量子顺磁放大器原理

黄武汉　林福成　编著

內 容 簡 介

本书比较全面、扼要地阐述了量子顺磁放大器的原理和设计理论．內容包括：辐射理论、有关的羣论方法、顺磁能谱和弛豫现象、腔式和行波式放大器的工作原理、微波结构的特性、顺磁晶体的选择和使用、放大器的密度矩阵理论、量子顺磁放大器及其系统的噪声、实验技术和实验方法等．

本书的主要对象是研究生．如在內容上作适当选择，亦适于作为大学量子电子学及微波波谱学专业高年级学生的教材；同时，也适于作为科学研究人员、高等学校教师和工程技术人员的参考书．

量子顺磁放大器原理

黄武汉　林福成 编著

*

科学出版社出版

北京朝阳門內大街 117 号

北京市书刊出版业營业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1965 年 11 月第　一　版	开本：787×1092　1/18
1965 年 11 月第一次印刷	印张：30　4/9
精裝：0001—1,370	插頁：5
平裝：0001—1,230	字数：636,000

統一书号：15031·215

本社书号：3343·15-7

定价：[科六] 精装本 4.50 元
平装本 3.90 元

序

本书对量子顺磁放大器的原理和设计理论作了比较系统和深入的阐述，书中特别着重于物理基础的讨论．至于技术上的问题，虽然常常成为研制这类器件的关键，但是由于它正在不断发展，这里只能概括地介绍其一般情况，以及我们在实际工作中的点滴经验．

本书的部分章节曾经在中国科学技术大学的有关专业中讲授过，但是为了使本书适宜于主要供研究生阅读，大部分內容是这次重新写的．內容分为四部分．第一部分讨论辐射理论和羣论的有关知识．这是考虑到在我国大学中除了理论物理专业外都沒有详细地讲授过这两方面的內容，而它们对研究顺磁晶体的能谱理论和弛豫理论是十分重要的，辐射理论还是讨论量子器件受激发射和噪声的基础，所以本书对此作了比较全面的介绍．第二部分讨论顺磁晶体的能谱和顺磁弛豫，阅读本书所需要的电子顺磁共振的知识，基本上都已包括在內．我们只是有选择地讨论了过渡族离子在离子晶体中的性质，这里的讨论比目前一些介绍量子顺磁放大器的专著较为详尽．这是因为，应用第一部分所介绍的辐射理论和羣论的结果，就有可能把推导过程扼要地介绍出来．我们希望，通过这一部分知识，使读者能够基本上掌握量子顺磁放大器所用到的顺磁晶体的研究方法和发展动态．第三部分讨论量子顺磁放大器，內容包括顺磁晶体的受激辐射及其特性、微波结构的特性、顺磁晶体的选择和使用、放大器及其系统的噪声、放大器的密度矩陣理论、实验技术和实验方法等．在这一部分中，我们综合了近年来在学术刊物上的大量文章，因而使这部分介绍比较系统．为使尙未具备关于微波结构、噪声、量子统计等知识的读者能阅读这一部分內容，本书对有关的基本概念也作了适当的介绍．我们试图在这一部分內容中反映出量子顺磁放大器迅速发展中比较定型的主要结果．第四部分给出了一些有用的图表，主要是关于羣论、顺磁晶体的能级和跃迁几率、放大器的设计方面的参考资料，估计对读者是会有帮助的．

关于阅读本书所需要的准备，在物理方面只要具有相当于综合性大学的量子力学的知识；在无线电技术方面，只要具有微波理论和技术以及低频线路的初步知识．

本书主要是为那些对量子顺磁放大器的物理基础感兴趣的读者而编写的；但是对于只希望了解放大器具体內容的一些读者，不妨直接接受从顺磁共振研究得到的结果，这样，即使从第五章开始阅读也不会遇到很大的困难．初次阅读时可以不读第八章．此外，

书中编撰了一些习题，其中不注明参考文献的一部分，利用正文中的结果就可以解出，它能帮助读者巩固已学到的知识．其他注明了参考文献的那部分习题，收集了看来似乎与正文无直接关系但却又是很有意义的研究工作；这类习题有助于扩大读者眼界．碰到这些习题时读者不妨先思考一下，然后再翻阅参考文献；即使不详读文献，知道这些结果也是有好处的．

这里要向帮助我们完成本书的朋友与同事们致以谢忱．在编写第六章的大部分和第十章的一部分时，我们利用了凌君达先生搜集的材料和她的工作经验；同时凌君达先生还阅读了本书的大部分手稿，并给了许多帮助．第十章引用了刘阊先生的一些实验工作(图10.2, 10.8, 10.9, 10.11, 10.21 及图 10.22)．黄宏嘉教授和郑乐民副教授详细地阅读了全书手稿，并提出了许多宝贵的意见．胡澄同志对第四章，陈宗騭及陆志刚先生对第九章曾提出过不少建设性的意见．

本书内容牵涉较广，作者学识浅陋，错误在所难免．我们诚恳地希望读者给我们提出批评和建议，以便有再版机会时加以改正．

黄武汉　林福成

緒　言

在无线电电子学中，一般的电子器件是利用自由电子的运动与电磁场交换能量来产生或放大电磁波的．由于自由电子的无规运动，在一般的电子器件中不可避免地存在着散粒噪声和热噪声．如果信号強度比噪声还要小，接收外来的讯号就变得十分困难了．大家知道,接收系统的灵敏度有賴于其讯号噪声比,所以提高接收机的灵敏度一直是和降低放大器的噪声水平相联系的．近年来低噪声高灵敏度放大器件的研究很受人们所重视．这主要是因为在实践中日益产生了对高灵敏度低噪声接收机的迫切需要．诸如：远程警戒雷达、人造卫星和超远距离通讯、遙测与遙控、射电天文学研究等方面都需要应用极高灵敏度的接收机来接收微弱讯号．为了获得灵敏度极高、噪声极低的放大器件,近年来进行了大量的研究工作，寻找新的工作原理和发展新器件．人们发现了利用微观系统分立能级间的感应辐射，可以制成超低噪声的放大器件．这类新型器件具有一系列突出的性能,因而使之迅速地发展成一个新的科学技术领域．因为这门学科只有应用量子力学的方法才能得到充分的解释，所以国际上一般称它为量子电子学．量子电子学在原理上与经典无线电电子学有根本的区别,它不是利用自由电子,而是利用束缚电子，也就是利用物质的束缚电子与电磁波的相互作用使之发生能态的转变而产生或放大电磁波的．由于利用了感应辐射的特点，量子电子学的发展有可能解决过去经典无线电电子学中沒有得到很好解决的三个关键问题：放大十分微弱的外来讯号,产生频率非常稳定的电磁波,以及开辟亚毫米波直到可见光．这些都为在无线电电子学上还是空白的波段提供了可能性．它的发展将引起无线电电子学以及其它学科的重大革新,其发展前途、规模、广度、深度以及对其他学科的影响是难以估量的．

量子顺磁放大器是量子电子学中的一个组成部分．由于在微波和毫米波波段中自发辐射所引起的噪声非常微小,量子顺磁放大器作为微波和毫米波段的低噪声放大器,它的噪声可以接近测不准关系所容许的极限，亦即可以接近物理上可能实现的线性放大器的最低噪声极限．无论在理论上还是在实际上,都证明在微波和毫米波段內量子顺磁放大器的低噪声性能是无可比拟的．量子顺磁放大器具有前所未有的极高的灵敏度，有可能用来检测和放大甚至只有几个量子组成的极微弱的输入讯号．正是由于这一点，它在所有需要灵敏度特别高的接收系统中，存在着广泛的应用潛力．目前在不少实验性的系统中

应用了量子顺磁放大器作前置放大器，例如人造卫星电视通讯系统以及不少国家的射电望远镜装置中，量子放大器都在成功地运行中.

在本世纪的四十年代，扎沃依斯基 [Завойский, 1944] 发现了电子的顺磁共振，奠定了微波波段电子顺磁能级研究的基础. 在五十年代初期，国外的一些科学家曾指出了利用电磁场量子和微观系统相互作用来产生和放大电磁波的可能性. 1954～1955 年间他们制成氨分子束振荡器. 这种振荡器具有极高的频率稳定性，但作为放大器则嫌频宽太窄. 1955 年巴索夫和普洛霍洛夫[Басов и Прохоров, 1955]提出用三能级的方法来得到负温度. 1956 年布隆伯根[Bloembergen, 1956]详细地计算了获得负温度的条件，提出了利用离子晶体中的过渡族离子来获得微波的放大，从而确定了目前的量子顺磁放大器的基本工作原理. 1957 年斯科维尔等[Scovil, Feher and Seidel, 1957]研制成功了第一个量子顺磁放大器. 以后几年，量子顺磁放大器无论在理论上和实验上都得到迅速的发展. 在这短短的五、六年间，在这方面发表了成百上千的论文，在技术上也由实验室进入了实际应用的阶段.

和量子电子学的其他分支一样，量子顺磁放大器是基本学科和技术学科结合的产物. 具体地讲，量子顺磁放大器一方面是建立在量子力学、固体物理学、电子顺磁共振这些基本学科上面，另一方面又广泛地应用了无线电电子学技术和低温技术.

由于量子顺磁放大器日趋完善，它的基本理论已由不少刊物作了介绍，现在就有可能比较全面和比较深入地介绍它的工作原理和物理基础. 关于辐射的量子理论，过渡族离子在离子晶体中的能级和弛豫性质，量子顺磁放大器的基本理论和特性，量子放大器及其系统的噪声等方面，正是无线电电子学工作者感到新鲜的东西，因此本书也侧重这些方面. 对于量子顺磁放大器本身，只详细地介绍了布隆伯根型的三能级情况. 对于脉冲工作的二能级情况，因为不能作为性能良好的微波和毫米波低噪声放大器，就是用作发生器也很不成熟，所以本书只能对它作附带讨论.

最后，我们简单地估计一下量子顺磁放大器的发展方向. 在微波波段，目前存在的问题是如何使它在现场运用时达到小型化、可靠、耐久. 其中的关键问题在于如何克服庞大的低温系统和笨重的磁铁所带来的不便. 最近在技术上已获得一些进展，例如使用保温时间较长的杜瓦瓶，把气体液化器小型化，使用永久磁铁或者超导磁铁等等. 在这方面，继续寻找合适的顺磁晶体，寻找新的工作原理(例如利用交叉弛豫效应，光波激励微波放大，提高工作温度等等)，设计高质量的谐振腔和慢波结构，都具有重要的意义. 不过，就低噪声器件的本质来看，想进一步把工作温度提高到室温附近，恐怕是不现实的. 量子顺磁放大器的另一个更为重要的发展方向就是去占领频率更高的波段. 最近，单色光产生器

(光量子放大器)已经十分迅速地发展起来．在微波和光波波段之间存在着一个十分广阔的区域，这个区域内的放大器件和振荡器件恐怕还是非量子器件莫属．在这个区域内迈开哪怕是微小的一步，也会对电子学和物理学产生很大的影响．应当指出，微波和光受激发射技术是这样新颖而富于革命性，因此其发展与应用前景在目前尚无法预料．估计在某些方面的应用，其重要性可能超过本书讨论过的范围．

目　　录

第一章　輻射理論

辐射理论讨论的对象是电磁波和物质间的相互作用．这种相互作用是所有量子器件中的基本过程．以后将要讨论的课题，如受激发射现象，顺磁弛豫理论，量子顺磁放大器的设计理论和量子顺磁放大器中的噪声等，都是建立在辐射理论的基础上的．

在量子顺磁放大器中，只涉及辐射理论的一部分內容，即电磁波的散射、吸收和辐射，这就是本章所要讨论的內容．辐射理论的其他方面，如电子湮沒而转化为光子等，都不属于我们讨论的范围．因为辐射理论在量子顺磁放大器中占有重要的地位，所以我们将尽可能地给以详细的介绍．关于这方面的更全面的阐述，可参考海脱勒的"辐射的量子理论"[Heitler, 1954]一书．

本章分为三部分．第一部分从麦克斯韦方程和罗仑兹方程出发，叙述辐射的经典理论．这将有助于我们对辐射过程得到直观的了解和清晰的物理概念．第二部分是辐射的半经典理论，给出了感应发射和感应吸收的正确结果．第三部分是辐射的量子理论，它给出辐射过程的最详细知识．

§ 1.1. 电磁場的基本关系式

令 $\mathbf{E}$ 代表电场强度，$\mathbf{H}$ 代表磁场强度，ρ 和 $\mathbf{v}$ 分别是电荷密度和电荷的运动速度，c 为光速，则真空中电磁场的麦克斯韦方程组为

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho,\\
\operatorname{div}\mathbf{H} &= 0,\\
\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\
\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

这里采用了高斯单位(今后不特别声明)．在(1.1.1)式中，如果知道了 ρ 和 $\mathbf{v}$ 的运动规律，就能求出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的运动规律．由(1.1.1)式的一个特解，加上齐次方程组

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^0=\operatorname{div}\mathbf{H}^0=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}^0=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}^0}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^0=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}^0}{\partial t}\tag{1.1.2}$$

的解 $\mathbf{E}^0$ 和 $\mathbf{H}^0$，就是方程组(1.1.1)的通解．

反过来，如果已经事先知道电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的运动规律，则可以用罗仑兹方程求出电荷的运动规律．在电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 中运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷 e 所受的力为

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right). \tag{1.1.3}$$

此外，根据定义，电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}. \tag{1.1.4}$$

由(1.1.1)式的第一个式子和第四个式子容易得到连续性方程

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) + \dot{\rho} = 0. \tag{1.1.5}$$

现在引入势的概念．因为 $\mathbf{H}$ 的散度等于零，所以可引入矢势 $\mathbf{A}$，使

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{1.1.6a}$$

这时(1.1.1)式的第三个方程变成

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

所以可以引入标势 ϕ，使得

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi. \tag{1.1.6b}$$

利用矢量恆等式

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad} - \nabla^2,$$

由方程组(1.1.1)可以得到剩下的两个等式：

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2\mathbf{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}\right) = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \tag{1.1.7a}$$

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\phi} = 4\pi\rho. \tag{1.1.7b}$$

由 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 可以唯一地决定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$，但是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 却不能唯一地决定 $\mathbf{A}$ 和 ϕ．如果引入任意函数 χ，令 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad}\chi$，$\phi' = \phi + (1/c)\dot{\chi}$，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的数值仍然不变．这种变换的不变性叫作规范不变性．因为客观上可以测量的是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$，所以适当地选择 χ，可使方程组(1.1.7)大大简化．一般说来，χ 的常用的选择方法有两种．第一种方法是令

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = \operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \frac{1}{c}\dot{\phi}_0, \tag{1.1.8}$$

ϕ_0 和 $\mathbf{A}_0$ 是满足(1.1.7)式的任一组解．如上所述，函数

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 - \operatorname{grad}\chi,\\ \phi &= \phi_0 + \frac{1}{c}\dot{\chi}\end{aligned}\right\}$$

也是(1.1.7)式的解，把它们代入(1.1.8)式，得到

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}=0. \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)式称为罗仑兹条件. 这时方程组(1.1.7)变为

$$-\Box\mathbf{A}\equiv\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}-\nabla^2\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \tag{1.1.10a}$$

$$-\Box\phi\equiv\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}-\nabla^2\phi=4\pi\rho. \tag{1.1.10b}$$

明显地，如果选取 $\mathbf{A}_0$ 和 ϕ_0 满足罗仑兹条件，那么 χ 满足

$$\nabla^2\chi-\frac{1}{c^2}\ddot{\chi}=0. \tag{1.1.11}$$

因此选择 χ 的方法可以有无穷多种. 在(1.1.10)式中，$\mathbf{A}$ 和 ϕ 的方程形式是相似的，都是非线性波动方程. 因此特解的形式也是相似的:

$$\varphi(\mathbf{R}_0,t)=\int\frac{1}{R}\rho(\mathbf{r},t-R/c)dV, \tag{1.1.12a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0,t)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r},t-R/c)}{R}dV. \tag{1.1.12b}$$

式中 R 代表积分的体积元（位于 $\mathbf{r}$）到所考虑点 $\mathbf{R}_0$ 的距离. 势在 t 时的值由电荷在 $(t-R/c)$ 时的运动情况决定，代表电磁作用的传播速度是光速 c. 由方程(1.1.12)所描述的势称为推迟势.

和(1.1.1)与(1.1.2)式相对应，方程(1.1.10)的通解还包括齐次方程组

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{A}^0-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}^0=0,\\&\nabla^2\phi^0-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}^0=0,\\&\operatorname{div}\mathbf{A}^0+\frac{1}{c}\dot{\phi}^0=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.13}$$

的解. 选择 χ，使 $\phi^0=0$，则上述方程组化为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{A}^0-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}^0=0,\quad\operatorname{div}\mathbf{A}^0=0,\\&\mathbf{E}^0=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}^0,\quad\mathbf{H}^0=\operatorname{rot}\mathbf{A}^0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.14}$$

它们的解是横波.

在量子理论中，在处理没有电子存在的情况时，常常使用另一种规范，称为库仑(Coulomb)规范，它是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{1.1.15}$$

这种规范的时间部分和空间部分不对称，所以沒有相对论的不变形式（不象罗仑兹条件可以写成 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$，其中 $\mu = 1, 2, 3, 4$. x_1, x_2, x_3 代表空间坐标，$x_4 = ict$；A_1, A_2, A_3 代表矢势的三个分量，$A_4 = i\phi$. 附标出现两次代表对 μ 求和.）但是在把电磁场量子化后却不出现纵光子和标量光子——它们在实验中不能观察到，因此库仑规范比罗仑兹规范简单.（如果读者有兴趣，可参考朱洪元的"量子场论"一书[朱洪元，1960]）. 在这种规范中，方程组(1.1.7)变为

$$-\Box \mathbf{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\phi} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \tag{1.1.16a}$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \tag{1.1.16b}$$

后一式子刚好就是普通的泊松方程，标势和电荷密度的关系就和电荷在静止时的情况一样.

最后，引入电磁场的能量

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV, \tag{1.1.17}$$

以及坡印亭(Poynting)矢量(能流密度矢量)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.1.18}$$

容易证明，能量之间的平衡关系为

$$\frac{d(T + U)}{dt} = -\oint S_n d\sigma, \tag{1.1.19}$$

式中，T 是所考虑体积内电荷体系的动能，等式右边的曲面积分在所考虑空间的表面进行，S_n 代表自里向外垂直曲面的矢量 $\mathbf{S}$ 的分量. 这个式子表明，电荷体系和电磁场的能量增加，等于外界所供给的能量.

§1.2. 偶极辐射和线宽

如果我们感兴趣的地点离开产生辐射的电荷体系很远(相对于电荷体系的线度而言)，则方程组(1.1.12)就可以进一步简化. 选取原点 O 在电荷体系内任意一点，P 是所求场的那一点，令 $\mathbf{R}_0$ 代表自 O 到 P 的径矢量，用 $\mathbf{n}$ 代表单位矢量 $\mathbf{R}_0/R_0$. 设电荷 $de = \rho dV$ 的矢径是 $\mathbf{r}$，由 de 到 P 点的矢径为 $\mathbf{R}$，那么有 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$，$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. 在 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的

积分中，$\mathbf{R}_0$ 保持不变。

假定我们感兴趣的区域 $R_0 \gg |\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}|$，即离辐射源很远的地方，同时 $R_0 \gg \lambda$，λ 为波长．这个区域叫做波区．那么因为 $|\mathbf{R}_0| \gg |\mathbf{r}|$，就可以把 R 展开为 $\mathbf{r}$ 的幂级数，保留展开式中 $\mathbf{r}$ 的一次方项．由泰勒展开式

$$f(\mathbf{r}) \cong f(0) + \mathbf{r}\cdot \operatorname{grad} f(0),$$

可得到

$$R = R_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}.$$

代入方程组(1.1.12)时，积分号内的分母 R 可直接用 R_0 代替，如果分子的宗量 $(t - R/c)$ 中的 R 也要用 R_0 来代替的话，其条件并不在于时间 R_0/c 和时间 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c$ 的相对大小，而是在于在 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c$ 的时间内，可将电荷分布的改变忽略．令电荷体系的运动周期为 T，线度为 a，则 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c$ 和 a/c 同数量级，所以上述的条件就相当于 $a/c \ll T$，由于 $\lambda = cT$，所以要求波长 λ 比 a 大很多，即

$$\lambda \gg a.$$

如果电荷的运动速度数量级是 v，那么 $T \approx a/v$，上述的条件可改写成

$$v \ll c,$$

即电荷的运动速度要远小于光速．对于我们以后讨论的原子系统中束缚电子的情况，这些条件都是满足的．因此，(1.1.12b)式变为

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}(t')dV, \tag{1.2.1}$$

式中 $t' = (t - R_0/c)$．对 ϕ 也有类似的式子．

在我们考虑的“波区”区域，它满足 $R_0 \gg \lambda \gg a$，因此计算还可以进一步简化．简化的原因有两个：第一，电磁场强度正比于 $1/R_0$，另一个正比于 $1/R_0^2$ 的项（可以证明有这一项的存在）可以忽略不计；第二，这时在不大的区域内可以把电磁波看成平面波．这是因为此时有 $-\Box\mathbf{A}\cong 0$，$-\Box\phi\cong 0$，即化成(1.1.13)式，所以可以应用(1.1.14)式中关于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的式子．注意到 $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}$（上式中已略去 $1/R_0^2$ 项），那么

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

现在我们来求方程(1.2.1)的解，并把它代入(1.2.2)式求出电磁场强度的表达式．因为 t' 与积分变数无关，并且由于(1.1.4)式，所以

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}(\sum e\mathbf{v}),$$

由于

$$\sum e\mathbf{v}=\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}=\dot{\mathbf{d}},$$

式中 $\mathbf{d}$ 是电荷体系的偶极矩,所以

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}, \tag{1.2.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n},\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}.\end{aligned}\right\} \tag{1.2.4}$$

因此由(1.1.18)式得坡印亭矢量:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi c^3R_0^2}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2\mathbf{n}. \tag{1.2.5}$$

现在考虑电荷体系对所有方向辐射能的总和. 辐射到立体角元 $d\Omega$ 之内的辐射强度 dI,等于通过与 $d\Omega$ 相对应的球面面元 $R_0^2d\Omega$ 的能流,即

$$dI=\frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2d\Omega. \tag{1.2.6}$$

取极轴沿 $\ddot{\mathbf{d}}$ 方向, $\mathbf{n}$ 的方向为(θ,φ), $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$, 对 $d\Omega$ 积分得单位时间内的辐射能:

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2, \tag{1.2.7}$$

这就是偶极辐射的公式. 由这个式子可以看出，只有作不等速运动的电荷体系才会辐射电磁波.

上述讨论还可以从另一个观点来看. 运动电荷体系对外的辐射是克服某种力对外作功的结果,由于在上面的讨论中幷沒有出现另外的相互作用,所以这个力是电荷体系所产生的电磁场作用在电荷体系本身的结果,因而叫做“自力”,用 $\mathbf{F}_S$ 表示. 由能量平衡的结果,得到

$$\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{F}_S\cdot\mathbf{v})dt=-\int_{t_1}^{t_2}I\,dt=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\mathbf{v}}^2dt.$$

上式中把电荷体系认为是一个电荷,这完全是为了简化的缘故. 为了明显地导出 $\mathbf{F}_s$ 的形式,可以假定运动是周期运动, t_2-t_1 是 n 个周期. 在(t_2-t_1)的时间内对外辐射的能量远小于电荷本身的能量,所以在 t_1 和 t_2 时,运动情况的变化可以忽略,也即 $\mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 不变. 把