中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

微積分學教程

第三卷　第二分册

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ 著

吳親仁 路見可譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

微積分學教程

第三卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
吳親仁　路見可譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的菲赫金哥爾茨(Г. М. Фихтенгольц)所著"微積分學教程"(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第三卷1949年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲大學數學系學生及研究生用教科書。

本書共三卷,第一卷由同濟大學楊弢亮、南京大學葉彥謙合譯,第二卷由北京大學數學系集體翻譯,第三卷由武漢大學路見可等譯。

本書(第三卷)中譯本暫分三册出版。第一分册內容爲曲線積分,斯底爾吉積分及二重積分;第二分册內容爲曲面積分,二重及多重積分;第三分册則全部是傅立業級數。

微 積 分 學 教 程

第三卷 第二分册

吳親仁 路見可譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠 印 刷
(52281C2)

1953年12月初版 版面字數154,000
印數1—7,000 定價¥10,000

第二分册目錄

第十七章　曲面面積・曲面積分

§1.　雙側曲面

§2.　曲面面積

§3.　第一型的曲面積分

§4.　第二型的曲面積分

第十八章 三重積分及多重積分

§1. 三重積分及其計算

§2. 高斯一奧斯特洛格拉斯基公式

§3. 三重積分中的變數更換

§4. 場論初步

§5. 多重積分

第十七章　曲面面積・曲面積分

§1　雙側曲面

593. **曲面的側**　讓我們首先來建立在以後敍述上佔重要地位的曲面的側這一概念。

在許多情形中，這個概念是通過直覺就可以瞭解的。如果曲面是由形如 $z=f(x, y)$ 的顯方程給出，那就可以說到這曲面的上側或下側。* 如果曲面範圍着一個立體，那也容易想像到它的兩側——朝向於立體的內側，與朝向於立體的周圍空間的外側。

從這直覺的概念出發，我們現在要對曲面的側這個概念給以確切的定義。

考慮一個光滑的曲面(S)，它是封閉的或者是由一段一段光滑的邊緣所圍成的，並且它上面沒有奇異點；因此，在這曲面的各點處都有一確定的切面，它的位置隨着切點位置的改變連續地改變。

在曲面上取一定點 M_0，並在這點處引一法線，這法線有兩個可能的方向（它們可用方向餘弦的符號來區別），我們認定其中一方向。沿曲面畫一個起自 M_0 而又回到 M_0 的閉路，並假定它不越過曲面的邊緣。令點M繞着這閉路進行，並在其各個接續的位置上給與法線一個方向；這些方向就是由我們在起點 M_0 處所選定的那個法線方向連續地轉變來的。這時下面兩種情形必有一種發生：在點M進行一周再回到 M_0 時，法線的方向或與出發時所定者相同，或與出發時所定者相反。

如果對於任一點 M_0 及任一通過 M_0 的路線 M_0AM_0，後一種情形發生，則對於其它任一點 M_1 也容易作出一個起自 M_1 而又回到 M_1 的

* 我們常採用這類說法，這時是指 z 軸本身是垂直向上的。

閉路，使回到 M_1 時法線的方向與起初所定者相反。例如，假若我們理解 $M_1 M_0$ 爲曲面上連接 M_1 與 M_0 兩點但不越過曲面的邊緣的任一曲線，而 M_0M_1 爲與其方向相反的同一曲線，則 $M_1M_0AM_0M_1$ 就是這樣的一個閉路。

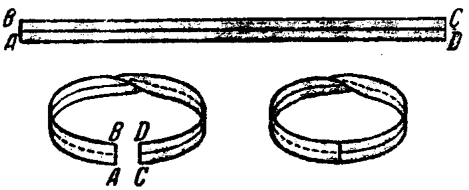

圖 82

在這情況下曲面叫做是**單側的**。所謂的莫彼阿斯條(圖82)就是這類曲面的一個典型的例子。如果我們把一長方形紙條 $ABCD$ 先扭一次，再黏起來，使 A 點與 C 點相合，B 點與 D 點相合，我們就可得到它的一個模型。假若用一種顏色來塗這個扭成的環帶，那就可以不越過它的邊緣而用這種顏色塗遍環帶的全部。像這一類的曲面不在我們今後討論之列。

現在我們假定不論 M_0 是怎樣的點，不論通過 M_0 而不越過曲面邊緣的線是怎樣的閉路，沿此線進行一周再回到起點 M_0 時，法線的方向與起初所定者相同。在這些件條下曲面叫做是**雙側的**。

設 S 是一個雙側曲面。在 S 上取任一點 M_0 並給在這點處的法線一個確定的方向。取這曲面的其它任一點 M_1, 我們用任一個在曲面上但不越過曲面的邊緣的路線 (K) 來連接 M_0 與 M_1, 並令點 M 沿這路線從 M_0 進行到 M_1. 如果這時法線的方向連續地改變，則點 M 到達 M_1 的位置時就帶着一個完全確定的法線方向，不倚賴於路線 (K) 的選擇。實際上，假若說 M 沿着兩個不同的路線 (K_1) 與 (K_2) 從 M_0 進行到 M_1 時我們會在 M_1 處得到兩個不同的法線方向，則閉路 $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$ 就會使得回到 M_0 時帶着的法線方向不同於起初的法線方向。這和雙側曲面的定義相矛盾。

由此可見，在雙側曲面上，一個點上的法線方向的選擇唯一地決定全部點上的法線方向的選擇。**曲面上全部點的集合連同那按指定的**

規則對這全部點上的法線所給與的方向，叫做曲面的一個定側。

594. 例　1° 最簡單而又最重要的雙側曲面的例子是用顯方程 $z=f(x,y)$ 表達的曲面，這裏的函數 z 是假定在某一平面境域 (D) 內連續的，並且在這境域內有連續的偏導數，

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad 與 \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在這種情況下曲面的法線方向餘弦具有表達式：

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

在根式前選取一確定的符號後，我們這樣就在曲面的全部點上都建立了確定的法線方向。因爲根據假設，方向餘弦是點的坐標的連續函數，故所建立的法線方向也連續地依賴於點的位置。由此顯然可見，在 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 的公式中根式前符號的選擇，正是在以前所說的曲面的側這個概念的意義之下，確定了曲面的一側。

如果我們在根式前選取正號，則在曲面的全部點上

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的，就是說與選定的一側對應的法線和 z 軸作成的角是銳角。因此，由這選定的符號所確定的曲面的一側是上側。反之，在法線方向餘弦的表達式中負號的選取就顯示出曲面的下側（全部法線都和 z 軸作成鈍角）。

2° 我們現在考慮，更一般地，任意一個由參數方程

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \tag{1}$$

給出的非封閉的光滑曲面 (S)，並且參數 u, v 在 uv 平面上某一有界境域 (Δ) 內變化。光滑性的要求就是說 (1) 中各函數及其偏導數都在 (Δ) 內是連續的，並且在曲面上沒有奇異點。此外（特別着重地指出），我們假定重點不出現，是要使曲面的每一點只能從參數 u, v 的一對值得到。

如果像尋常一樣用 A, B, C，表示矩陣

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix}$$

中三個行列式，則由假設恆有 $A^2+B^2+C^2>0$，而曲面的法線方向餘弦可用熟知的公式來表達：

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

並且在這情況下根式前符號的選擇顯示出曲面一側，所以曲面是雙側的。實際上.如果符號已選定，則對於曲面的每一點(因爲只有 u, v 的一對值對應於它!) 公式 (2) 和一個確定的法線方向相對應。當點移動時，法線方向連續地改變。

違背了無重點的假定時，那就不能無條件地肯定說這曲面是雙側的。因爲和曲面的重點 M_0 至少對應有參數的兩對不同的值 u_0, v_0 與 u_1, v_1，而對於這兩對值即使把根式前的符號取得一樣，公式 (2) 仍可能對 M_0 處的法線定出兩相反的方向。如果眞是這樣，則這曲面一定是單側的。實際上，我們連接點 $m_0(u_0, v_0)$ 與點 $m_1(u_1, v_1)$ 成爲 uv 平面上一個曲線 m_0m_1；於是沿這曲線我們得到曲面 (S) 上一個起自 M_0 而再回到 M_0 的閉曲線：若一個點帶着一個法線方向從 M_0 出發，則環行這曲線一周而回到 M_0 時，它所帶的法線方向已與出發時所定者相反!

3° 若一光滑的曲面 (S) 是閉的而且範圍着某一個立體，則它具有兩側——內側與外側——是很明顯的。設這曲面是由 (1) 中各參數方程表達。這時，雖然關於曲面上的點與境域 (Δ) 上的點成一一對應的假設不完全能實現，但是公式 (2) 中符號的選擇卻全然確定曲面的一側。事實上像剛才上面說過的那種情形在這裏是根本不可能的。

595. 曲面和空間的定向 設 (S) 是由簡單界線 (L) 所範圍的一個非封閉的光滑雙側曲面；選取這曲面的一個定側。我們現在按下面的規則對界線 (L) 記上一確定的環行方向作爲正向：這一個方向由觀察者看來必須是依反時針方向進行的；這時假想觀察者依這方向沿着這界線進行，且與選定的一側對應的曲面的法線同向地站着。"反時針方向" 的含義，確切地說，就是觀察者必須在他左邊看見與他緊接的曲面的部分。對於曲面上每一個範圍着曲面一部分的簡單閉曲線來說，它的正向由這同一個規則同時建立起來。* 與正向相反的環行方向叫做負向，總起來，這就是曲面的定向概念的內容。

如果從曲面的另一側出發，則法線要改其方向爲相反的方向，觀

* 在這曲線的正向確定時才應算作這個部分。

察者的位置也要變更；因此按照我們的規則必須重新佈置界線 (L) 的正負向以及曲面上其它各閉路的正負向：曲面改變其定向。由此可見，如果始終保持這個確立了的規則，**則選定了曲面的一側就確定了曲面的定向；反之，選定了曲面界線的正向，就唯一地確定了曲面的一側。**

在閉的光滑的曲面 (S) 範圍着某一個立體的情況下，這裏所能談到的是對於這個立體來說曲面的外側或內側。要對於任一個簡單的閉曲線用上述的規則來確立它的正向，這時不能做到，其原因是雙重的。首先是這種曲線(例如在環面上的任一經線或緯線)簡直可以"不分割"曲面，那時曲面由雙方緊接着曲線：我們的規則不能給出什麼。然而即使界線"分割"曲面成兩境域，它也同樣地"範圍着"這兩境域，並且我們的規則要看選取的是那一個境域來定這界線的兩方向中那一個作爲正向。以"分割"曲面的那種閉路爲限，我們開頭把一個境域和界線一同指出，然後正向就完全而唯一地建立起來。* **於是曲面的兩定向之一就全靠所選取的一側決定。**

如果對於每一個這樣的曲面規定把那個和曲面的外側對應的定向當作正的定向，而把和它相反的當作負的定向，則空間本身的定向某種定義就由此產生。與這完全類似，對於平面上任一個簡單的閉曲線來說，它的正向（可以說是正的定向）的選取顯示出了平面的定向[523]。

現在已定義了的那個空間定向，歸根到底是以反時針方向的旋轉作爲它的基礎的，叫做右手定向。若所持的出發點是按時針方向的旋轉，則得到空間的左手定向。**爲了避免混亂起見，我們今後在空間定向起作用的那些問題上總是預定右手的空間定向。**

必須指出，空間坐標軸的安排要由所規定的空間定向去決定。在

* 如果考慮平面上由同樣的方向所確定的開的或閉的曲線，則在第一種情形下可以說出曲線上的任意兩點那個在前與那個在後，而在第二種情形下只有指出了那兩個點及由它們所限制的弧線以後，才能夠那樣地說。可以看出這裏所說的與課文中所說的相類似之處。

右手定向下，坐標軸要安排得這樣，當我們從正的 z 軸望它們時，由正的 x 軸到正的 y 軸的旋轉是按反時針方向進行的（當字母 xyz 循環調動時這也保持有效）(圖 83, a)；在左手定向下，所說的旋轉就按時針方向進行(圖83, $б$)。在第一種情形下坐標系 $Oxyz$ 叫做右手的，而在第二種情形下叫做左手的。遵照上面所定的條件，我們今後在所指的各情況下採用右手坐標系。

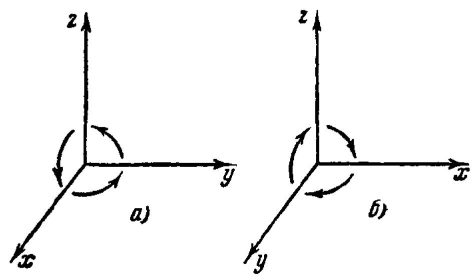

圖 83

596. **法線方向餘弦公式中符號的選擇**　我們現在要對前面說過的概念，即曲面的一個側的選擇和其一個定向的建立兩者之間的關係，給出一個在以後極重要的應用。

我們再考慮在 594, 2° 中所說的非閉的光滑曲面 (S)，並選取它的一個定側(跟着也選好了定向!)。設(Λ) 是 uv 平面上的境域 (Δ) 的界線，而 (L) 是我們的曲面上和它對應的界線。我們假定（這總容易實現)，界線 (L) 的正向對應於界線 (Λ) 的正向。於是對於兩個彼此對應的在境域 (Δ) 內的界線 (λ) 和在曲面 (S) 上的界線 (l)，也有同樣的情形：(λ) 的正向引出 (l) 的正向。*

在這些條件下為了顯示所選的曲面一側，必須選取法線方向餘弦公式(2)中根式前的正號。

要證明這個斷語只要查明，至少在一點處由這些帶正號的公式所確定的方向和所要求的法線方向相一致。

取曲面上任意一個內點 M_0；在境域(Δ) 內有和它對應的點 $m_0(u_0, v_0)$.

* 因為一界線的方向可以由它的任一部分的方向來判斷，所以對於作為 (Λ) 的一部分的界線 (λ) 來說，所下的斷言是顯明的，然後容易推到一般場合。

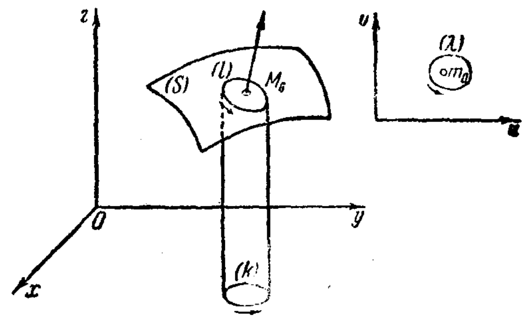

圖 84

設在這點處，譬如說，行列式

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不為零。於是在 uv 平面上找得到點 m_0 的一個這樣小的鄰域（其界線為 (λ)），使得在曲面 (S) 上和它對應的點 M_0 的鄰域（其界線為 (l)）是一一對應地射影到 xy 平面上。用 (k) 表這射影在 xy 平面上的界線（圖84）。

如果在所考慮的點處以及在它的鄰域內 $C>0$，則對應於界線 (λ) 的正向有界線 (k) 的正向（即在所選擇的坐標軸的排列下其方向是反時針方向）[參看 581, 1)]。從圖形中顯然可見，要曲面上和 (k) 對應的界線 (l) 的方向也是反時針方向，就必須從上面朝它看，因此在這情況下點 M_0 處的法線應該是向上的，即應該與 z 軸作成銳角。如果在公式 (2)中取正號，則由公式 (2)就正有這情形，因為當 $C>0$ 時 $\cos\nu>0$. 反之，$C<0$ 時法線應該與 z 軸作成鈍角，這在上述選取的符號下一樣地成立，因為 $C<0$ 時 $\cos\nu<0$.

若光滑的曲面 (S) 是閉的而且範圍着某一個立體 [參看 594, 3°]，則對於它來說就有類似的情形發生。假設我們已認定了曲面的一個定側，並且假設對應於境域 (Δ) 內任一界線 (λ_0) 的正向有曲面 (S) 上由

它定義的界線 (l_0) 的正向，只要 (l_0) 所範圍的那個在曲面 (S) 上的境域是與 uv 平面上由界線 (λ_0) 所範圍的境域相對應。在這種情况下，上面對於開曲面言所證明了的命題這時也是正確的。

597. **一片一片光滑曲面的情形** 在 595 節中所發展的概念，也爲曲面的側的概念推廣到一片一片光滑的曲面的情形提供了一個便利的方法。第 593 節中所敍述的一些見解不能直接地應用到這裏，因爲沿着那些連接各片光滑曲面的"稜"沒有確定的切面，而且通過這些稜時談不到法線方向的連續變化。

設給定的一片一片光滑的曲面 (S) 是由各光滑的曲面 (S_1), (S_2), …所組成，它們是沿着稜(即它們邊緣的公共部分)一個連接着一個的。首先假設這些面片中各片分開來都是雙側的。可是，要能够把整個曲面 (S) 看作是雙側的，這個假設自然是不充分的；不難看出莫彼阿斯曲面是由兩片光滑的雙側曲面作成的。

在每片曲面 (S_i) $(i=1, 2, \cdots)$ 的邊緣 (K_i) 上選取其兩方向中之一作爲正向；像我們已知道的一樣，曲面 (S_i) 的一側就這樣地被確定了。若這選擇法能够進行到這樣，使得相接的兩邊緣的公共部分* 總是在兩邊具兩個相反的方向（圖 85），則祇有這時曲面 (S) 是雙側的。曲面

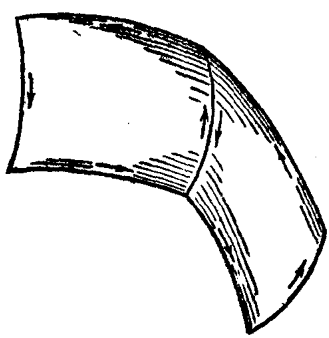

圖 85

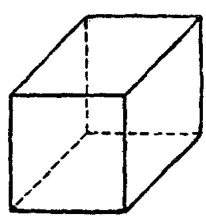

圖 86

* 這個部分也可以由一些單獨的面片組成。

(S) 的一側定義爲由所述方法選出來的它的各部分的側的總和。

如果就在一個地方把一個邊緣的方向改爲相反的方向，則爲了遵守我們的條件必須對所有的邊緣都這樣做。於是所選的各片曲面(S_i)的側都要用與它們相反的側來替代；這些相反的側的總和就組成曲面的第二側。

爲了要掌握所作的一些規定，向讀者建議：1）用一立方體的面（圖 86）作爲例子，選擇其六個面的邊緣的應有方向來實現這些規定，2）假若企圖對一已分解成爲兩個或多個雙側曲面的莫彼阿斯條也這樣做，試瞭解當中會有那些困難發生，最後，3）指出上面所給的關於曲面一側的定義與曲面被分解爲怎樣的光滑面片無關。

§ 2　曲面面積

598. **許瓦耳玆的例子**　曲面面積的概念具有與曲線長的概念相類似的地方。我們已定義一個(開的)弧長爲內接於這弧的折線的周界當其各個邊長趨向於零時的極限。在曲面（譬如說也是開的）的情況下，很自然地會去考慮內接於它的多面形，並且定義曲面面積爲這多面形的面積當其各個面的直徑趨向於零時的極限。

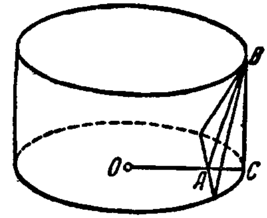

圖 87

可是，在前世紀末這個定義的缺陷已被揭露出來。那就是許瓦耳玆 (H. A. Schwarz) 證明了上述的極限甚至對於簡單的直圓柱面都不存在！我們引用這一大可注意的例子。

設給出一個半徑爲R與高爲H的圓柱面。用下面的方法畫內接於這柱面的多面形。將柱面的高分爲m等分，過每一分點作垂直於這柱面的軸的平面，於是得到在這曲面上的 $m+1$ 個圓周(包括柱面兩底上的圓周在內)。將每一圓周分爲 n 等分，使上一圓周的分點位於其下一圓周的弧的中點上頭。

再取由所有這些弧的弦以及連接每一弦的端點到其上一圓周上和下一圓周上的分點（它們恰巧分別地安置在對應弧的中點上頭和下頭）的線段所作成的一切三角形（圖 87）。這些三角形的總數是 $2mn$ 個，並且都是相等形。它們總合起來就構成我們所需要的一個多面形 ($\Sigma_{m,n}$)；圖 88 就是代表它的一個模型。

我們現在來計算每個三角形的面積 σ. 取弦做底，其長等於

$$2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

要求三角形的高 AB (參看圖形)，我們注意 $AB=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$，其中

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

因此，這一三角形的面積等於

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

而多面形的全面積等於

$$\Sigma_{m,n}=2mn\,\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

當 m 與 n 無限地增加時，所有三角形的直徑趨向於零，但面積 $\Sigma_{m,n}$ 沒有極限。實際上，若令 m 與 n 這樣地增加，使得比值 $\frac{m}{n^2}$ 趨向於一個確定的極限 q:

$$\lim\frac{m}{n^2}=q,$$

則因我們原有

$$\lim\ n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\pi,$$

而另一方面根據所作的假設又有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}=\lim\frac{\pi^2}{2}\frac{m}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}q,$$

所以

$$\lim \sum_{m,\,n}=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4}q^2+H^2}.$$

我們看到，這個極限實質上依賴於 q 的大小，卽依賴於 m 與 n 同時增加的方式。當 $q=0$ 時而且只有在這時，所說的極限等於 $2\pi RH$（這是在幾何學教程中所已求出的面積的大小），但它和 q 同時甚至可以爲無窮大。因此，當 m 與 n 兩數各自獨立地變到無窮大時面積 $\sum_{m,n}$ 實在沒有確定的極限。由此可見，如果站在上述定義的觀點上，則柱面是沒有面積的。

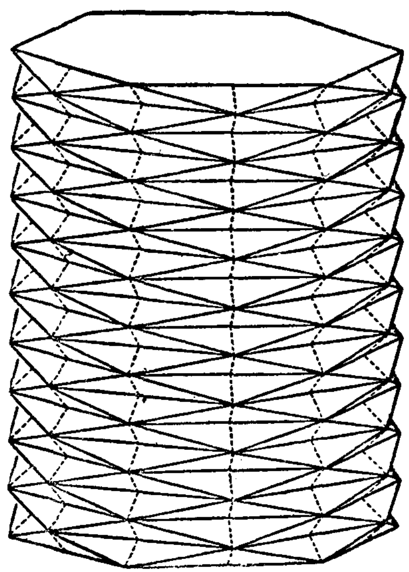

圖　88

重要的是要瞭解，在內接於曲線的折線情况與內接於曲面的多面形情况間有些什麽區別。爲了簡便起見，我們把所說的曲線與曲面都算作光滑的。於是只要作成折線的各個弦足够小，則每個弦的方向與其對應弧上任一點處的切線方向要相差多小就多小。所以這種無窮小的弦可以越來越加準確地當作其對應的弧的元素。相反地，要多小就可多小的那種頂點落在曲面上的多角形的面，可以完全地按自己在空間的位置不與曲面的切面接近；在這種情形下它顯然不能替代曲面的元素。這種情形很好地說明了剛才所考慮的例子：柱面的切面全是垂直的，而內接於柱面的各個三角形的面當 q 很大時幾乎都變成水平的，而構成一些微小的皺紋。

599. 曲面面積的定義　整個以上所述，引使我們想預先要求於所給曲面的內接多面形的，不僅是它的各個面的直徑要趨向於零，而且