

工科研究生用书

马维祯 殷瑞祥 编著



# 子波分析与子波变换

华南理工大学出版社

0211.64  
M24

412310

· 工科研究生用书 ·

# 子波分析与子波变换

马维桢 殷瑞祥 编著

国家自然科学基金

资助项目

广东省自然



华南理工大学出版社

· 广 州 ·

图书在版编目(CIP)数据

EA02/11

子波分析与子波变换/马维祯,殷瑞祥编著. —广州:华南理工大学出版社,1996.10

ISBN 7-5623-1079-3

I. 子...

I. ①马... ②殷...

Ⅲ. 滤波理论

IV. O211.64

华南理工大学出版社出版发行

(广州·五山 邮编 510641)

责任编辑 江厚祥

各地新华书店经销

华南理工大学印刷厂印装

开本:850×1168 1/32 印张:6.375 字数:170千

1996年10月第1版 1996年10月第1次印刷

印数:1—2000

定价:9.00元

## 出版说明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程,是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来,我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书,有的已正式出版,但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要,我校决定出版“工科研究生用书”系列教材。

“工科研究生用书”以公共课和部分学术专著为主,专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。我们希望,本系列教材能从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,既包含本门课程的基本内容,又反映我校工科研究生的特点,并在该学科领域内求新、求深、求精,使学生掌握必需的基础理论和专门知识。学位课教材还应包含学科前沿和交叉学科的丰富内容,反映国内外最新研究成果,学术思想活跃,适应目前科学技术发展的形势。学术专著要充分反映作者的研究成果和学术水平,阐述自己的学术见解,对实现研究生培养目标、提高教育质量起重大作用。

“工科研究生用书”的内容结构和阐述方法,力求条理清楚,论证严谨,具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚,限于我们的水平和经验,本系列教材难免有错误和不足之处,恳请读者指正,我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

1992年3月

## 前 言

子波的概念始于本世纪初, 1910 年 Haar 构造了第一个子波基, 但是当时满足紧支规范正交条件的子波基只有 Haar 函数, 因而限制了子波的应用. 80 年代一批数学家、物理学家、地理学家环绕基本子波概念奠定了坚实的数学基础, 形成了子波理论. 值得一提的是比利时数学家 Daubechies 基于离散滤波器的迭代方法构造了所有满足紧支规范正交的子波基, 为子波理论的实际应用创造了条件, 从而使子波分析成为傅里叶分析发展史上一个新的里程碑.

80 年代后期, 在子波理论发展的同时, 其他学科环绕相同的观点也取得了进展. 正如上述子波分析是用子波的原型函数来实现, 而原型函数可以看成是一带通滤波器, 因此子波分析是通过滤波器的滤波来实现. 带通滤波器要具有恒定相对带宽, 而恒定相对带宽的重要性在信号处理的滤波器组和之后的子带编码理论已经得到充分的认识, 例如 Bach 提出的音乐的分度是指数式的间隔, 语音的子带编码使用信号的倍频程分割, 滤波器组理论的正交镜像滤波器 QMF 等. 1988 年 Mallat 将计算机视觉领域内多尺度分析的思想引入信号处理领域, 提出了多分辨分析的概念, 用多分辨分析来定义子波, 给出和 FFT 相对应的快速子波算法——Mallat 算法, 并将它用于图象分析和压缩重构, 开创了子波理论在信号处理领域的应用, 使得子波分析与子波变换成为信号处理学科的一个新的分支, 并得到迅速的发展. 因而, 可以说

子波分析与子波变换是几个学科环绕相同观点分别独立地发展，又在80年代后期相互结合的结果。这几个学科是数学的子波理论、信号处理的滤波器组或子带编码理论和计算机视觉的多分辨率分析理论。

由于子波变换是信号处理的新的理论和工具，是当前信号与信息处理学科的前沿课题，我校硕士和博士学位论文题目有很多涉及用子波变换这一新的理论来处理图象和语音以及非平稳信号的分析的研究，为了适应学科的发展和开展我校承担的科研项目研究，有必要在研究生的课程中增设子波分析与子波变换课程。1993年根据我校硕士研究生培养方案我们承担了这一任务，编写了子波分析与子波变换的研究生讲义，开始在92级硕士研究生和博士生中讲授这一课程，此后又在93, 94, 95级研究生教学使用过程中作了修改。我们编写的这本书将子波理论和信号处理结合起来，具有以下特点：①是根据80年代后期以来发表的子波理论应用于信号处理的重要文献的研究成果编写的，基本反映了到1996年初的子波理论在信号处理中的应用的最新理论和新动向；②是我们承担的国家自然科学基金项目《子波变换的快速算法和时间-尺度信号分析》和广东省科学基金项目《利用子波变换算法的多媒体系统信息压缩技术》、《三维子波变换的视频信息压缩技术及其硬件实现》的部分研究内容组成，也反映了我们在承担该几项项目中的研究成果，原讲义获得华南理工大学1994年优秀讲义一等奖。现在我们在修改过的讲义基础上编写了这本偏重于信号处理的子波理论的研究生教材。

鉴于子波理论、滤波器组和多分辨率分析相互紧密的关系，本书将着重从信号处理的角度来介绍子波分析和子波变换，因此将从这三方面的研究成果来组织本书的主要内容。我们这样做是一个初步的尝试，目的在于使子波分析和子波变换这一新的信号分析的工具能够得到广泛的应用。为了使理论与实际应用相结合，

书后附录了二维非分离型子波分解和重构的 C++ 源程序，故本书适合于通信及电子系统、信息与信号处理和电路与系统学科师生阅读，也可供计算机应用、开发的工程技术人员阅读。

本书在编写过程中得到华南理工大学研究生处、无线电与自动控制研究所和电工教研室以及徐秉铮教授、叶梧教授和王定中副教授的大力支持和帮助，在此致以谢意。由于从信号处理的角度来介绍子波理论是初步的尝试，错误在所难免，希望读者提出宝贵的意见。

编 者

一九九六年四月于华南理工大学

# 目 录

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 第一章 序言 .....                     | 1  |
| § 1-1 子波理论的发展 .....              | 1  |
| § 1-2 傅里叶变换存在的问题 .....           | 3  |
| § 1-3 子波变换的引入 .....              | 5  |
| § 1-4 子波理论、滤波器组和多分辨分析之间的关系 ..... | 8  |
| § 1-5 信号分析的数学基础 .....            | 9  |
| § 1-6 本书的内容 .....                | 19 |
| 第二章 完全重构滤波器组 .....               | 21 |
| § 2-1 子带编码和滤波器组 .....            | 21 |
| § 2-2 双通道滤波器组的完全重构条件 .....       | 22 |
| § 2-3 滤波器组的多相位表示式 .....          | 27 |
| § 2-4 正交镜像滤波器组 .....             | 28 |
| § 2-5 有限长度滤波器的边界延拓 .....         | 31 |
| § 2-6 二维非分离型滤波器组 .....           | 34 |
| § 2-7 二维分离型滤波器组 .....            | 37 |
| § 2-8 三维滤波器组 .....               | 39 |



|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 第三章 多分辨信号分解—子波表示式 .....               | 41  |
| §3-1 多分辨分析的性质 .....                   | 42  |
| §3-2 尺度函数的概念 .....                    | 45  |
| §3-3 子波函数的概念 .....                    | 52  |
| §3-4 多分辨分析和子波分析之间关系 .....             | 56  |
| §3-6 Mallat 算法 .....                  | 58  |
| §3-7 离散子波变换的迭代算法 .....                | 61  |
| 第四章 多维多分辨分析 .....                     | 67  |
| §4-1 分离型二维多分辨率分析 .....                | 67  |
| §4-2 分离型二维多分辨率分析的实现——二维Mallat算法 ..... | 74  |
| §4-3 非分离型多维多分辨率分析 .....               | 76  |
| §4-4 三维多分辨率分析的实现 .....                | 82  |
| 第五章 子波基的构造 .....                      | 85  |
| §5-1 正交子波基的构造 .....                   | 85  |
| §5-2 双正交子波基的构造 .....                  | 94  |
| §5-3 利用无限冲激响应滤波器IIR实现子波分解 .....       | 100 |
| §5-4 正交和双正交二维非分离型滤波器 .....            | 105 |
| 第六章 连续子波变换和框架 .....                   | 108 |
| §6-1 连续子波变换 .....                     | 108 |
| §6-2 连续子波变换的框架 .....                  | 116 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| §6-3 用B-样条函数逼近连续子波变换 .....             | 122 |
| 第七章 子波变换的计算复杂性 .....                   | 124 |
| §7-1 计算复杂性的评价标准 .....                  | 124 |
| §7-2 离散子波变换直接实现的计算复杂性 .....            | 125 |
| §7-3 基于FFT的离散子波变换的计算复杂性 .....          | 128 |
| §7-4 短滤波器DWT算法的计算复杂性 .....             | 130 |
| 第八章 信号压缩和子带编码 .....                    | 132 |
| §8-1 基于线性变换的压缩系统 .....                 | 132 |
| §8-2 语音和音频信号的压缩 .....                  | 137 |
| §8-3 图象压缩 .....                        | 138 |
| §8-4 视频信号的子波变换压缩 .....                 | 141 |
| §8-5 非平稳信号的分析 .....                    | 143 |
| 参考文献 .....                             | 145 |
| 附录A 六级非分离二维离散子波正变换程序(ANA_6.CPP) ....   | 154 |
| 附录B 六级非分离二维离散子波反变换程序 (SYN_6.CPP) ..... | 165 |
| 附录C 二维离散傅里叶变换程序 (DFT.CPP) .....        | 177 |

# 第一章 序 言

## § 1-1 子波理论的发展

子波理论的思想形成于本世纪初, Haar 在 1910 年提出第一个子波规范正交基, 即人们所熟知的 Haar 系。经过半个世纪以来数学家、物理学家、地理学家的共同努力, 已发展为统一的理论框架, 使子波分析成为傅里叶分析发展史上一个新的里程碑。1936 年 Litterwood 和 Paley 对傅里叶级数建立了二进制频率分量分组理论——L-P 理论<sup>[1]</sup>, 即按二进制频率成分分组傅里叶变换的相位变化本质上并不影响函数的形状和大小, 这是多尺度分析思想的最早起源。1952 年后的 10 年间, Calderon, Zygmund, Stern 和 Weiss 等人将 L-P 理论推广到高维, 并且建立了奇异积分算子理论。1965 年 Calderon 又给出了再生公式, 1975 年 Calderon 用他的再生公式给出抛物型空间上  $H^1$  的原子分解, 这个公式后来成为许多函数分解的出发点, 它的离散形式已接近子波展开, 只是还没有得到组成一正交系的结论。此后许多数学家分别对各种不同的目的, 给出各类函数空间的“原子分解”、“分子分解”、“拟正交展开”、“弱正交展开”、“框架展开”等。1976 年 Peetre 在用 L-P 方法给出 Besov 空间统一描述的同时, 给出了 Besov 空间的一组基, 其展开系数的大小刻画了 Besov 空间本身。1981 年 Stromberg 通过对 Haar 系的改进, 引入了 Sobolev 空间  $H^3$  的正交基, 为子波分析奠定了基础。

80 年代中期由一批数学家等领导的“French School”环绕基

本子波概念为这一课题奠定了坚实的数学基础。子波 Wavelet(又译小波)变换是由法国数学家 Morlet 于 1980 年提出的, 他与法国理论物理学家 Grossman 共同提出连续子波变换的几何体系, 其基础是平移和伸缩(即仿射群)下的不变性<sup>[2]</sup>, 这使得能将一个信号分解成对空间和尺度(即时间)的独立贡献, 同时又不丢失原有信号的信息, 因此子波作为函数, 它的平移伸缩系用于在可测平方可积空间  $L^2(R)$  展开的概念是由 Grossman 和 Morlet 首先引入的。1985 年法国数学家 Meyer 在连续子波理论的容许性及重构公式之后承认了 Calderon 恒等式, 之后又与比利时数学家 Daubechies 以及 Grossman 通过构成  $L^2(R^n)$  的一个准正交完全集的方式选取连续子波空间的一个离散子集, 称之为框架, 并证明了一维子波函数  $\psi$  的存在性<sup>[3]</sup>。Lemarie 将这一结果推广至  $n$  维情形, 同时 Meyer 和 Battle 又分别给出了具有指数衰减特性的子波函数。它的平移伸缩系构成  $L^2(R)$  的规范正交基, 从尺度函数出发构造出了子波正交基。新理论对相关学科的发展有着重要的影响, 1988 年 Mallat 将计算机视觉领域的多尺度分析的思想引入到子波分析中, 提出多分辨分析(或逼近)概念, 用多分辨分析来定义子波, 给出了构造正交子波基的一般方法和与 FFT 相对应的快速子波算法——Mallat 算法, 并将它用于图象分析和完全重构<sup>[4]</sup>。值得一提的是 Daubechies 基于离散滤波器迭代方法构造了紧支集规范正交子波基, 证明了具有有限支集正交子波基的存在性, 将在那时之前的所有正交子波的构造统一起来, 并为以后的构造设定了框架<sup>[5]</sup>。随后她又发表了长篇综述<sup>[6]</sup>, 对子波理论的发展和推广起到积极的作用。Mallat 将子波理论与信号处理联系起来, 开创了子波理论在信号处理中的应用。子波分析已经和将广泛应用于量子场论、地震勘探、计算机视觉等许多科学领域, 原则上讲, 传统使用傅里叶分析的地方, 现在都可以用子波分析取代。子波分析优于傅里叶分析的地方是它在时间域和频

率域同时具有良好的局部化性质。由于对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长，从而可以聚焦到对象的任意细节。从这个意义上讲，它被人们誉为数学显微镜，可以预料在今后它将成为科技工作者经常使用的又一锐利的重要数学工具。

## §1-2 傅里叶变换存在的问题

在深入讨论子波变换之前，先研究一下傅里叶变换所存在的问题。傅里叶变换(傅里叶分析系数)用无穷区间上的复正弦基函数和信号的内积描述了信号中总的频率分布，它将原时域信号的研究转换为在频域上的傅里叶分析系数的研究，傅里叶分析是纯频域分析。从信号处理角度讲，傅里叶分析认为信号 $f(t)$ 在每个时刻 $t$ 的值是频率 $n\omega$ 各个复正弦分量的迭加，傅里叶变换有它本身固有的缺点，它只适用于确定性的平稳信号，在时空域上傅里叶变换没有任何分辨，傅里叶变换 $F(\omega)$ 在有限频域上的信息都不足以确定在任意小范围内的函数 $f(t)$ ，特别是非平稳信号在时间轴上的任何突变，其频谱将散布在整个频率轴上。为了克服这一缺点，Gabor于1946年引入窗口或短时傅里叶变换(short-time Fourier transform)。设有信号 $f(t)$ 以及在时轴以 $\tau$ 为中心有限时窗 $w(t)$ 是平稳的，则短时信号 $f(t)w(t-\tau)$ 具有以下傅里叶变换

$$F_{ST}(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

短时傅里叶变换将信号映射到一个时频平面 $(\tau, \omega)$ 中的一个二维函数。从滤波器的角度来看，在给定的频率 $\omega$ ，式(1.1)意味着在整个时域以一个带通滤波器对 $f(t)$ 滤波，带通滤波器的冲激响应就是调制在该频率 $\omega$ 的窗函数。如 $w(t)$ 的傅里叶变换为

$W(\omega)$ ，定义滤波器的带宽  $\Delta f$  为

$$\Delta f^2 = \frac{\int f^2 |W(f)|^2 df}{\int |W(f)|^2 df} \quad (1.2)$$

其中分母为时窗的能量。两个正弦波只有当频率差大于  $\Delta f$  时才能被分辨出来，所以短时傅里叶变换分析的频率分辨率为  $\Delta f$ 。同理，时间间隔  $\Delta t$  为

$$\Delta t^2 = \frac{\int t^2 |w(t)|^2 dt}{\int |w(t)|^2 dt} \quad (1.3)$$

两个时间上的脉冲只有时间差大于  $\Delta t$  时才能被分辨出来，测不准准则或 Heisenberg 不等式指出时域和频域的分辨率不能任意小。时间带宽积的下限为

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1 / (4\pi) \quad (1.4)$$

这就是说我们可以用时间分辨率来换取频率分辨率，或者相反，用频率分辨率来换取时间分辨率。虽然短时傅里叶变换实现了时-频域分析，但仍存在着局限性，一旦选定了窗函数，相应的时间分辨率和频率分辨率也就不能改变了。为了克服短时傅里叶变换的这一局限性，希望时域分辨率  $\Delta t$  和频率分辨率  $\Delta f$  在时-频平面上变化，时域分辨率随着滤波器中心频率的增加而增加，即  $\Delta f$  和  $f$  成正比

$$\Delta f / f = c \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.5)$$

当满足式(1.5)时， $\Delta f$  以及  $\Delta t$  随着滤波器的中心频率的变化而变化，但仍应满足 Heisenberg 不等式，即时间分辨率在高频时变得非常细，而频率分辨率在低频时变得非常好。这种分析对于由短时高频成分和长时低频成分组成的信号可以得到非常好的分析结果，这就是子波分析的思想。

### §1-3 子波变换的引入

从信号分析的角度来看, 要求基函数在不同要求时有不同的波形, 例如为了孤立信号的不连续性, 希望基函数非常短; 而在求得细频率分析时又要求基函数非常长, 因此原型子波基应该具有下列形式:

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (1.6)$$

即分析滤波器的冲激响应被定义为原型子波  $\psi(t)$  的尺度描述 (scale version).  $a \in R^+$  为尺度因子, 对大的  $a$ , 基函数变为伸张型的宽型子波的低频函数; 当  $a$  很小时, 基函数变为压缩型的窄型子波的高频函数. 式中用  $1/\sqrt{a}$  来对能量进行归一化.

连续子波变换定义为信号  $x(t)$  和子波基的内积<sup>[5]</sup>

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.7)$$

$\psi(t)$  满足容许性条件 (admissibility condition)

$$\int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.8)$$

式中  $\Psi(\omega)$  是  $\psi(t)$  的傅里叶变换

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \psi(t) dt \quad (1.9)$$

式(1.8)的容许性条件意味着:

① 如  $\psi(t)$  具有充分衰减, 则  $\psi(t)$  具有零均值

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (1.10)$$

②  $\psi(t)$  具有振荡性, 即其振幅具有正负相间的振荡.

连续子波变换具有恒定的相对带宽  $\Delta f/f = C$ . 设  $a = f_0/f$ ,

其中  $f = f_0/a$  为局部频率,  $f_0$  为给定频率, 则在给定频率  $f_0$  时,  $a$  愈小, 局部频率愈宽; 而  $a$  愈大, 局部频率就愈窄. 局部频率又称分析频率, 它取决于子波基, 不再和调制频率相联系, 而是和时间尺度相联系.

如对  $a$  取离散值,  $a = 2^j$ ,  $j$  为倍频程 (octave) 次数, 则

$$W(2^j, b) = \int \psi * \left( \frac{t-b}{2^j} \right) x(t) dt \quad (1.11)$$

称为子波级数, 相当于傅里叶级数. 必须注意子波变换的有限能量并不完全等于子波级数的有限能量, 这取决于抽样率和  $\psi(t)$ ,  $\psi(t)$  平方可积的条件将由有关滤波器的条件来代替, 下面将会讨论.

进一步取  $b$  为  $a$  的倍数,  $b = 2^j n$ , 则

$$W(2^j, 2^j n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int \psi * \left( \frac{t}{2^j} - n \right) x(t) dt \quad (1.12)$$

定义为离散化子波级数, 对应于离散傅里叶级数. 如  $x(t)$  改为离散信号  $x(k)$ , 则

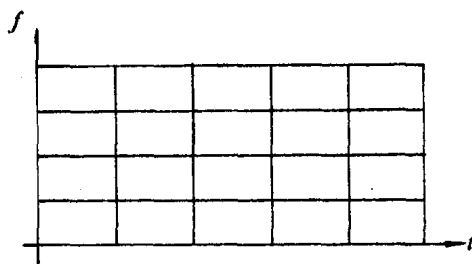
$$w'_n = w(2^j, 2^j n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \sum_k \psi * (2^{-j} k - n) x(k) \quad (1.13)$$

称为离散子波变换, 对应于离散傅里叶变换. 为了说明短时傅里叶变换和子波变换基函数在时频平面上的覆盖情况, 用图1.1加以表示. 短时傅里叶变换的基函数频率改变, 而尺度不变, 子波变换的基函数频率变化是随着尺度变化而变化, 尺度加大, 频率减小, 尺度减小, 频率增大.

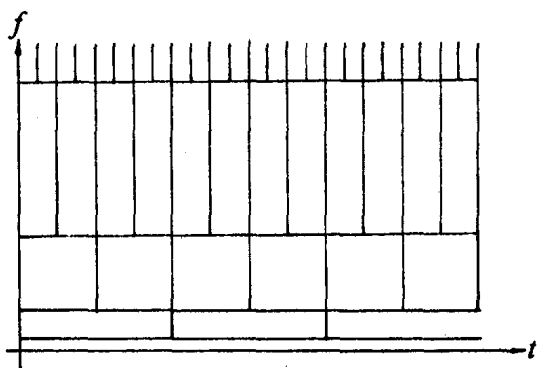
在信号处理中仍在应用的原型子波基是由Morlet等人提出的已调高斯函数

$$\psi(t) = e^{j\nu_0 t} e^{-t^2/2} \quad (1.14)$$





a) 短时傅里叶变换



b) 子波变换

图1.1 短时傅里叶变换和子波变换基函数在时频平面的覆盖情况

$\psi(t/a)$  的傅里叶变换为

$$\Psi(a\omega) = a e^{-(\omega - (\nu_0/a)^2 a^2)/2} \quad (1.15)$$

式中  $\nu_0/a$  为分析频率。在实际应用中运算总是离散的和有限长度的，因此要求子波函数也是有限长度，数学上则称为紧支集 (compact support)。所谓紧支集，即在有限的区间外函数为零。但直至目前为止，紧支集规范正交子波只有 Haar 函数：