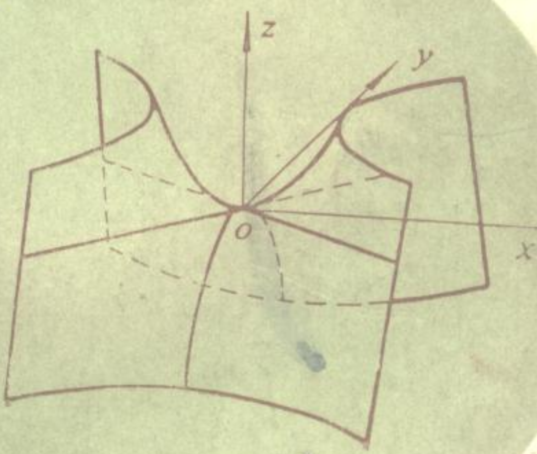
自学函授基础课教材

自学函授高等数学(下)

刘 颖 李英敏 傅长根 编



北京工业学院出版社

自学函授高等数学(下)

刘 颖 李英敏 傅长根 编

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部颁发的《高等数学函授教学大纲》的要求编写的。本书分上下两册。上册内容为一元函数微积分，下册主要内容是矢量代数与空间解析几何、多元函数微积分、级数和微分方程。本书内容通俗易懂，论述简洁清楚，特别是加强对自学的指导，每章都有章后指导，并配有一定数量的练习题与习题，便于自学，可作为工科函授自学的教材，也可供具有高中文化程度的读者阅读。

本书下册由刘颖、李英敏、傅长根编，全书由刘颖主编，孙树本教授审阅。

自学函授高等数学（下）

刘 颖 李英敏 傅长根 编

北京工业学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京工业学院出版社印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 20.5 印张 483 千字
1986 年 12 月第一版 1986 年 12 月第一次印刷
印数：1—10,000 册

统一书号：15434·44 定价：3.45 元

目　　录

学时分配及作业安排的建议

章次	内容	阅读时数	作业时数	合计时数
8	矢量代数	14	10	24
9	空间解析几何	18	10	28
10	多元函数微分学	26	16	42
11	重积分	24	16	40
12	曲线积分与曲面积分	20	14	34
13	级数	28	18	46
14	傅里叶级数	14	10	24
15	微分方程	34	22	56
	总计	178	116	294

按大纲规定本册学习时间为350学时，其中有测验、复习及考试56学时，阅读与作业时间实为294学时。

第八章 矢量代数

§8—1 矢量的概念与矢量的线性运算

在自然科学里所遇到的量可分为两种类型，其中一类完全可以由数值的大小来确定，如面积、体积、时间、温度、质量等，当单位确定之后，用一个实数就可以表示它们的大小。如某三角形的面积是15厘米^2、某地昨天的最高气温是 34°C 等等，这一类量叫做**标量**或**数量**。另一类量如力、位移、速度、加速度等，用一个实数是不能完全表示的，例如力，用同样大小的力，作用的方向不同，其结果是不相同的。这样的一类量，要确定它们，不但要知道它们数值的大小，而且要说明它们的方向，这种具有大小和方向的量叫做**矢量**或**向量**。

一、矢量的概念

矢量是由物理学中力、速度、加速度这些物理量抽去它们的具体物理意义，总结它们的共同性质而得到的数学概念。

定义 有大小和方向的量称为**矢量**。

在几何上可以一定长度和一定方向的线段表示矢量。如图8.1所示，用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示矢量，它的长度表示矢量的大小，它的方向就是矢量的方向，A点叫起点，B点叫终点。

为了书写简明，矢量可用字母上面加一个箭头来表示，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等。也可以用粗体的拉丁字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$等来表示矢量。

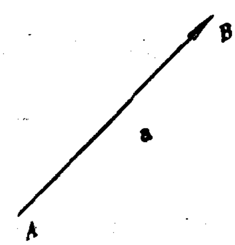


图 8.1

矢量的模 矢量的大小又叫做矢量的模。矢量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$，就是有向线段的长度，矢量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$。

矢量的相等 如果两个矢量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的模相等、方向相同，就称这两个矢量为相等。记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，如图8.2所示。每一个矢量只由它的模和方向来决定，而与起点无关。我们把这种起点可以任意移动的矢量称为**自由矢量**。而在有些实际问题里，矢量的起点是不能任意移动的，这样的矢量称为**固定矢量**。固定矢量是自由矢量的特殊情况。在本课程里只研究自由矢量，通常所论矢量就是指自由矢量。矢量相等的条件是对自由矢量而言的，即与它的起点无关。所以一个矢量经过平移后仍是原来的矢量。

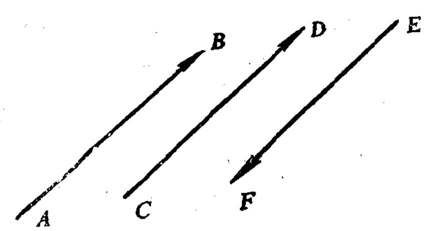


图 8.2

负矢量 如果两个矢量的大小相等、方向相反，称其中一个矢量是另一个矢量的**负矢**

量。如图 8.2 中矢量 $\overrightarrow{EF}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的负矢量，记作 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{EF}$。显然，如果矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与终点对调，则矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互称负矢量，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。这时可说 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的指向相反。

单位矢量 模为 1 的矢量称为单位矢量。与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位矢量记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$。

二、矢量的线性运算

矢量的线性运算是指矢量加法、减法及乘以常数这三种运算。物理学中力的合成就是矢量的加法的例子。

（一）矢量加法

定义 设有两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 和。记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。两个矢量的这种加法叫做三角形法。（图 8.3）

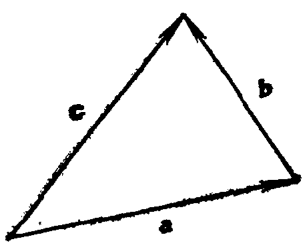


图 8.3

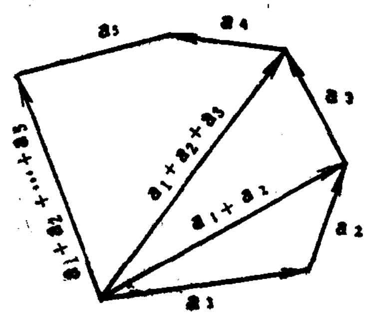


图 8.4

由两个矢量的加法很容易推广到 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和的求法。令 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点重合，$\boldsymbol{a}_3$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点重合，这样依次作下去，则以 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点为起点，$\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$，便是 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和。记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，这种加法又称为多边形加法或折线法。（图 8.4）

根据和的定义，若把矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相重合，由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边构成的平行四边形的对角线矢量 $\boldsymbol{c}$ 也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 和 。如图 8.5 所示。这种方法叫平行四边形法。

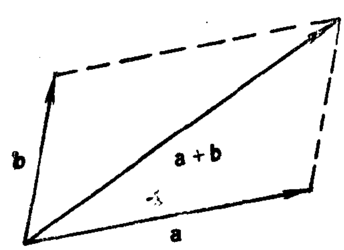


图 8.5

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在同一条直线上，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的指向相同时，其和的指向也与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 相同，模为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模的和。当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 指向相反时，其和的指向与 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中模大的那个相同，其模为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模的差。特别是当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等而方向相反时，其和为零，此时称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和为零矢量。零矢量就是模为 0 的矢量，它的方向可以看作任意的。零矢量记作 $\mathbf{0}$。

矢量加法满足下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

用几何方法很容易验证这两条规律。读者可自己作出。

（二）矢量减法

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差。即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

把矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到共同的起点，则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 便是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，由图 8.6 可看出，因为，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。或者在 $\boldsymbol{a}$ 的终点作 $-\boldsymbol{b}$，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $-\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量便是 $\boldsymbol{c}$。

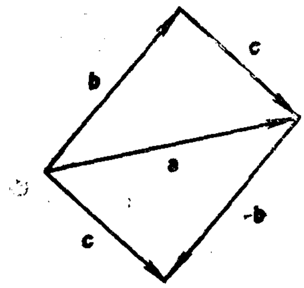


图 8.6

（三）数与矢量的乘法

定义　实数 m 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个矢量，记作 $m\boldsymbol{a}$。它的模 $|m\boldsymbol{a}|=|m|\cdot|\boldsymbol{a}|$；它的方向：当 $m>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $m<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反。当 $m=0$ 时，它是零矢量。

如图 8.7 所示，三个矢量分别是 $\boldsymbol{a}$、$2\boldsymbol{a}$ 和 $-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$。

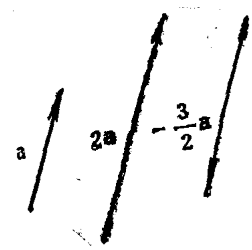


图 8.7

数与矢量的乘法满足下列运算规律：

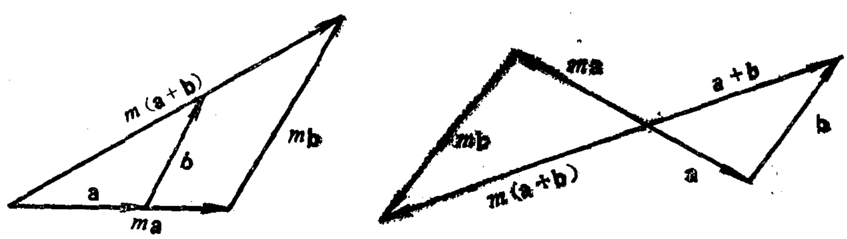
(1) 交换律　$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m$

(2) 结合律　$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$

(3) 分配律　$(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$$

利用几何作图可以说明分配律的第二个等式。（见图8.8）



(a)　$m>0$　　(b)　$m<0$

图 8.8

利用数与矢量的乘法，可以导出矢量的另一种表示法。设 $\boldsymbol{a}$ 不是零矢量，则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

其中 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的模为 1，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，即与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，于是有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^{\circ}$$

这种表示法把矢量 $\boldsymbol{a}$ 的两个要素——模和方向很清楚地表示出来了，$|\boldsymbol{a}|$是 $\boldsymbol{a}$ 的模，$\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向。

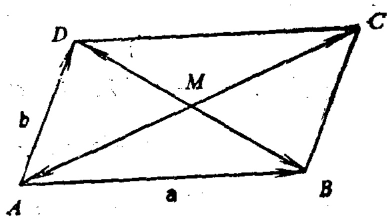


图 8.9

例 设有平行四边形 $ABCD$，M是平行四边形对角线的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 把矢量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和$\overrightarrow{MD}$表示出来。

解 由于平行四边形对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}$$

即
$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

又因 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}$，所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

又
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MB}，\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$$

所以
$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})，\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

练习 设有ΔABC，M为 BC 的中点，N为CA的中点，P 为AB的中点，试用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$ 表示矢量 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{BN}$ 和 $\overrightarrow{CP}$。

习 题 8—1

1. 如果 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心，则在下列各矢量组（1）$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$；（2）$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$；（3）$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BA}$ 中，哪些是相等矢量？哪些互为负矢量？

2. 已知非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，用作图法作出下列矢量：

（1） $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ （2） $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

3. 利用作图法证明下列等式：

（1） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$

（2） $\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$

4. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分，并把等分点 D_1，D_2，D_3，D_4 分别与对角 A 连

接，试以 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$ 表示矢量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$。

§8—2　空间直角坐标　矢量的坐标表达式

一、空间直角坐标系

为了确定平面上一点的位置，我们曾经建立了平面直角坐标系，现在为了确定空间一点的位置，需要建立空间直角坐标系。

从空间某一定点 o 引三条互相垂直的直线 ox、oy、oz，称为坐标轴。交点 o 称为坐标原点。选定三个坐标轴的正方向，如图 8.10 中箭头所示，并规定单位。这样就建立了空间直角坐标系。每两个轴确定的平面叫坐标面，显然各坐标面互相垂直。

空间直角坐标系可分为两类。若用右手握住 z 轴，四指由 x 轴的正向转到 y 轴正向姆指恰好指向 z 轴的正向，则这个坐标系称为右手系。〔图 8.10(a)〕如果用左手做同样的动作，姆指又恰好指向 z 轴的正向，则该坐标系称为左手系。〔图 8.10(b)〕本书采用右手系。习惯上，我们常把 xy 面放在水平位置，z 轴放在铅直的位置。x 轴仍称为横轴，y 轴仍称纵轴，z轴称为竖轴或立轴。

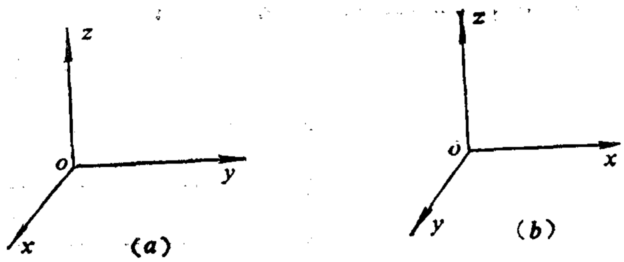


图 8.10

在空间直角坐标系中，任一点M可用三个有序数值表示它的位置。过M点作与三个坐标轴分别垂直的三个平面，这三个平面分别与 x 轴交于 A 点；与 y 轴交于 B 点；与 z 轴交于 C 点。若 A 点在 x 轴上的坐标为 x，B 点在 y 轴上的坐标为 y，C 点在 z 轴上的坐标为 z，则在空间可以用三个有序的实数(x, y, z)表示 M 点的位置，这一组有序的实数(x, y, z)就称为点 M 在空间直角坐标系中的坐标，x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标。如图 8.11 所示。反过来，若已知三个有序的实数 x, y, z，就可在坐标轴上分别定出 A，B，C 三点，过这三点分别作三个与各自坐标轴垂直的平面，则三平面必有一交点M。这样就在空间点 M 与有序数(x, y, z)间建立了一一对应关系。

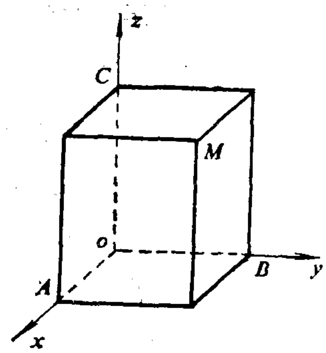


图 8.11

空间中任一点M的直角坐标还可以用下面的方法来确定：如图 8.12 所示。由 M 点向xy面作垂线，垂足为 P（P 是M点在 xy 面上的投影）然后由 P 分别向 x、y 轴作垂线，交 x轴于 A 点；交 y 轴于 B 点，有向线段 OA、OB、PM 的值，（$OA=x$，$OB=y$，$PM=z$）便是M点的坐标。

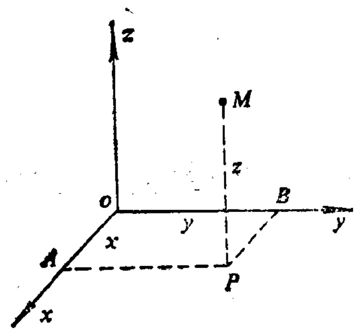


图 8.12

三个坐标面把整个空间分为八个部分，每一部分叫做一个卦限。在xy平面之上的卦限，按照xy平面坐标象限的次序分别为第一、第二、第三及第四卦限。在xy平面之下的卦限，按前四个卦限的顺序分别为第五、第六、第七及第八卦限。

在各卦限内点的坐标的符号如下表：

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

要注意一些特殊位置上点的坐标。在 yz 面上点的横坐标 $x=0$，在 xz 面上 的 点 $y=0$，在 xy 面上的点 $z=0$。在 x 轴上点的坐标 $y=0$，$z=0$，在 y 轴上 $x=0$，$z=0$，在 z 轴上 $x=0$，$y=0$。原点的坐标为$(0, 0, 0)$。

练习 1 在空间直角坐标系中，描出 $A(1, 2, 1)$，$B(-2, -1, -1)$两点的位置。

二、矢量的坐标表达式

利用矢量的加法，可把任一矢量分解为三个分矢量的和。

如图 8.13 所示，以原点为起点，M 点为终点的矢量$\overrightarrow{OM}$称为M点的矢径。今设有一矢径$\overrightarrow{OM}$，M点的坐标是(x, y, z)。

$$OA=x,\ OB=y,\ OC=z$$

由矢量加法得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}$$

因$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$，得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

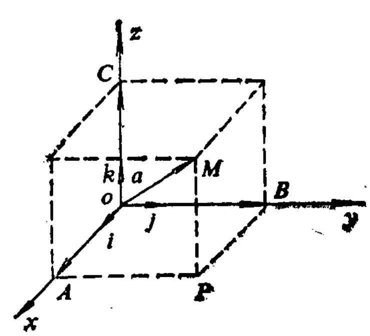


图 8.13

矢量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$叫做矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的**分矢量**。把矢量$\overrightarrow{OM}$表示为三个分矢量的和叫做矢量的分解。

在x轴上取一单位矢量，使其指向与x轴的正方向相同，记为$\boldsymbol{i}$；同样在y轴和z轴上也分别取与坐标轴相同指向的单位矢量$\boldsymbol{j}$及$\boldsymbol{k}$，这三个单位矢量$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$叫做**基本单位矢量**，因此得

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$$

于是$\overrightarrow{OM}$可表示为

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

这个表达式叫做矢量$\overrightarrow{OM}$的**坐标表达式或投影表达式**。

任一矢量$\overrightarrow{AB}$，始点A的坐标为(x_1,y_1,z_1)，终点B的坐标为(x_2,y_2,z_2)，设矢量$\overrightarrow{AB}$在三个坐标轴的投影分别为X，Y，Z，则有

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1$$

以原点为起点作与矢量$\overrightarrow{AB}$相等的矢径$\overrightarrow{OM}$，则M点的坐标为(X, Y, Z)，于是

$$\overrightarrow{AB}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

即
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

这是矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标表达式或投影表达式。

显然，若给定一矢量，其在三个坐标轴上的投影也必是确定的；反之，给定了三个坐标轴上的投影也必然确定唯一的矢量。因此$\overrightarrow{AB}$的投影X，Y，Z也称为$\overrightarrow{AB}$的坐标。矢量$\overrightarrow{AB}$也可用其坐标表示为$\overrightarrow{AB}\{X, Y, Z\}$或$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$。

练习2 已知$A(2,3,1)$，$B(5,2,3)$，求$\overrightarrow{AB}$的投影表达式。

利用矢量的投影表达式可将两矢量的相等、矢量的线性运算用其坐标表示出来。设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时必有

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_3=b_3$$

即两矢量相等时它们的对应坐标相等。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\pm(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\pm b_1)\boldsymbol{i}+(a_2\pm b_2)\boldsymbol{j}+(a_3\pm b_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即两矢量之和（或差）的坐标等于它们的对应坐标之和（或差）。

$$m\boldsymbol{a}=ma_1\boldsymbol{i}+ma_2\boldsymbol{j}+ma_3\boldsymbol{k}$$

即数与矢量的积的坐标等于该数与此矢量各个坐标的乘积。

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，于是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

即两矢量平行时对应坐标成比例。

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$-3\boldsymbol{a}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

解

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})=(1+3)\boldsymbol{i}+(-3-4)\boldsymbol{j}+(-4+5)\boldsymbol{k}$$
$$=4\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})=(1-3)\boldsymbol{i}+(-3+4)\boldsymbol{j}+(-4-5)\boldsymbol{k}$$
$$=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$$

$$-3\boldsymbol{a}=-3(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=-3\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$$

$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})-3(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})=(2-9)\boldsymbol{i}+(-6+12)\boldsymbol{j}+(-8-15)\boldsymbol{k}$$
$$=-7\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-23\boldsymbol{k}$$

例 2 设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$。若把线段 M_1M_2 分成定比为 λ 的两段，求分点 M 的坐标，

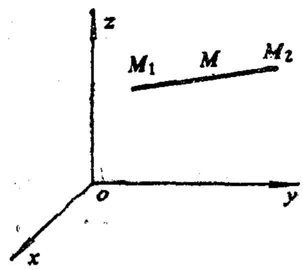


图 8.14

解 作矢量 $\overrightarrow{M_1M}$ 及 $\overrightarrow{MM_2}$，设 M 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，则有

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x)\boldsymbol{i}+(y_2-y)\boldsymbol{j}+(z_2-z)\boldsymbol{k}$$

由题意有 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$

于是 $(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}=\lambda[(x_2-x)\boldsymbol{i}+(y_2-y)\boldsymbol{j}+(z_2-z)\boldsymbol{k}]$

即有 $x-x_1=\lambda(x_2-x)$，$y-y_1=\lambda(y_2-y)$，$z-z_1=\lambda(z_2-z)$

解出 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

便是分点 M 的坐标，这是空间的定比分点公式。

若 M 是 M_1 及 M_2 的中点，则 $\lambda=1$，于是得两点的中点公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

练习 3 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$。

练习 4 求 $A(2,\ 3,\ 1)$与 $B(4,\ -1,\ -1)$的中点的坐标。

三、矢量的模

矢量的模就是矢量的长度。设矢量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，由图 8.13 看出 $OA=a_1$，$OB=a_2$，$OC=a_3$，

且
$$(OM)^2=(OP)^2+(PM)^2=(OA)^2+(OB)^2+(OC)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

于是
$$|\overrightarrow{OM}|=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

即矢量的模等于它在三个坐标轴上的投影的平方和的平方根。

若 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$，其中$(x_1,y_1,z_1)$与$(x_2,y_2,z_2)$分别是$A$与 B 点的坐标，则有

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这也就是在空间直角坐标系中两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$间的距离d的公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

于是从原点到 A 点的距离为

$$d=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

练习 5 求两点 $A(2,\ 3,\ 1)$，$B(4,\ -1,\ 2)$间的距离。

四、矢量的方向余弦

设有一矢量 $\overrightarrow{AB}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，在原点作一与$\overrightarrow{AB}$同方向的矢径$\overrightarrow{OM}$，而$\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴的夹角分别为 α、β、γ，于是$\overrightarrow{AB}$的方向也可由 α、β、γ 确定。角 α、β、γ 称为矢量$\overrightarrow{AB}$的方向角，规定它们在区间$[0,\pi]$内取值，这三个角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为矢量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦。

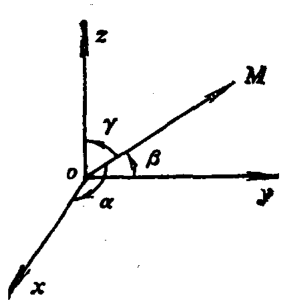


图 8.15

由图 8.15 看出

$$a_1=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,\quad a_2=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\ a_3=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma$$

于是

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

这是用矢量的坐标表示其方向余弦的公式。

把这三式平方后相加，得方向余弦间的关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

即一个矢量的方向余弦的平方和为 1，由此可知一个矢量的三个方向角不是完全独立的，只要知道两个方向角，便可定出第三个。

如果$\overrightarrow{OM}$是单位矢量，即$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}^\circ$，则

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}^\circ=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

例 3 已知 $A(1,2,3)$，$B(3,5,7)$ 求 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向余弦。

解 $a_1=3-1=2$，$a_2=5-2=3$，$a_3=7-3=4$

$\therefore$ $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{29}},\quad \cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

例 4 已知点$M(2,3,4)$，求$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式及$\overrightarrow{OM}$上单位矢量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 的坐标表达式。

解 $$\overrightarrow{OM}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

因 $$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

所以 $$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\overrightarrow{OM}}{\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i}+\frac{3}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\boldsymbol{k}$$

例 5 设有三力 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 作用于一点，它们的坐标依次为 $\boldsymbol{a}\{-2,3,-2\}$，$\boldsymbol{b}\{5,-2,5\}$ $\boldsymbol{c}\{4,3,1\}$，试求合力的大小与方向。