函數構造論

上冊

И. П. 納唐松著

科学出版社

函数構造論

上册

И. П. 納唐松著
徐家福　郑維行譯

科学出版社
1958年5月

ENA2/101

И. П. НАТАНСОН
КОНСТРУКТИВНАЯ
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва 1949 Ленинград

內 容 提 要

本書利用最簡單的分析工具(代数多項式与三角多項式)来討論(实变)函数的逼近理論．共分三部分：第一篇为最佳一致逼近理論，書中限于用古典分析的方法来处理函数逼近問題．在第二篇里，討論了直交多項式，平方逼近及矩量問題．最后一篇是研究內插过程与机械求积的收斂性問題．本書述理詳明，取材丰富，特别是对苏联数学家在这方面的巨大成就进行較多叙述，同时書中几乎未用到复变函数論方法．

譯本上册相当于原書的第一篇．

函 数 構 造 論

上 册

И. П. 納唐松著

徐家福 郑維行譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街117号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1958年5月第一版 书号：1136 字数：185,000
1960年2月第二次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 2,776—5,275 印张：7 11/16

定价：(10) 1.40元

序 言

函数構造論起源于我們偉大的数学家切彼曉夫(П. Л. Чебышев)的卓越工作:关于內插理論,机械求积,矩量問題,而尤其是关于与所給函数有最小偏差的多項式等. 他的門弟子科尔金(А. Н. Коркин),左洛达辽夫(Е. И. Золотарёв),馬尔可夫弟兄(А. А. и В. А. Марков)等繼承了切彼曉夫的工作.構造論的更进一步的發展也是与俄罗斯以及苏联学者們的名字分不开的,其中首先应当指出的是白恩斯坦(С. Н. Бернштейн). 事实上,正是他提出并解决了分析学这一分支的一系列基本問題使得函数構造論定形为一門独立的数学分科. 同时"函数構造論"这个名称也是С.Н.白恩斯坦所提出来的.

不論函数構造論的輝煌成就如何,可是作为数学的一个分科来說,对構成系統教程的純方法論上的問題还不能認为已經解决了,虽然巩恰罗夫(В. Л. Гончаров)在他的出色著作"內插法与逼近論"一書中对所述問題的解决曾經迈进了非常巨大的一步.

当編写这本書(它是近年来我在列宁格勒大学以及命名为赫尔岑的列宁格勒师范学院所教的选課的修正稿)时,呈現在我面前的任务便是要令人满意地解决上面所提到的方法論上的問題. 这时我所最关心的是闡明問題的思想实質,而把介紹大量实际材料給讀者这一任务只放在次要地位. 有鑒于此,我不打算用最一般性的,也不打算用最經济的方法来进行叙述. 因此,函数構造論上的很多問題根本就沒有提到. 然而,我希望讀者学过本書以后在閱讀杂志上的文献以及更精詳的著作时,將不会遇到困难了. 在那些著作中应当介紹的書是С. Н. 白恩斯坦的"多項式的極性"

以及阿希澤尔(Н. И. Ахиезер)的"逼近論講义"。

在我們大学数学系的現行教学計划中，函数構造論只是一門选修課程．我認为这門課程应当在第二、第三和第四学年連續講授几年．我尽力想使本書写得与这样一种教学上的安排相符合．所以在本書的第一篇中，我未用实变函数論的工具而用古典分析学的方法．从第二篇开始，我就不受这种限制了．至于复变函数論，則在本書中几乎沒有用到，因为我所研究的主要是純粹实变函数方面的問題，因此，就应尽量地采用实变函数中的方法．在討論解析函数的逼近的第一篇第九章的写法上有些專家可能会不同意我的意見．我之所以采用那样的叙述方法的理由，除了已經指出的打算用实变函数中的方法来解决实变函数方面的問題以外，我再举出兩种看法：第一，这种叙述方法是与第一篇的整个構成相协調的，在那里处处都是首先研究周期函数及三角逼近，而代数的情形可借助于誘导函数把它化为三角的情形．第二，必須注意到，最簡潔的叙述方法，就揭示問題的內在本質来說并不一定是最有益的方法．

当然，引入复变函数論的工具会使叙述簡化，但在我看来，本書所采用的推理方法却使問題的实質突出得格外显明．同时，在这里我应当承認必不可免地要放弃 С. Н. 白恩斯坦的重要公式

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n}=\frac{1}{\rho},$$

这便使我在最后决定采用这种叙述問題的方法以前，犹豫了很長一段时間．

本書的篇幅很是龐大．造成这种情形的主要原因是所述材料的丰富．然而还有别的原因：我想設法写得尽可能的詳尽与显明．在目前，極端扼要地来編写数学著作已經成为一种非常普遍的風气．而这样一来，很多的"容易看出"与"不难証明"的解释对讀者就成为很大的困难了．我認为这种風气是極有害的，因而我便尽

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

量地避免它. 很可能熟練的讀者在一連串的地方，特别是在第一篇中会發現我的叙述过于詳細了. 然而我認为無論闡明什么都宜宁多而勿少. 同时，在漸到書末时，叙述就变得越来越扼要了.

最后，我要向我的朋友加伏林 (M. K. Гаврин)，康托洛維奇 (Л. В. Канторович)，庫茲明 (Р. О. Кузьмин)，而特别是法捷也夫 (Д. К. Фаддеев) 致謝. 他們曾經給予我許多宝貴的意見与指正.

И. 納唐松

1948, 4, 4 于列宁格勒

目　录

第一篇　一致逼近

引　論

函数構造論是数学分析的一个分支，它所研究的是利用最簡單的分析工具来近似表达任意函数的問題.

在本書的第一篇中，我們將不去考虑非常广泛的函数类，而只限于研究下面兩个重要的函数类:

I. 定义在某一閉区間 $[a, b]$ 上的連續实函数的集合，我們將用 $C([a, b])$ 来表示.

II. 定义在整个实軸 $(-\infty, +\infty)$ 上的連續实函数，具有周期 2π，因而对于任何 x，都有

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

今后我們用 $C_{2\pi}$ 来表示所有这样的函数的集合.

我們用来近似地表示函数的那些最簡單的分析工具有：对于函数类 $C([a, b])$ 来說，便是通常的具有实系数的代数多項式

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n;$$

而对于函数类 $C_{2\pi}$ 来說，則为三角多項式，即形如

$$T(x)=A+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的具有实系数 A, a_k 及 b_k 的函数.

最后我們应当解释，一个多項式 $P(x)$ (或 $T(x)$) 接近于某一函数 $f(x)$ 这种說法的含义. 对于这个問題可以有各种不同的观点.

例如，像在本書第一篇中那样，如果对于一切 $x\in[a, b]$ 都有

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

我們就說多項式 $P(x)$ 接近于 $C([a, b])$ 中的某一函数 $f(x)$，其中 $\varepsilon>0$ 是某一常数，它表征出所达到的逼近程度.

与此相彷，如果对于所有实数 x 都有

$$|T(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

我們就認为三角多項式 $T(x)$ 接近于函数 $f(x)\in C_{2\pi}$.

但是，由于把 x 換成 $x+2\pi$ 后，$T(x)$ 及 $f(x)$ 之值都不改变，因而末一个不等式只要在某一个長度为 2π 的閉区間上，例如在 $[0, 2\pi]$ 上(甚至在右开左閉的区間 $[0, 2\pi)$ 上)成立，它便"自然而然地"在整个实軸上都成立.

由于是用这一原則来估計用多項式逼近函数的程度，于是我們便把相应的理論称为函数的一致逼近理論.

不难看出，在所述的观点下，对于 $C([a, b])$ 中的函数来說，可以把量

$$\max_{a\le x\le b}|P(x)-f(x)|$$

当作所达到的逼近程度的"度量"，而对于 $f(x)\in C_{2\pi}$，可以把量

$$\max_{-\infty<x<+\infty}|T(x)-f(x)|$$

当作所述的"度量". 这就是所謂 $f(x)$ 与 $P(x)$ (或对应地，$f(x)$ 与 $T(x)$) 間的"距离".

在本書第二篇中講述平方逼近理論时，我們將研究相当广泛的函数 $f(x)$ 的近似表示，所用的分析工具，主要还是那些通常的代数多項式 $P(x)$ 以及三角多項式 $T(x)$，可是估計达到逼近程度的标准却改变了.

那就是，我們要用积分

$$\int_a^b[P(x)-f(x)]^2dx$$

作为 $f(x)$ 与 $P(x)$ 之間的"距离的度量"，而对于估計三角多項式 $T(x)$ 与定义在 $[-\pi, +\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的偏差却引用积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[T(x)-f(x)]^2dx.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

我們看到，这种观点的改变导向完全另外的理論上去，其問題与結果也都是兩样。

最后，在第三篇中我們將研究內插問題，在那里我們并不用

$$\max_{a<x<b}|P(x)-f(x)|$$

或

$$\int_a^b [P(x)-f(x)]^2 dx.$$

这两个量作为多項式 $P(x)$ 与函数 $f(x)\in C([a, b])$ "接近"程度的标准，而使得 $P(x)$ 与 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上的某些預先选定的点（"內插結点"）

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

处的值相等。同样，可以提出用多項式 $T(x)$ 来逼近 $C_{2\pi}$ 中的函数 $f(x)$ 的問題，而諸結点都位于某一个長度为 2π 的閉区間上。

我們可以看到，对于这个問題的所有这些观点联系得如此密切，以致对应的理論深刻地相互貫穿着。各种代数的与分析的思想、方法与事实这种互相错綜的結合，使得函数構造論除了它的重大实用价值之外，还是数学中最美丽的部門之一。

第一篇

一致逼近

第一章

外尔斯特拉斯定理

§1. 外尔斯特拉斯第一定理

在一致逼近理論中，呈現在我們面前的第一个基本問題是：能不能用多項式去逼近任意的連續函数，而具有預先任意給定的精确度？1885年外尔斯特拉斯[1][1)]对这个問題給出了肯定的答案，其結果可敍述为

外尔斯特拉斯第一定理. 設 $f(x)\in C([a, b])$，对于任何 $\varepsilon>0$，都存在有这樣的多項式 $P(x)$，使得对于一切 $x\in[a, b]$

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

关于这个著名定理，現在有許多不同的証明方法. 我所要引用的一个証明，是以分析学中另一重要定理——C. H. 白恩斯坦[1]定理——为基础的.

引理 1. 恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x) \tag{2}$$

都成立.

---

1) 方括号中的数字是指書末所載文献中所引的資料.

証明. 恒等式(1)是極其显明的. 如果在牛頓二項公式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{3}$$

中令 $a=x$, $b=1-x$ 就可以得到了.

第二个恒等式証明較难. 在公式(3)中令 $a=z$, $b=1$, 便得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k=(z+1)^n. \tag{4}$$

微分(4)并用 z 乘所得結果,便得

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k z^k=nz(z+1)^{n-1}. \tag{5}$$

微分(5)再用 z 乘所得結果,便得

$$\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k z^k=nz(nz+1)(z+1)^{n-2}. \tag{6}$$

在恒等式(4),(5)及(6)中令

$$z=\frac{x}{1-x}$$

并用 $(1-x)^n$ 乘所得諸等式,于是便导出了三个新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(nx+1-x). \tag{9}$$

要想由此获得所需要的恒等式(2),只須用 n^2x^2, $-2nx$ 及1分别乘(7),(8)及(9),并將所得結果相加即可.

推論. 对于任何 x, 都有

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}. \tag{10}$$

因为,

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0,$$

所以

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}.$$

引理 2. 設 $x\in[0, 1]$，且 δ 是任意正数．用 $\Delta_n(x)$ 表示整数 $0, 1, 2, \cdots, n$ 中滿足不等式

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta \tag{11}$$

的那些值 k 所成的集合，則

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}. \tag{12}$$

証明. 若 $k\in\Delta_n(x)$，根据 (11) 就有

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1.$$

所以

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\Delta_n(x)}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

如果在右方的和中，遍取 $k=0, 1, 2, \cdots, n$ 以求和，則此和只可能增大，因为当 $x\in[0, 1]$ 时所有新添的加数（对应于 $0, 1, 2, \cdots, n$ 中那些不含于 $\Delta_n(x)$ 中的 k）都不是負的，于是由不等式 (10) 就立刻推出所需的不等式 (12)．

已証明的引理的含意，粗略地說，便是：当 n 很大时，在和

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{13}$$

中起主要作用的只是滿足条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$$

的那些 k 值所对应的加数，而其余的項对和的值几乎沒有什么影响．

定义. 設 $f(x)$ 为定义于閉区間 $[0, 1]$ 上的函数．称多項式

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

为函数 $f(x)$ 的白恩斯坦多項式.

不难預料，若 $f(x)$ 連續，則当 n 很大时这多項式与 $f(x)$ 就相差極微. 事实上，我們已經指出了，和(13)中 $\frac{k}{n}$ 远离 x 的那些項，几乎不起什么作用. 这对多項式 $B_n(x)$ 亦然，由于因子 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 是有界的. 所以在多項式 $B_n(x)$ 中，只有 $\frac{k}{n}$ 十分靠近 x 的那些加数才是重要的. 可是在这些項中，因子 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 几乎与 $f(x)$ 無异(連續性!). 这就意味着，如果用 $f(x)$ 来代替 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 的話，多項式 $B_n(x)$ 几乎沒有改变. 换句話說，近似等式

$$B_n(x) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

成立. 从而根据(1)便立刻推得

$$B_n(x) \approx f(x).$$

以下所述的定理給出了这种帶有啓示作用的推理方法的精确形式:

白恩斯坦定理. 若 $f(x)$ 在閉区間 $[0, 1]$ 上連續，則对于 x 一致有

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x). \tag{14}$$

証明. 用 M 表示 $|f(x)|$ 的最大値. 其次，取任意的 $\varepsilon>0$，由于函数的一致連續性，可以求出这样的 $\delta>0$，使得当

$$|x''-x'|<\delta$$

时便有

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

把这些作好后，我們从 $[0, 1]$ 中选取任意的 x.

由(1)得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

因而

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (15)$$

現在把整数 $k=0, 1, \cdots, n$ 分为兩組：$\Gamma_n(x)$ 及 $\Delta_n(x)$，而令

$$k\in\Gamma_n(x), \quad 若 \quad \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta,$$

$$k\in\Delta_n(x), \quad 若 \quad \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta.$$

与此相应，把和 (15) 也分成兩組：$\sum_\Gamma$ 及 $\sum_\Delta$。在其中的第一个和式中

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因而

$$\left|\sum\nolimits_\Gamma\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in\Gamma_n(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

又因

$$\sum_{k\in\Gamma_n(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1,$$

于是

$$\left|\sum\nolimits_\Gamma\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (16)$$

在第二个和式中

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant 2M,$$

因而根据(12)便得

$$\left|\sum\nolimits_\Delta\right|\leqslant 2M\sum_{k\in\Delta_n(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}.$$

把这个不等式与不等式(16)比較，我們便得

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}.$$

若 n 充分大 $(n>N_\varepsilon)$，則

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com