传热的有限差分方程计算

D.R.克罗夫特 D.G.利利 著 张风禄等 译

冶金工业出版社

传热的有限差分方程计算

D.R.克罗夫特
D.G.利　　利　著
张风禄　等译

冶金工业出版社

内 容 简 介

本书译自D.R.Croft和D.G.Lilley合著的《HEAT TRANSFER CALCULATIONS USING FINITE DIFERENCE EQUATIONS》(1977年)一书。它是一本应用有限差分法计算传热问题的入门书。该书论述了关于分析和求解传热(包括计算机程序在内)的诸方面问题，其内容侧重于实际应用，讲叙上由简到繁，循序渐进，并用图表与例题阐明计算原理和方法，清晰易懂。

本书可供从事工业炉研究、设计人员和大专院校有关专业师生参考。

本书共分八章。序和第一、二章由张风禄译，第三、五章由管志安译，第四章由冯旭译，第六、七章由吴茂林译，第八章由周筠清译，由张风禄负责总校。

传热的有限差分方程计算

D.R.克罗夫特
D.G.利　　利　著
张 风 禄　等译

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版
(北 京 灯 市 口 74 号)
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张 9 1/8　字数 239 千字
1982年3月第一版　1982年3月第一次印刷
印数00,001～4,600册
统一书号：15062·3789　定价1.15元

序

本书拟作为一本内容广泛并用图、例说明的，应用有限差分法计算传热问题的入门书。有限差分方法基本上是简单的，但是它对那些面临繁难的甚至经常不能分析求解的传热问题的工程设计人员或研究人员，却提供很有效的工具。本书面向那些实际工作者，他们需要一本能使他们学会并能应用有限差分法以解决问题的完整著作。

此课题的起点，理所当然的是导热的偏微分方程（PDE），正是由导热的偏微分方程导出了简单得多的有限差分方程（FDE）。具有内热源且温度依赖于时间的导热一般方程式为：

$$\operatorname{div}(k \ \operatorname{grad} \ T)+H=\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

我们对导热的研究主要是涉及此方程式的求解，以获得固体结构内部的温度分布或温度演变。因为在各种情况下恰恰是温度分布决定着传热的速率和热应力的水准，所以我们总是把注意力集中在温度上。

对于简单形状的物体和边界条件，已经得出了这类偏微分方程的解析解，并可用来求整个物体内部的局部温度。但是在大多数情况下，即使存在解，这种解也是很复杂的，并且均是无穷级数的形式，致使计算值难以得到。在大多数有实际意义的情况下，这样的解析解并不存在。

在这样一些情况下，特别是对于复杂的几何形状和边界条件，只能采用近似的数值方法求解。这种方法乃用各特定点上的数值间的有限差分近似地代替上述方程中的导数，故将这种方法称为有限差分法。

当然，两种不同的解法——解析解法和数值解法，也会得出不同类型的答案。用解析解法得出的公式(通常是相当复杂)，能够计算系统内任意点上的温度及其梯度。另一方面，在数值解法

中是计算我们感兴趣的区域内网格上预先选定的离散点的温度。某一点的温度就代表包括此点在内的一定区域的温度，边界上的热流被看作是来自适当区域的热流总合。这里所说的“点”或“节点”，对于稳定态问题系指空间中的一点，而对于不稳定态问题系指空间和时间中的一点。

本书试图给读者提供包括计算机程序方面在内的、关于分析和求解导热问题的全面资料。书的前两章包括基本概念和基本方程式，并且还复习了传热原理。接着在第三、四章中详尽阐述了对于各式各样的形状如何来推导有限差分方程，论述了泰勒(Taylor)级数和单元控制体积的热平衡法这两种方法，还详细讨论了不同坐标系下的有限差分方程的建立、不规则网格和三角形网格、以及不同类型边界条件的处理等问题。第五、六章说明如何将这些概念应用到若干典型问题中，这里采用了粗网格，目的是通过例子说明运用表格计算和简单的Fortran计算程序的方法。我们要经常注意，通过采用细网格特别可以改善精确度，细网格会得出更大的一组有限差分方程，它更好地模拟所讨论的问题。第七章研究有限差分方程组的各种解法：用于各种复杂情况下的稳定态和不稳定态问题的直接法和迭代法。我们讨论了这些方法的优缺点，并介绍了它们的效率（亦即为了获得一定的精确度所必需的最小计算量）。还包括应用比较复杂的通用计算机程序的计算问题。第八章讨论了各类实用问题，在研究实例的基础上综合运用了前面讲过的概念，并且采用始终如一的方式充分地论证了这些问题。

至于本书有什么独创性呢？任何教科书作者的主要贡献，在于选择、提炼和重新组织他们所发现的最适于说明该领域的原理和方法的有关材料。在这种理解下，本书作者已概括了几位著名作者的论著。无论如何，本书的特点是突出了实用重点，包括了数值解法方面的最新概念，并且将通过Fortran计算机程序实现计算都完全结合到讨论中。我们试图在数学推导和物理概念两者的份量上取得最好的均衡，并试图写成一本为那些渴望解决实际

问题的人们所欢迎的教科书。

作者对参与此书准备工作的人员表示感谢。我们特别感谢：在谢菲尔德(Sheffield)、克兰菲尔德(Cranfield)、塔克森(Tucson)和蒙特利尔(Montreal)的同事们给予我们的帮助、鼓励和同情；书评作者们特别是在克兰菲尔德的G.哈蒙德(Hammond)和J.沃德(Ward)以及在塔克森的M.J.阿诺德(Arnold)和J.T.莫科姆布(Morcomb)给予我们有益的建议和评论；在塔克森的罗达(Rhoda)G.米勒(Miller)为我们的末稿精心打字；在米尔顿凯恩斯(Milton Keynes)的A.E.普拉特(Pratt)协助我们准备了很多用图；我们的妻子们对我们的关心鼓励；以及应用科学出版公司(Applied Science Publisher Ltd)的良好合作和精心作好出版的准备工作。

D.R.克罗夫特(Croft)

D.G.利利(Lilley)

目　　录

第一章 引 言

1·1 基本概念

有限差分法为解传热问题提供一种有效的方法。解区域以一有限的点的集合所代替，并设法求出这些点上的温度近似值。这些点上的值必须满足有限差分方程（FDEs），而有限差分方程可通过用偏差商代替偏微分方程（PDE）而获得，或者通过直接考察热流而获得。采用多少点来达到一定的精确度通常乃以直观和经验为基础，因为在实际情况下作误差估计是办不到的。往往采用两套不同的网格点以得出近似解，其中一套网格是另一套的加细，通常将其格距减半，以比较相应空间位置的温度。假若两种网格所引起的温度改变与温度本身的值相比是很小的话，那么计算即可停止，否则要用更细的网格，或用这两组数值进行外推以得到更好的近似解。

为了阐明有限差分法这个基本课题，让我们考察在x和y二维空间内的导热问题（二维问题）。在稳定态情况下，温度T满足椭圆型偏微分方程：

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+H=0 \tag{1·1·1}$$

式中k为导热系数（假设在整个区域上为常数），而H为单位体积内热量产生的速率。此方程可以用最简单的关于二阶导数的差分公式来表示；对于x方向上的导数，

$$(\Delta x)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\bigg|_{(x,y)}=T(x+\Delta x,y)-2T(x,y)+T(x-\Delta x,y) \tag{1·1·2}$$

对于y方向上的导数同样地处理，就可得到代表在点（x，y）处的公式1·1·1的有限差分方程：

$$k[T(x+\Delta,y)+T(x-\Delta,y)+T(x,y+\Delta)+T(x,y-\Delta)$$

$$-4T(x,y)]+\Delta^2 H(x,y)=0 \qquad (1\cdot1\cdot3)$$

这里取两个方向上的间距Δx和Δy均等于Δ。当然此方程也可直接地从中心为（x，y）、边长为Δ的正方形的能量平衡而导出。能量平衡表明，对于二维稳定态问题：

$$\text{净吸热的速率}+\text{内部热量产生的速率}=0 \qquad (1\cdot1\cdot4)$$

对于复杂问题来说，人们往往宁愿通过考察方程1·1·4，而不通过基本微分方程1·1·1来建立形如方程1·1·3的方程式，作为物理系统的直接近似。

通常与椭圆型方程相联系的边界条件有两类：

（1）给定边界上T的值；

（2）给定边界上法线梯度的条件，通常为线性的，其形式为

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=-h(T-T_A) \qquad (1\cdot1\cdot5)$$

这代表通过对流向温度为T_A的周围介质的线性传热。

对于椭圆型方程，为了在它所包围的区域内定义一个适定的问题，必须在封闭曲线（在三维区域情况下为封闭曲面）的所有点上，给定某种类型的边界条件，从这些边界值开始向内逐步用数值迭代法进行求解。

在不稳定态热流的情况下，产生的热量与消散的热量之差不等于零，且导致在任意点上的温度均随时间而改变。与其相关的抛物型方程为

$$\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+H \qquad (1\cdot1\cdot6)$$

式中ρ为材料的密度，C_P为材料的恒压比热。适定的抛物型问题要求给定$t=0$时空间区域内所有点上的温度T，以及$t>0$时区域的所有边界点上类如（1）或（2）的条件。为此它们通常被称为初值问题。

已经导出了有限差分方程以后，主要的问题便是实际计算差分方程的解。对于椭圆型方程，问题在于求解这种类型的线性代数方程组

$$AT+d=0 \qquad (1\cdot1\cdot7)$$

然而对于抛物型方程，人们必须解常微分方程组（那时某些项已用有限差分近似代替），其形式为：

$$\frac{dT}{dt}=AT+d \qquad (1\cdot1\cdot8)$$

式中A是一方形矩阵，d是一列向量，T是待求未知量的列向量。适定的椭圆型问题得到方程1·1·7的非奇异矩阵A，因此它存在唯一解。然而，因为对于（典型地）几千个格子点的每一点都要列一个方程，于是选择解法格式就需要特别小心。因为矩阵A中具有许多零元素，所以一般地都采用迭代法；人们先估计一个初始近似解，再根据一定规则逐步校正，以得到较佳近似值，直至收敛于指定的误差容许范围内。相反地对于抛物型问题（用类如公式1·1·8描述的），根据求解时所采用的方法，它也许需要也许不需要去解一组线性代数方程。用显式方法时只通过简单的替换便可进行求解，但是在此情况下时间步长的大小要受到稳定性条件的限制。若采用隐式方法便可部分地或全部地去掉这些约束，而其代价是必须解一系列的方程组。同预料的一样，在求解不稳定态问题的某些方法同求解相应的稳定态椭圆型问题的某些迭代法之间常常存在紧密关系。

1·2 物理问题

分析热传导的目的，在于预告处于不同温度环境下的某导热物体的瞬时温度分布的演变和(或)固定的温度分布图形，一旦知道了这个，其它的数据例如内部热流，热增长(Thermal growth)以及热应力等均能导出。在实际系统中具有很多复杂情况，包括：如实地确定周围环境的边界条件，需要处理复杂的物体几何形状，以及处理与恒定物性的各向同性导热体差别很大的各种材料系等问题。

1·2·1 周围环境的边界条件

边界条件的给定构成研究物体特性变化问题的基本输入，人

们感兴趣的是：

（1）相互作用。固体导热问题通常总不能和表征对流及辐射的表面加热条件的相关问题分割开来。表面相互作用（物质喷射和燃烧等）将这两个问题结合在一起，但是我们时常将周围环境和物体内部温度变化问题分割开来，分别地加以处理。这样就物体而言，就可以规定其表面热边界条件（或者按照某些规则简单地加以修正），于是问题就简化为预测物体在这些限制条件下的温度场。

（2）不稳定态过程。一般的导热问题是依赖于时间的，但是假若边界条件是不依赖于时间的，如果某物体长期处于这种稳定的边界条件下，其温度分布就变成稳定的了。若物体的导热系数很大，那末达到稳定态所需的时间就短，反之，所需的时间就长。这代表稳定态导热的一种特殊情况。它的求解可以通过按时间逐步解相应的不稳定态问题来完成，或者通过解相应的稳定态问题的公式来完成。在到达稳定态的温度和热传导状况之前，总存在一段时间的初始不稳定态过程。在某些实际场合下，随着传热过程的进行，此段不稳定态过程很快就衰减了，并且物体的温度场迅速呈现一固定的稳定态图形，然而在另外的情况下，初期的延续的不稳定态过程具有头等重要性。

（3）初始状态和终止状态。当$t=0$时物体突然置于另一不同温度的介质中时则发生“暴露”问题。这时在表面上的传热引起物体温度的改变，于是物体便获得或失掉热量，并且其表面温度趋向等同于周围介质的温度，而变化的速度决定于物体表面上的传热系数h。对于导热系数为k的一定物体，其内部的瞬时温度分布决定于h/k的相对值。假若此比值较大（或小），则物体表面温度就较快（或慢）地变为等同于周围介质的温度。一个无热量通过的绝热边界（指加以绝热的）相当于$h=0$，并且在此表面的法向温度梯度$\partial T/\partial n$等于零。

1·2·2 物体的几何形状

一些常见的基本的物体形状示于图1-1中，这些乃是与实际

机器构件适当相似的典型几何形状。事实上，这些几何形状易于接受求温度分布的精确解法，但数值解法适用于任何比较复杂的布置。常见而基本的形状有：

（1）无限大固体，具有一个代表热接触面的内部平面$x=0$；

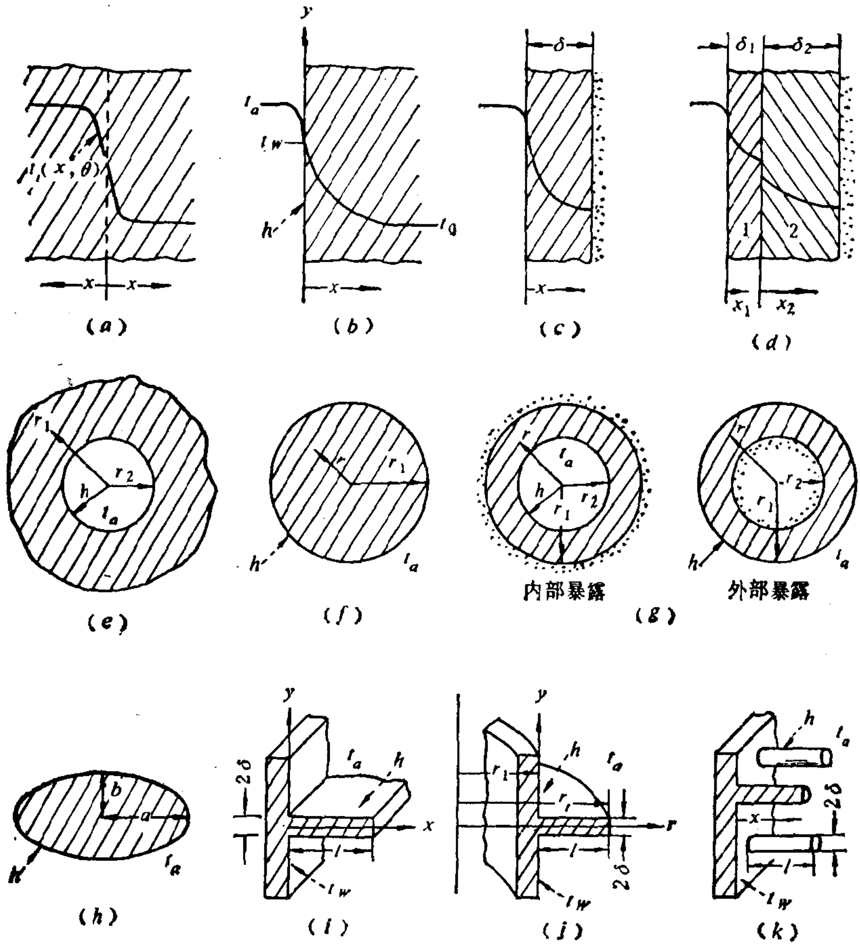

图 1-1 基本的物体形状

（a）—无限大固体；（b）—半无限大固体；（c）—平板；（d）—双层平板；（e）—中空圆柱和圆球；（f）—圆柱和圆球；（g）—柱形和球形壳体；（h）—椭圆体和椭面；（i）—直的翅片；（j）—环形翅片；（k）—针体

（2）半无限大固体，具有在$x=0$处暴露于周围介质的表面；

（3）绝热的有限厚平板，一边暴露，另一边绝热；

（4）双层平板（若δ_2很大则为半无限大固体），在层1和层2之间具有一定的接触热阻，因而有突变的温度降；

（5）中空圆柱或中空圆球，其内部为周围介质；

（6）圆柱或圆球，其外部为周围介质；

（7）柱形或球形壳体，内表面或外表面绝热；

（8）椭圆体，外部为周围介质；

（9）～(11) 带翅片或针体的突出表面，其目的在于增大热交换面积。

在例（1）～（4）中都附加温度曲线。

1·2·3 材料系

实际的材料和结构比起理想化了的数学模型要复杂得多，这就使得在热结构的分析上出现最困难的情况。实际中使用的材料是千变万化的，关于详尽的资料推荐读者参阅麦克亚当斯（McAdams）(1954) 的著作。

1·3 数学问题

在一些数学物理问题中具有代表性的传热问题可用二阶偏微分方程表示：

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)+H=\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1\cdot3\cdot1)$$

该式必须在一个边界B内的某区域R内，且在规定的边界条件下求解，边界条件的类型有下列三种：

（1）已知边界B上的温度；

（2）已知边界B上的$\beta\frac{\partial T}{\partial n}+\gamma\frac{\partial T}{\partial S}$； (1·3·2)

（3）已知边界B上的$\alpha T+\beta\frac{\partial T}{\partial n}+\gamma\frac{\partial T}{\partial S}$。

这三种类型的边界条件分别称为狄立克莱（Dirichlet）边界

条件、纽曼（Neumann）边界条件和第三类边界条件。当边界上不同部分具有不同的条件时称为混合边界条件。当边界B保持在已知温度时应用第一类条件，而为大家所熟悉的形式

$$\frac{\partial T}{\partial n}=-\frac{h}{k}(T-T_A) \qquad (1\cdot3\cdot3)$$

乃是第二类条件的一例。上式表示以对流方式传给温度为T_A的介质的热量。上面引用的例式是导热的一般方程式，其中k为导热系数，T为温度，H为单位体积单位时间内产生的热量，ρ为密度，C_P为恒压下的比热，t为时间，而方程1·3·2中的α、β、γ为标量，n为表面的法线方向，S为表面的切线方向，h为传热系数。

热传导的最一般的偏微分方程是方程1·3·1，其中k、H、ρ和C_P均随空间、时间和温度而改变、记为：

$$k=k(x,t,T);\ H=H(x,t,T);\ \rho=\rho(x,t,T);$$
$$C_P=C_P(x,t,T) \qquad (1\cdot3\cdot4)$$

式中x表示三维空间中的某点，k也可依赖于方向（各向异性介质）。方程1·3·1包括大多数有实际意义的特殊情况。例如，假若系统的导热系数k为常数并且是各向同性的（亦即在所有方向上具有同一数值），则温度$T=T(x,t)$必须满足下列方程式

$$\nabla^2 T+\frac{H}{k}=\frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1\cdot3\cdot5)$$

式中$\nabla^2\equiv\mathrm{div\ grad}$(拉普拉斯算子)，$\alpha=k/\rho C_P$为热扩散系数——导热物质的一种性质。进一步，如果系统既无热源又无汇（$H=0$），则温度$T=\mathrm{T}(x,t)$必须满足扩散方程

$$\nabla^2 T=\frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1\cdot3\cdot6)$$

假若具有源或汇，但温度是稳定的$\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$，则温度$T=T(x,t)$必须满足泊松（Poisson）方程

$$\nabla^2 T+\frac{H}{k}=0 \tag{1·3·7}$$

最后，对于稳定态$\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$，并且没有源或汇，则温度$T=T(x, t)$必须满足拉普拉斯（Laplace）方程

$$\nabla^2 T=0 \tag{1·3·8}$$

像方程1·3·1这样的一些方程出现在许多有实际意义的工程现象研究中。类似的PDEs呈现在类如下列领域中：

（1）介电质中的电场。

（2）导电介质中的电场。

（3）磁场。

（4）非粘性和粘性流体的运动。

（5）扩散。

（6）平衡状态下的结构。

实际上，人们经常应用这些场之间类似，从另一个不同的场来模拟并求解一个问题。例如，可以利用热流与人们所熟悉的电势场之间的数学类似，来进行模拟传热问题的电模拟试验。进一步的细节可见阿帕赛（Arpaci）(1966)，格布哈特（Gebhart）(1971)以及施奈德（Schneider）(1955，1973)的著作。

所有$H=0$的上述偏微分方程都具有平凡解

$$T\equiv 0 \tag{1·3·9}$$

这个全零解极少构成物理问题的一个解，因为通常在边界上$T\neq 0$。解必须满足称为边界条件的附加条件，而边界条件甚至是问题的通解的固有部分。

用方程1·3·1及其简化形式所表示的问题一般地分类为：

（1）椭圆型边值问题，在这类问题中考虑的是方程的平衡下稳定态形式$\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$；或者

（2）抛物型初始边值问题，在这类问题中考虑的是方程的