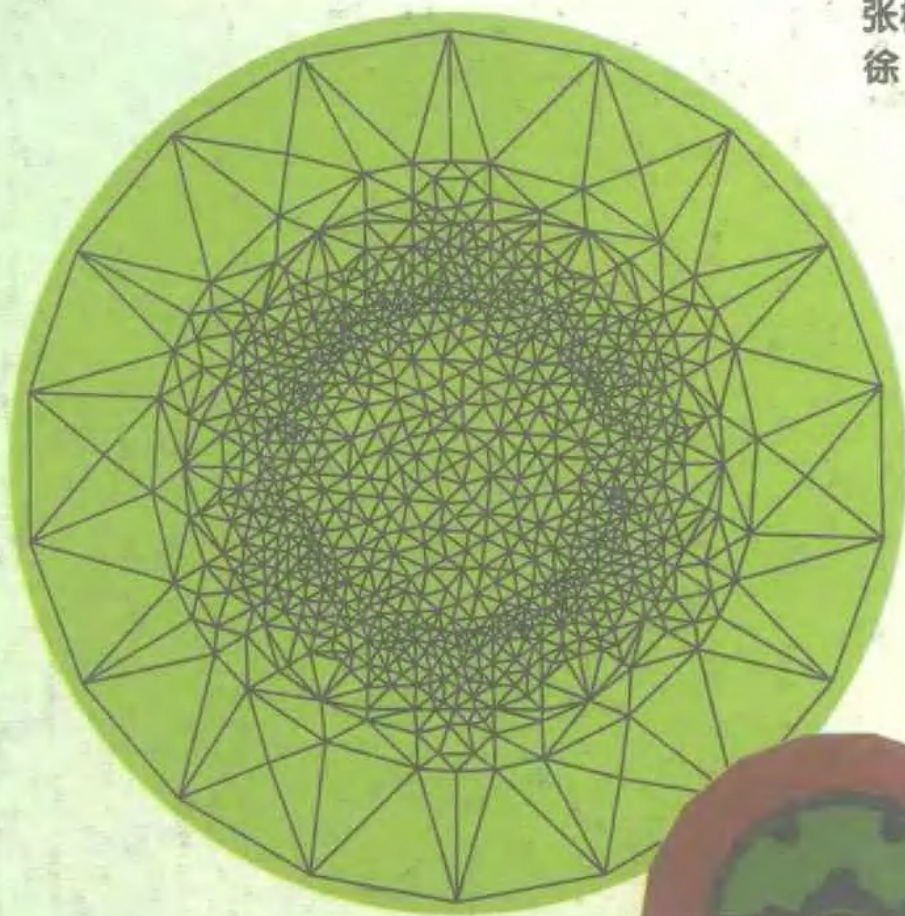


YOUXIANYUANFA ZAI DIANJIJISUANZHONG DE YINGYONG

张榴晨 著
徐松



有限元法 在电磁计算中的应用

中国铁道出版社

291930

有限元法在电磁计算中的应用

张榴晨 著
徐 松



中 国 铁 道 出 版 社

1996年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是有限元法在电气工程应用方面的专门著作。详尽系统地介绍了有限元法电磁计算的基本原理,求解过程和实际应用。着重表现了某些方法的应用技巧及应用举例,具有独到之处。全面地介绍了国外近年来推出的有限元法电磁计算商业化软件,及进一步扩大这些软件包功能的解后处理方法,有新颖性和开创性。完整地论述了有限元法电磁计算研究方面的前沿性发展和课题,具有一定的领先作用。

有限元法在电磁计算中的应用

张榴晨 著
徐 松

*

中国铁道出版社出版发行

(北京市东单三条 14 号)

责任编辑 张贵珍 封面设计 马 利

各地新华书店经售

北京市燕山联营印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 13.5 插页: 1 字数: 326 千

1996 年 8 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 1—2000 新

ISBN7-113-02292-8/TM·54 定价: 26.90 元

前 言

工程设计和科学研究对电磁计算精确度要求的不断提高,促进了有限元法的发展及其在电气工程方面的广泛应用。而计算机资源的不断开发又为有限元法电磁计算的发展及有限元商业化软件的推出创造了必不可少的条件。目前有限元法及其商业化软件已成为工程设计人员和研究工作者的重要工具。就电动机的电磁设计而言,有限元法的应用能达到比较精确地设计电机参数、计算输出转矩以及优化定转子的几何尺寸,从而避免了过去那种“设计—试制—修正”的复杂过程,缩短了产品开度周期,降低了设计制造成本。

本书介绍了有关有限元法电磁计算的基本原理、求解过程和实际应用。主要包括麦克斯韦电磁方程、边界条件和材料特性的处理,偏微分方程的数值解法,有限元法矩阵方程的构成和求解,解后处理方法等,使读者对有限元法电磁计算的基本过程有较深入全面的了解。同时,在上述基础上着重介绍了其应用方法和技巧,使读者能获得实际应用中的分析能力和解决问题的能力。

有限元法电磁计算的目的是求解电气工程中各种设备或其某个部件中的电磁场分布问题。电磁场的分布规律在数学上为定解偏微分方程的求解问题。由于电磁场分布存在于复杂的结构及多种材料构成的场域中,并且,往往还包含了非线性材料特性以及不同函数形式的外部激励等复杂情况,因此,即使采用有限元法电磁计算商业化软件求解电磁场分布,也还存在着应用方法和技巧问题。为此,本书刻意应用举例,力图使读者在应用方面能够熟练地掌握各种方法和技巧。

从应用角度来看,获得电磁场分布规律只能满足工程或研究中的某些要求。对于大多数应用情况,还需要了解一些其他参量,如电感参数、电容参数、能量或贮能、力和力矩等,而往往这些又是目前商业化软件中比较薄弱的环节。为了使读者能获得这方面的有关知识,本书专门在第五章解后处理方法中对此作详细介绍,以期使读者在掌握有限元法电磁计算软件与实现其具体应用,即分析或设计之间架起一座桥梁。

本书取材于较近期内有限元法电磁计算方面的研究进展或探索性的论著,目的是为了读者在系统地学习有限元法电磁计算的有关知识的同时,能有效地用到分析和设计的实践中去,并能够较容易地进入有限元法电磁计算前沿性研究领域。从本书各章后众多的参考文献中也能发现这一点。此外,在第一章中还专门就一些新课题作了概括性介绍。这样,也可能会带来一些不成熟的见解,主要是抛砖引玉,希望大家来共同探讨。

本书作者有从事十多年电磁数值计算及分析的研究经历。书中某些内容是作者在加拿大 Queen's 大学电机工程系做博士论文的成果之一。本书稿是作者在 New Brunswick 大学电机工程系执教后为研究生们讲授的《有限元法在电磁计算中的应用》课程讲义翻译而成的。其中一些主要内容曾在 1993 年铁道部举办的为期四天“有限元法在电机设计中的应用”讲座上作过介绍。

本书中有些内容是作者的初步尝试及经验体会，有关问题只能当作研究的开始，还需进一步发展完善。由于作者水平有限，叙述不当及错误之处，在所难免，尚希望读者予以指正。来信请寄 Department of Electrical Engineering, University of New Brunswick, P. O. Box 4400, Fredericton, Canada E3B 5A3。

在编写本书的过程中曾得到作者在 New Brunswick 大学、中国科学院电工研究所的同事们的帮助，特别需要提到的是黄宏先生提过很多宝贵意见，肖歌小姐做了许多辅助工作。特此表示深切的谢意。

作 者

1995. 10.

目 录

第一章 有限元方法简介	(1)
1.1 有限元方法概况	(1)
1.2 有限元法应用	(6)
1.3 有限元法商业软件	(8)
本章小结.....	(9)
参考文献	(10)
第二章 电磁场基本理论	(11)
2.1 麦克斯韦方程组.....	(11)
2.2 电磁场微分方程的一般形式.....	(16)
2.2.1 电磁场的势函数方程.....	(17)
2.2.2 几种典型的电磁场方程.....	(20)
2.2.3 常见的边界条件.....	(21)
2.3 三种典型偏微分方程.....	(21)
本章小结	(22)
参考文献	(23)
第三章 偏微分方程的解法	(24)
3.1 加权余数法.....	(27)
3.2 用加权余数法求解一般偏微分方程.....	(33)
3.2.1 一般形式.....	(33)
3.2.2 帕松方程及自然边界条件.....	(34)
3.3 用迦辽金方法求解边值问题的实例.....	(37)
3.4 变分法简介.....	(40)
3.4.1 用变分法求解拉普拉斯方程.....	(41)
3.4.2 用变分法求解帕松方程.....	(44)
3.4.3 用变分法求解赫姆霍兹方程.....	(47)
3.5 一般型变分法.....	(49)
3.6 自然边界条件.....	(53)
3.7 用变分法求解边值问题的实例.....	(56)
本章小结	(59)

参考文献	(60)
第四章 有限元法	(61)
4.1 一维有限元法	(61)
4.2 二维有限元法	(67)
4.3 二维有限元法的几个实例	(76)
4.4 有限元法的计算步骤	(90)
4.5 高阶有限元法	(97)
4.6 三维有限元法	(102)
本章小结	(107)
参考文献	(107)
第五章 解后处理方法	(109)
5.1 等势线图	(109)
5.2 电磁通量密度	(112)
5.3 贮能	(117)
5.4 电通量和磁通量	(120)
5.5 电感和电容	(121)
5.5.1 电感计算	(122)
5.5.2 电容计算	(122)
5.6 力和力矩计算	(123)
5.6.1 源与场的作用	(123)
5.6.2 麦克斯韦张量法	(124)
5.6.3 能量法	(125)
5.6.4 力和力矩计算举例	(125)
本章小结	(126)
参考文献	(126)
附录 A 矢量等式	(128)
附录 B 有限元法编程技巧	(129)

第一章 有限元方法简介

1.1 有限元方法概况

工程应用基础理论中的许多空间分布规律,在数学物理方法上都可归结为边值问题(Boundary Problems)的求解。如理论力学和结构力学中的受力及应力分布,热物理学中的热传导,流体力学中的流动情况,电磁理论中的相互作用,都是边值问题的具体体现。本书仅就电气工程方面电磁装置、电磁作用及其电磁计算的边值问题采用有限元法求解,进行全面论述及深入探讨。

值得指出的是,随着计算机资源的不断扩大,可提供的计算能力的不断增长,以及工程应用中对设计精确度要求的不断提高,在电气工程方面,学科范畴的界限越来越显得模糊。在电气工程的具体应用中,各种物理现象之间错综复杂的联系,使得必须把它们综合起来同时考虑,才能达到现代设计的要求标准。例如,在常规电机设计中,电磁作用、传热及应力分布的获得,是计算参数及性能指标的关键。在电机中,传热及其导致的温度分布不均匀,不仅会影响各处金属材料的电导率,从而直接影响电磁计算的精确度,并进一步影响传热计算的精确度,而且,也会影响材料由于蠕变面对其应力要求的变化。又如,新型的磁流体发电方式中,高温等离子体的传热、流动及在强磁场下的电磁作用的定量计算,是探索其工程应用途径的核心问题。仅此两例便充分体现了各种物理现象之间的相互作用、相互影响。然而,在具体应用的分析中,正是这些不同物理现象中相同或相似的变化规律,既具有相同的或相似的边值问题,又为在对其进行统一考虑时,带来了极大的便利之处。特别是在作有限元法计算时,它们的许多处理环节及参数都是相同的。这在当今有限元法电磁计算中被称作所谓的耦合问题(Coupled Problems)。因此,本书虽然言明其内容所在仅为电磁计算,然而,就其中的数学处理方法,特别是对于某些方法的实际经验,乃可为其他物理现象边值问题求解所借鉴。

采用有限元法求解电磁分布规律的边值问题,从本质上说,属于对电磁装置或电磁作用的探讨及分析,是对工程应用设备及其电磁作用原理的数值计算,是对这种物理现象的定量描述,是对客观规律的研究,所以是一个被动过程,即对已存在的电磁装置或电磁作用物理现象进行定量计算。但是,从历史发展和近期展望的角度来看,电磁变化规律边值问题的有限元法求解,已不仅仅囿于上述概念,它被广泛应用于电气设备产品开发的前期研究,直接指导设计过程,包括对产品性能要求条件苛刻的设计方案的实现;众多的各种设计方案的比较;设计方案指导思想调整;设计方案具体内容的优化及改进等。从而突破了以往“设计—试制—修正”的那种旧的产品设计制造方法。在产品阶段就能就其所被使用的系统进行精确计算及性能预测,可节省大量的设计试验费用,在经济可比性上也进一步确立了其优势的主动性地位。特别是采用人工智能及专家系统(Knowledge Based Methods)等现代方法,将能进一步提供实现更优化或最优化设计方案的手段,这也是当今有限元法电磁计算中的一

个新的发展方向。

有限元法电磁计算的广泛应用以及广阔发展前景的展望,首先来自于工程应用发展的压力,如产品制造规模的不断扩大,即设备的大型化;产品设计制造的复杂性和难度的不断增加,即设备的集成性;对产品性能指标要求的不断提高,即设备的高技术含量;以及产品应用范围的不断扩充,即产品种类的多样化。这些都要求对电气设备或其部件进行高精度的定量计算和优化设计。

设备大型化是电气设备高效率要求的必然结果。飞速发展的现代科学技术,提供了设备大型化的条件和基础。电气产品就其容量的增长倍数几乎超过了年代的增加,例如在过去的十年内,大型发电机最大单机容量增长了十倍多,在交流调速领域中电机最大容量的增长达近百倍。由于设备的大型化,其总的造价越来越大,以致于不允许产品的设计及制造存在任何缺陷。甚至对于一些尚属于研究性的大型项目,由于其大规模及高额投入,也不允许出现失误。例如对于象磁悬浮高速铁路交通方式的研究、磁流体发电方式的研究等,由于必须达到一定的规模程度,因此,前期的方案可行性论证显得非常重要。

设备集成性是实现高性能指标并提高其系统适应性的关键途径。在现代电气设备中往往结合了许多控制、调节及保护环节,然而最核心的还是实现大功率转换的电磁部件,对其进行有限元法电磁计算,不仅可为这些控制、调节提供实现手段,而且速过设计阶段的分析及优化,可达到合理和完整的设备系统组合。如电动轮汽车,由于其电机集中在车轮内径处狭小的空间,设计难度大,此外各车轮间协调的控制导向也是突出的难点,这些都依赖于对电机部件的电磁计算及分析。又如大型汽轮发电机错综复杂的保护系统的建立,也依赖于对电机内电磁规律、热传导、流体情况、机械应力及振动等物速现象的分析计算及综合研究。

设备的高技术含量是现代化电气设备的标志之一,也是提高设备在系统中的适应能力的关健手段。无论是电气设备的优化改进或智能化实现,还是新型设备的设计制造,都依赖其某些部件中物现现象的边值问题的有限元法求解。新设计概念的提出,新的设计制造方法的引入,以及新材料的采用和新的应用范围的开拓,更离不开对其电磁规律的边值问题有限元法求解分析。例如,用于核磁共振成像医疗设备的大型永磁磁体的设计制造,便是一个有限元法电磁计算的应用典范。通过有限元法求解磁场边值问题、设计磁屏蔽、布置梯度补偿线圈和匀场线圈,可使较大的空间达到高场强并且具有高均匀度。又如电磁作用物体发射系统,也是高技术含量装置的具体体现,在设计阶段必须采用有限元法进行电磁计算。

电气设备的产晶多样化,是普遍应用于现代社会中的电力能源与其他能源形式转换的必然要求。如今各种各样、种类繁多的电气设备的订货过程可实现快速高效的计算机精助设计(CAD, Computer Aided Design),其核心也是对其内部电磁及传热、机械运动等边值问题的有限元法求解。此外,有限元法的广泛应用也是各种电气产品设计精确度的有效保障。

目前有限元法在电气工程中的广泛应用,已确立了其在电磁分布边值问题求解领域中的无可争议的绝对优势地位。从历史发展的整个过程来看,电磁分布边值问题求解共有图解、模拟、解析和数值计算等四种方法。只有当有限元法引入后,这个领域才出现了迅速且庞大的发展。

图解法(Graphical Methods)的应用由来已久,有百年历史。由于其方法的局限,只能用于二维场域上拉普拉斯方程的求解。即使非常仔细,其精度对于现代工程设计的要求是远远不够的。但其结果比较直观,特别是对场域代表的部件之结构选择的设计者来说,通过这种

直接的方法,可获得较强的设计能力的培养。此外,图解法也适合于场域为开域的情况。当今有限元法电磁计算中的可视化后处理手段,在某种程度上,便受图解法的启发。

模拟法 (Analogue Methods) 通过试验测量具有相同场域方程、相同边界条件和交界条件下的模拟量,实现对电磁分布规律的求解。这种方法只能用于二维和三维场域上拉普拉斯方程的求解,它不能考虑具有各向异性介质或非线性介质场域情况下的求解问题,特别是对于三维场域情况,其造价昂贵、工作非常繁重且适用范围极小。

在数值计算之前,解析法 (Analytical Methods) 的发展比较成熟和完善,主要原因是当时关于电磁分布的边值问题的主要研究内容就是解析法。有些解析方法或其结果至今仍应用于工程设计中,如分离变量法、保角变换法等。还有一些当时流行的其他方法,如积分方程法、变分法,以及针对各种具体实际问题的特殊求解方法,如镜像法、逆问题方法,但后者这些方法只能用于简单的场域形状和单一介质,并需要运用对称条件等。

分离变量法 (Series Solution Methods 或 Variable Separation Methods) 主要用于二维或三维拉普拉斯方程的求解,并能考虑时变问题。然而它对边界条件和交界条件的限制比较严格,因而常常难于满足要求。在实际使用中,其坐标的选取也至关重要。其最终求解需要运用贝塞尔函数、椭圆函数等特殊函数。对于如帕松方程等非齐次方程,需要对其作面积或体积积分变换,转化成齐次形式,而往往很难找到这种积分变换的解析形式,需要较高的技巧。

保角变换法 (Conformal Mapping Methods) 是另一类大量应用的解析求解方法。只能用于二维场域拉普拉斯方程的求解,但能适应比较复杂的场域情况。关键在于对场域函数的积分形式的获得,这也是其局限所在,为此还发展了一些与之相关的坐标变换方法。

尽管其推导过程相当繁琐和困难,解析法的发展相当庞大,包括各种具有普遍性的或特殊性的算法。解析法的主要不足是缺乏通用性,并且,主要还局限于稳态二维场的求解,通常需要较多的算法才能获得最终结果。对于非齐次问题或非线性问题仅限于非常简单的特殊情况,往往解析法的推导过程需要较高的技巧及难点的突破。

总之,在数值计算方法出现之前,尽管进行了大量的工作,但从其结果来看,电磁分布边值问题的求解只是非常有限的范围,数值计算方法正好弥补了这个不足。采用数值计算法,能实现几乎所有的电磁分布边值问题的求解分析。特别是结合所谓的时变问题,结合如热传导、应力分布等其他物理现象的所谓耦合问题,以及其他一些具有较大难度的特殊应用问题,如天线、电磁物体发射等,只有当数值计算法引入后才有实现求解的可能。另外,采用数值计算法以后,针对实际工程问题处理的思想方法也有了明显的改变,过去是尽量简化物理和数学模型以求获解,现在的标准是达到更合理的模型选择以保证解的精确度,往往选择比较复杂的模型。

电磁分布边值问题的数值计算方法包括有有限差分法、有限元法、积分方程法和边界元法等四种基本类型,以及近几年来发展产生的有限元法和边界元法相结合的所谓混合法。其中,有限元法占有绝对主要的地位,具有较大的应用范围。目前,有限元法的这种优势越来越显著。

有限差分法 (FDM, Finite Difference Methods) 的基础是对求解区域内每一个节点上偏微分方程的泰勒级数近似。将连续的场域离散成一些以节点为核心的小区域,对偏微分方程的差分格式进行近似处理,并考虑边界条件和交界条件的约束,获得一组以节点变量为未知数的代数方程,进行求解。一般地这些小区域为长方形。对于场域内变量变化急剧的边值问题,

要求网格划分比较密集,这便限制了有限差分法的应用范围。此外,有限差分法必须对所有的边界条件和交界条件进行算法处理,特别是对复杂的边界和场域内各种介质的交界的处理有一定的困难,也难于实现自动处理方式。尽管如此,直到70年代,最早的许多大型工程应用问题,如大型电机、感应炉等的电磁数值计算都是采用有限差分法,并取得了令人难忘的、极有价值的成果。目前在流体的边值问题中,有限差分法还有较大的应用。

基于迦辽金或变分原理的有限元法(FEM, Finite Element Methods),最早产生于力学计算中,自从在加速器磁极和直流电机磁场等电磁计算中被采用开始,至今在电气工程中的每一个方面都得到了广泛的应用,也是当今电气工程中研究的一个主要热点。有限元法将由偏微分方程表征的连续函数所在的封闭场域划分成有限个小区域,每一个小区域用一个选定的近似函数来代替,于是整个场域上的函数被离散化,由此获得一组近似的代数方程,并联立求解,以获得该场域中函数的近似数值。

通常对于二维问题的处理,这些小区域为三角形,由于三角形具有较大的自由度进行拼接,所以场域的划分比较方便,特别是对不规则的边界形状的处理也很方便。此外,它还能适合于场域内函数变化剧烈程度差别较大的情况,特别适合于场域内介质种类较多、交界形状复杂的情况,交界条件自动满足。在每个小区域上所采用的近似函数通常为线性函数,如二维场情况下是坐标的双线性函数。当然这些函数的选取自由度也是较大的,如近年来出现的高阶插值函数的研究。高阶插值也为目前有限元法中产生的热门课题,网格自适应剖分提供了基础。此外,最近开始出现的边基有限元法,其实质也是一种单元小区域上高精度函数的选取方法。

有限元法最主要的特点是根据该方法编制的软件系统对于各种各样的电磁计算问题具有较强的适应性,通过前处理过程能有效地形成方程并求解。它能方便地处理非线性介质特性,如铁磁饱和特性等。它所形成的代数方程具有系数矩阵对称正定、稀疏等特点,所以求解容易、收敛性好、占用计算机内存量也较少。这些正是有限元法能成为电气设备计算机辅助设计核心模块的优势所在。有限元法的主要缺点是对于形状和分布复杂的三维问题,由于其变量多和剖分要求细往往因计算机内存而受限制,特别是包含开域自由空间的电磁计算问题,其建模及求解比较困难。如近年来发展起来的所谓膨胀技术,便是为了解决有限元法处理开域问题。

有限差分法和有限元法电磁计算是基于边值问题的微分形式方程的离散化数值处理,而积分方程法及边界元法则是在边值问题的积分形式方程的基础上建立起来的。由于积分方程表征形式仅与产生电磁分布场域中的场源有关,因此在作数值化处理过程中,只需考虑场源区域的离散。所以,方程的阶数较低,这也正适应了如三维电磁场计算等的需要。

积分方程法(VIEM, Volume Integral Equation Methods)的基础是麦克斯韦方程的积分形式,通过对场中源区的离散,便可获得对应的代数方程、并数值求解。然后,再根据毕奥-萨伐定律求解场域中每个点场量的数值。由于方法本身的特点,积分方程法对于线性问题具有较高的精确度。特别适合于开域情况。并且由于仅需对场源及非线性区进行剖分,因此,剖分数据准备简单,代数方程求解工作量小及占用计算机内存量也较小。但是,对于非线性问题,其最终形成的代数方程具有非对称性、非稀疏性的系数矩阵,特别是该矩阵中各元素是由二重积分或三重积分而获得的,具有超越函数或椭圆函数等复杂形式,计算量较大。随着计算机资源的不断扩充,特别是并行计算机的发展,积分方程法的这个难点是可以克服的。

边界元法 (BIEM, Boundary Integral Equation Methods) 也是以积分方程为基础的。它采用分部积分如格林定理等, 在一定条件下把该积分方程转化为关于边界的积分方程, 并据此进行离散, 获得相应的代数方程, 求解这些变量的具体数值, 然后再求出场域中变量的数值。它的特点是数值方法与解析方法相结合, 尽管增加了数学处理过程的复杂性, 但起到了降维的作用。求解域被处理到该域的一个或多个边界上, 象涡流问题中是处理到导体的表面上、铁部件的边界上等。并且, 其代数方程系数矩阵的形成吸取了有限元法的插值方式, 减少了复杂性和参数计算工作量。因此, 边界元法近年来在电磁数值计算中获得了极大的关注。然而, 这种方法用于非线性情况时失去了具有高精度的特点, 不均匀分布的非线性问题越严重, 这种局限性越明显。此外, 它仅适合于相对来说比较简单的场域情况。

有限元法和边界元法相结合产生的混合法 (Hybrid Methods), 即是在包含非线性材料介质和复杂区域边界及交界的场域内采用有限元法求解, 在其余区域, 特别如开域部分采用边界元法求解。它综合了这两种方法的优点, 也使有限元法的应用范围得以进一步扩大, 即适应了开域问题的求解。并且有利于克服三维场问题求解要求计算机内存量大、消耗机时长等难点。然而, 其副作用是使得所求解的代数方程之系数矩阵失去了对称性和稀疏性等特点。

从当前电磁计算的前沿发展来看, 有限元法不仅本身在应用方面具有很大的潜力, 而且结合其他理论和方法还有广阔的发展前景。这些前沿性发展包括一些已经取得了域大进展, 并有相当的应用范围的成果, 如自适应网格剖分、三域场建模求解、耦合问题、开域问题、高磁性材料及具有磁滞及饱和非线性特性介质的处理等。它们进一步开拓了有限元法的应用范围, 也适应了更复杂的、精确度要求更高的问题求解之需要。此外, 这些前沿性发展还包括了一些尚处于探索性阶段的工作, 如逆问题、人工智能和专家系统在电磁装置优化设计中的应用、边基有限元法等。

自适应网格剖分 (Adaptive Mesh Generation) 及其加密技术是近年来有限元法电磁计算中发展比较快和比较完整的内容。它来源于对电磁数值计算方法的误差分析, 并有域高的实用价值, 特别适合于对电磁场数值计算不太熟悉的研究和设计人员使用有限元法电磁计算软件。自适应网格加密技术的前提是网格的自动剖分, 然而, 自动剖分主要是根据场域的几何结构来进行的, 同时也带有软件设计者的经验。自适应网格剖分是在此基础上根据对场量分布求解后的结果对网格进行增加其剖分密度的调整。此外, 还可根据分布情况对网格密集区采用高阶插值函数, 以进一步提高精确度。前者由于是基于线性插值函数, 系数矩阵形成简单, 但需要重新对网格参数进行计算, 工作量较大, 此外对于场域内分布变化剧烈区部分, 这种加密过程需要多次反复。高阶插值可相当可观地提高精确度, 但由于出现了插值函数的一致, 因此须考虑高低阶插值函数单元间的过渡衔接, 即所谓的叠层单元问题, 增加了复杂性。

在三维 (3D, Three Dimension) 场情况下, 不仅有解的唯一性问题, 需要选取适当的规范加以限制, 更主要的是待求未知数较多, 由于计算机资源的限制, 以致于对于涡流时变场等的数值计算, 精确度成为比较突出的问题。针对不同的介质区域采用不同的场量表征形式, 可以达到减少未知数个数的目的, 为此产生了各种各样的方法, 这是在三维场有限元法计算中一个比较明显的特点。目前, 三维电磁场数值计算的发展还是相当成熟的, 已经有一批商业化软件被应用于不同的电磁计算中。如在医疗设备核磁共振成像系统的磁体, 这样一些三维静磁场的计算中, 最高精度已达千分之一。

耦合问题 (Coupled Problems) 是从综合考虑在实际工程应用中各种物理现象间相互影响的角度来提高电磁计算精确度。首先便是因为有限元法的应用提供了这样一个基础, 即一般地单纯一个场的数值计算已达到了较高精确度, 以致于必须同时考虑其他物理现象的影响。例如, 电磁计算结果获得受力分布和损耗分布, 其中受力分布作为应力数值分析的外源, 损耗分布作为热传导温度场数值计算的输入条件。而温度场数值计算的结果又可用于调整电磁场数值计算中参数的选取。尽管温度场随时间变化速度相对于电磁变化比较缓慢, 但其分布中的数值差异在较大程度上影响电磁计算的精确度, 特别对于那些如感应加热、电动机等应用中温度分布差异较大的情况, 这种影响显著, 由此可相当程度地提高电磁计算的精确度。应力场与电磁场的变化速度比较接近, 因此也必须耦合起来考虑。

由于有限元法只能适合于具有封闭边界区域上的电磁计算, 对于开域情况便需要加以一定的处理。最早的处理方法是把离主要场区较远的开域处场强设为零, 但其误差较大, 已不能满足要求。目前所采用的处理方法主要包括采用有限元法与边界元法相结合的混合法, 所谓的膨胀技术 (Ballooning Tecbique)、等效边界变换和渐近边界条件等。通过这些方法, 可使感兴趣区域内的场量求解精确度进一步提高, 同时也使有限元法电磁计算的适用范围进一步拓宽。

有限元法电磁计算的逆问题 (Inverse Problem), 用于场域尺寸、电流及导体位置安放等的优化设计, 以达到场的形状、参数及力的分布等的优化之目标, 近年来在二维场方面开始被进行研究。实际应用背景包括具有高均匀度的核磁共振成像系统磁体的设计, 具有高次谐波畸变的粒子加速器磁极的设计, 凸极电机磁极及气隙磁场的设计等。优化设计包含了对具有电磁、热、机械力计算的目标函数的分析。这些目标函数可以是简单的, 如材料的重量、损耗的大小或场的形状等; 也可以是比较复杂的, 如作为位移的函数的力的线性分布, 需要通过一系列的电磁数值计算才能获得。优化方法有直接搜索法、随机过程方法、人工神经网络理论以及人工智能及专家系统等优化方法。通过这些研究, 为有限元法电磁计算在电磁装置的设计中的应用奠定了基础。

边基有限元法 (Edge Method) 不同于传统的以节点变量及其插值函数为基础的有限元法, 后者在介质边界或交界处场矢量不连续情况下会产生多值问题。边基有限元法的出发点是将待求的未知变量置于单元的边上, 而非节点上。这时只有平行于边的分量为变量, 其余的分量均为常量, 并可推导获得。边基有限元法有多种基本插值函数形式, 还能达到较高的场数值计算精度, 也能处理场域中有奇异点的情况, 并能减少最终代数方程的阶数。其规范的选取也比较容易, 适合了三维场发展的需要。

1.2 有限元法应用

目前, 有限元法电磁计算在电气工程中的应用非常广泛, 包括其各个方面, 内容极其丰富, 如电机的电磁分布、电磁力、变形、转于运动、动态变化过程以及与电力电子装置相结合等情况下的分析和特性预测及电机参数的计算等。有近年来较新的内容, 如传动调节器的计算等。还有变压器以及其他电力系统元件, 如高压绝缘子、高压线圈、输电线电缆、接地系统、输电线和配电线的外部磁场、电晕等的分析。有感应加热、电磁搅拌、冶炼过程的电磁分离选料, 具有分布式参数的天线的计算等。还有一些较新的产品开发和研究项目, 如核

磁共振成像系统磁体、磁流体发电、磁悬浮列车、电磁物体发射以及电磁对人体影响等的计算分析。这些应用各具特色，它们的计算分析方法也不尽相同。

总起来说，可根据这些应用中电磁现象的变化快慢程度分为三大类型，即静磁场、涡流场和高频场等。三维静磁场计算目前还是比较成熟的。三维涡流场的计算目前的主要目标是如何减少计算量同时提高计算精确度。高频场的计算有其特殊性，出现了相应的一些新的方法。

三维静磁场 (Static Magnetic Field) 的计算方法比较明确，在无源区采用一个标量位，在有源区则分解成一个标量位和另一部分与外加电源对应的磁场强度等效值。这些被用于一些特殊结构电磁装置的参数计算，也用于如电机端部和变压器中的屏蔽设计，变压器内三维场的分析。特别值得指出的是核磁共振成像系统磁体的三维计算中对精度千分之一以上的严格要求也能满足，足以说明这方面应用的发展还是相当成熟的。

涡流场 (Eddy Current Field) 问题，特别是包含较多非线性材料区域的情况下，必须采用矢量磁位作为场量。在二维场情况下，由于矢量磁位只有一个方向分量，应用起来比较方便。在三维场情况下，矢量磁位具有三个方向未知分量，它会使得最终形成的代数方程的阶数较高。为此产生了一系列的方法，主要目的是通过采取一些措施，使矢量位的区域尽量限制得比较小，或通过变换用简化的、未知数个数少的变量来表征场的分布，进行求解。这时对位函数规范的选取也很重要，它可以避免多值解问题。由于许多工程应用电气设备中大量采用铁磁材料实现聚磁目的，而铁磁材料具有饱和现象等非线性特点，因此，为达到一定精确度，采用有限元法还是十分必要的。

值得指出的是，对于单一频率的电磁计算问题，可采用复数法手段转化为稳态场形式进行求解，故被称为似稳场。然而，随着工程应用中对精确度要求的提高，这种方法对于铁磁饱和现象，由于仅考虑了一个周期中变化的平均值，已满足不了要求，因此还需用时步瞬变的方法加以处理。

对于高频场 (High Frequency Field)，位移电流不能忽略。其有限元法计算采用矢量磁位，仍具有介质交界处连续的特点，因此介质交界条件自动满足，不用考虑。对于高频场的处理有两种方法：一种类似于涡流场情况，这时求解获得的是对应某个频率下的场量分布；另一种专门用于高频场的分析，即为特征值和特征矢量的计算。通过对特征值的计算分析，既能获得对于某个频率下场分布的完整的解，而且也能考察系统的其他一些特点如共振特性等。它特别适合于谐振腔、天线等装置设备的电磁计算。

目前在工程应用中还有一个比较突出的问题是场域内介质间相对的运动问题 (Motion Problem 或 Motional Effects)，常见于电机、电磁物体发射及涡流闸等电磁装置。在旋转电机中定转子间的相对运动主要使得气隙网格变化，与之有关的参数主要是转子的位置。在直线电机、电磁物体发射等装置中，主要是要考虑运动引起的切割电势部分，由于数值计算求解，容易引起解的不稳定，特别是对于电磁物体发射那样，速度高、速度变化快的过程，这种现象更严重，甚至会导致错误的结果。为此，采用了一种所谓的逆流方法，这种方法可避免上述由数值计算引起的假性不稳定振荡现象，然而，它也会减低解的精度，为此，还要适当调整网格剖分。

1.3 有限元法商业软件

有限元法在电磁计算中的广泛应用,除前述有限元法本身的特点外,还来自于各种有限元法电磁计算商业化软件的不不断推陈出新以及其获得的越来越多的用户。有限元法商业化软件作为工程设计、科学研究和教学等的使用工具,具有明确的目标及鲜明的特点。其中最主要的一点是服务对象明确,使用者仅需对所需计算的问题作出答复,作为输入,便能获得所需结果,并能在此基础上不断对结果进行进一步的开发使用,而并不需要了解有限元法求解的详细过程,如网格剖分、方程形成及求解等,更不需要掌握有关的技巧。由于采用模块化结构,组合性强,用户可随意选用其中某些模块,并能方便地进入某些过程,从而进行控制,因此,可适应不同层次使用者的各种需要,最大限度地为他们减轻了繁琐的工作量。此外,在后处理方面的大量投入,也提高了此类软件的使用价值,特别是可视化程度的不断提高,使用户得心应手,达到了在设计阶段便能对电磁装置或设备中电磁场的分布及各种性能指标一目了然的程度,易于进行方案修正及优化设计。此外,有限元法本身适应性强的特点,也使得商业化软件具有很强的通用性,能适合于各种应用问题。

通常有限元法电磁计算商业化软件包含场域几何尺寸处理模块、介质物理参数选择模块、网格剖分生成模块、方程形成及求解模块、后处理及用户界面模块等五个主要部分。在当前的商业化软件中,基本上都包含了二维或三维电磁场计算选择、外源激励的处理、非线性介质物理参数的数据库、网格的自适应剖分、线性或非线性以及稀疏或满元方程组的自动优化处理、位函数场量与所需分析量的转化及与温度场应力场的耦合处理等功能。此外,还具有与计算机辅助设计软件的接口,并设有多种让用户参与的通道。因此,既减轻了用户采用有限元法的大部分工作量,又为用户提供了大量的选择余地,极大程度地方便了用户。

目前,国外专门从事有限元法电磁计算商业化软件开发销售的专业公司有三十多家。下面就其中主要的几家及其出品的常见软件作些介绍,并就它们的功能作简单比较:

美国 MacNeal Schwendler Corp. 公司推出的 MSC/EMAS 软件目前已有第三版 (Version3),并相应地配合了增强显示功能软件 MSC/ARIES Version6.1.1 版。其中, MSC/EMAS Version3 包含 ELECTROSTATICS, MAGNETOSTATICS, CURRENT FLOW, FREQUENCY DOMAIN, TIME DOMAIN, MOTION 等程序。MSC/ARIES Version6.1.1 包含 SOLIDS, MATERIALS, FEM, RESULTS, PARAMETRICS 等程序。从这些程序的名字,便可知道其功能或作用。此外,该软件系统还包含了 73 个应用实例,例解了各种应用情况下的处理过程 and 手段,便于用户操作使用。

加拿大 Integrated Engineering Software Inc. 公司的一系列软件,如用于二维情况的 ELECTRO, MAGNETO, AMPERES, OERSTED 和三维情况下的 COULOMB, FARADAY 等。其中仅 OERSTED 售价 6000 美元。美国 Magsoft Corp. 公司有 FLUX2D, FLUX3D, PHI3D, 以及微机用 MICROFLUX, 后者售价最高达 6 万美元。英美 Vector Fields Limited 公司有 OPERA 及用于三维场的 TOSCA, ELEKTRA, SOPRANO, SCALA 等软件。

美国 Swanson Analysis Systems Inc. 公司有软件 ANSYS 的系列产品,其中为适合于磁机上应用而开发的软件售价 8000 美元左右,都能适合于应力分布、传热等的数值计算,并能部分实现优化。此外,还有英国和加拿大 Infolytica Corp. 公司的 MagNet 软件,英国 Bath 大学

软件中心的 Mega 软件，以及美国 Ansoft Corp. 公司的 Maxwell 软件等。

表 1-1 列出了在 1991 年第五次 IEEE 电磁会议上对于一些有限元法电磁计算商业化软件开发专业公司产品的调查统计结果，显示了当时这些公司软件的一些特点和差异。但时至今日，这些公司的软件都已达到了这些指标。目前，主要是使用环境如计算机机型适用范围上的差异，特别是向微机上的移植等。

一些公司软件功能比较 表 1-1

公司		静磁场				似稳场				时变场			
		静止		运动		静止		运动		静止		运动	
		线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性
ANSOFT	二维	☆	☆			☆							
	三维	☆	☆										
MacNeal Schwendler	二维	☆	☆			☆				☆	☆		
	三维	☆	☆			☆				☆	☆		
Integrated Engineering Software	二维	☆	☆										
	三维	☆	☆										
Bath 大学	二维	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
	三维	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
Infolytica	二维	☆	☆			☆	☆			☆	☆		
	三维	☆	☆			☆	☆						
Vector Fields	二维	☆	☆	☆	☆	☆	☆			☆	☆		
	三维	☆	☆			☆				☆			
Swanson Analysis Systems	二维	☆	☆			☆				☆	☆		
	三维	☆	☆			☆				☆	☆		

本章小结

有限元法是目前电气工程中解决电磁分布边值问题的强有力的手段。它适应了当今工程电磁问题分析的需要，已获得了广泛的应用。从历史发展过程来看，电磁分布边值问题求解有图解法、模拟法、解析法和数值计算方法等四种类型。其中数值计算方法包括有有限差分法、有限元法、积分方程法、边界元法、混合法等。目前普遍应用的是有限元法，并且只有有限元法已有一些商业化软件被推出使用。

在有限元法电磁计算中有一些前沿发展课题，如自适应网格剖分、三维场建模求解、耦合问题、开域问题、高磁性材料及具有磁滞及饱和非线性特性介质的处理、逆问题、人工智能和专家系统优化设计、边基有限元法等。从应用的角度来看，当前有限元法电磁计算的前沿性课题可分为三维静磁场、三维涡流场、高频场三大主要内容。此外，还有一个特殊的内容，即运动问题。

参 考 文 献

- [1-1] M. V. K. Chari, P. P. Silvester, Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems, Wiley, New York, 1980.
- [1-2] C. R. I. Emson, J. Simkin, C. W. Trowbridge, A status report on electromagnetic field computation, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 4, pp. 1533-1540, July 1994.
- [1-3] J. D. Lavers, Electromagnetic field computation in power engineering, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 6, pp. 2347-2352, November 1993.
- [1-4] J. C. Sabonnadiere, A. Konrad, Computing EM fields, IEEE Spectram, pp. 52-56, November 1992.