)\dot{v}'(\xi)d\xi \Big\} v'' + \rho v' \\ &+ \sqrt{\rho}\ \delta\dot{v} + \ddot{v} = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

其中 $\cdot = \dfrac{\partial}{\partial t}$，$' = \dfrac{\partial}{\partial z}$，$\alpha$、$\sigma$ 表征粘弹性结构的阻尼，$\sqrt{\rho}\ \delta$ 为空气动力学阻尼，κ 为非线性振动薄膜刚度，ρ 是动态压力，Γ 是平面内张力载荷．边界条件是

$$v = (\dot{v} + \alpha v)'' = 0, \quad \text{（角支边界条件）} \tag{1.10}$$

或是

$$v = v' = 0. \quad \text{（固支边界条件）} \tag{1.11}$$

如果 $\alpha, \sigma, \delta, \kappa$ 给定并且是正的，那么方程（1.9）的解可以视为 $\mu = \{(\rho, \Gamma)\}(\rho \geqslant 0)$ 的函数．此时，Hopf 分岔可以发生而且出现振荡（周期）解．已经从数值上研究了方程（1.9）的有限维近似[1.23]，最近，Holmes 和 Marsden[1.24] 应用中心流形理论研究了这个问题．然而还没获得全面的大范围的结果．

1.2.3 滚动轮系统的非线性摆动问题

火车轮子系统的非线性振荡分析能够根据下列方程组来进

行:

$$M\ddot{y}+2f_L\left(\frac{\dot{y}}{v}-\psi\right)+K_y y+F_g(y-\delta)=0, \tag{1.12}$$

$$I\ddot{\psi}+2lf_T\left(\frac{l\dot{\psi}}{v}+\frac{r_1-r_2}{2r_0}\right)+K_\psi\psi=0. \tag{1.13}$$

轮子对于铁轨的相对位置 y 决定了轮-轨接触的侧向力 F_g; 包含 f_L 和 f_T 的项是由于轮和轨之间滑动而产生的力和矩. 项 $\frac{r_1-r_2}{2r_0}$ 描述圆锥度. 在这个系统中, 不但通过 Hopf 分岔出现了周期解, 而且也观测到随着小的随机输入而产生大的自激现象[1.25,1.26,1.27].

1.2.4 扁弹性拱的屈曲

考虑一个扁弹性拱, 它受到一个集中载荷的作用. 无载荷时的外形 $y_0(x)$ 假定是高度为 c 的圆弧, 当在位置 x_p 上有载荷 p 时, 平衡时的外形由方程

$$y''''-y_0''''+\eta(y)y''=-p\delta(x-x_p) \tag{1.14}$$

描述, 其中, δ 是 Dirac 函数, 而且轴向推力 $\eta(y)$ 为

$$\eta(y)=2\int_0^1[(y_0')^2-(y')^2]dx. \tag{1.15}$$

边界条件是

$$y(0)=0,\ y'(0)=y_0'(0),\ y(1)=0,\ y''(1)=y_0''(1). \tag{1.16}$$

对于充分小的 c, 载荷屈曲的平衡路径是单调增长的. 但对于较大的 c, 当载荷增加时, 在极限点(最大点)或在分岔点因为不稳定而发生折断. 突然折断就相当于突然屈曲成一个相反(或部分相反)的外形[1.28]. Zeeman[1.29] 用突变理论分析了类似的问题, Golubitsky 和 Schaeffer[1.30] 用奇异理论也分析了同类问题. Plant[1.28] 还综述了其它更为复杂的问题.

1.2.5 流体力学中的耗散结构

在物理系统耗散结构的各种例子中, 流体力学中的耗散结构

和分岔大概是最常见的．这里我们将系统论述最常研究的几个问题：由于引力而合并在一起的旋转流体的平衡形状问题，Taylor 和 Bénard 问题．关于流体力学中的耗散结构问题已有大量论述，参见文献[1.31，1.32，1.33]．最近，无粘涡旋理论的再现，涡旋相互作用的运动学，以及相干结构概念的探索已经成为研究湍流的中心课题[1.34]．

旋转液体的稳定性

考虑一个给定质量和体积的均匀不可压缩流体，它以角动量 J 围绕一固定轴刚性地旋转．假设作用力仅仅是引力和离心力，并设流体占据以表面

$$S(\boldsymbol{x})=0$$

为边缘的单连通体积[在流体内部 $S(\boldsymbol{x})>0$]．

在这个旋转系中，流体静力平衡方程成立[1.35]，即

$$\nabla(p-\phi)=0. \tag{1.17}$$

这里 $p(\boldsymbol{x})$ 是压力，而

$$\phi(\boldsymbol{x})=\phi_g(\boldsymbol{x})+\phi_c(\boldsymbol{x}) \tag{1.18}$$

是引力位势和离心力位势之和．满足 Poisson 方程

$$\Delta\phi_g=-\rho,\ \rho(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & S(x)\geqslant 0,\\ 0, & S(x)<0,\end{cases} \tag{1.19}$$

和边界条件 $|x|\to\infty$ 时 $\phi_g(x)\to 0$ 的引力位势是

$$\phi_g(S(\boldsymbol{x}))=\frac{1}{4\pi}\int_{S(y)\geqslant 0}\frac{dy}{|x-y|}; \tag{1.20}$$

而离心力位势定义为

$$\phi_c(S(\boldsymbol{x},J^2))=\frac{J^2}{2I^2}\left(x_1^2+x_2^2\right), \tag{1.21}$$

其中

$$I(S)=\frac{15}{8\pi}\int_{S(x)\geqslant 0}\left(x_1^2+x_2^2\right)dx \tag{1.22}$$

是相应的转动惯量．