

量子顺磁放大器原理

黄武汉 林福成 編著

內 容 簡 介

本书比较全面、扼要地阐述了量子顺磁放大器的原理和设计理论。内容包括：辐射理论、有关的羣论方法、顺磁能谱和弛豫现象、腔式和行波式放大器的工作原理、微波结构的特性、顺磁晶体的选择和使用、放大器的密度矩阵理论、量子顺磁放大器及其系统的噪声、实验技术和实验方法等。

本书的主要对象是研究生。如在内容上作适当选择，亦适于作为大学量子电子学及微波波谱学专业高年级学生的教材；同时，也适于作为科学研究人员、高等学校教师和工程技术人员的参考书。

量子顺磁放大器原理

黄武汉 林福成 编著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 117 号

北京市书刊出版业营业许可证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/18

1965 年 11 月第一次印刷 印张：30 4/9

精装：0001—1,370 插页：5

平装：0001—1,230 字数：636,000

统一书号：15031·215

本社书号：3343·15-7

定价：[科六] 精装本 4.50 元
平装本 3.90 元

序

本书对量子顺磁放大器的原理和设计理论作了比较系统和深入的阐述,书中特别着重于物理基础的讨论。至于技术上的问题,虽然常常成为研制这类器件的关键,但是由于它正在不断发展,这里只能概括地介绍其一般情况,以及我们在实际工作中的点滴经验。

本书的部分章节曾经在中国科学技术大学的有关专业中讲授过,但是为了使本书适宜于主要供研究生阅读,大部分内容是这次重新写的。内容分为四部分。第一部分讨论辐射理论和羣论的有关知识。这是考虑到在我国大学中除了理论物理专业外都没有详细地讲授过这两方面的内容,而它们对研究顺磁晶体的能谱理论和弛豫理论是十分重要的,辐射理论还是讨论量子器件受激发射和噪声的基础,所以本书对此作了比较全面的介绍。第二部分讨论顺磁晶体的能谱和顺磁弛豫,阅读本书所需要的电子顺磁共振的知识,基本上都已包括在内。我们只是有选择地讨论了过渡族离子在离子晶体中的性质,这里的讨论比目前一些介绍量子顺磁放大器的专著较为详尽。这是因为,应用第一部分所介绍的辐射理论和羣论的结果,就有可能把推导过程扼要地介绍出来。我们希望,通过这一部分知识,使读者能够基本上掌握量子顺磁放大器所用到的顺磁晶体的研究方法和发展动态。第三部分讨论量子顺磁放大器,内容包括顺磁晶体的受激辐射及其特性、微波结构的特性、顺磁晶体的选择和使用、放大器及其系统的噪声、放大器的密度矩陣理论、实验技术和实验方法等。在这一部分中,我们综合了近年来在学术刊物上的大量文章,因而使这部分介绍比较系统。为使尚未具备关于微波结构、噪声、量子统计等知识的读者能阅读这一部分内容,本书对有关的基本概念也作了适当的介绍。我们试图在这一部分内容中反映出量子顺磁放大器迅速发展比较定型的主要结果。第四部分给出了一些有用的图表,主要是关于羣论、顺磁晶体的能级和跃迁几率、放大器的设计方面的参考资料,估计对读者是会有帮助的。

关于阅读本书所需要的准备,在物理方面只要具有相当于综合性大学的量子力学的知识;在无线电技术方面,只要具有微波理论和技术以及低频线路的初步知识。

本书主要是为那些对量子顺磁放大器的物理基础感兴趣的读者而编写的;但是对于只希望了解放大器具体内容的一些读者,不妨直接接受从顺磁共振研究得到的结果,这样,即使从第五章开始阅读也不会遇到很大的困难。初次阅读时可以不读第八章。此外,

书中编撰了一些习题,其中不注明参考文献的一部分,利用正文中的结果就可以解出,它能帮助读者巩固已学到的知识。其他注明了参考文献的那部分习题,收集了看来似乎与正文无直接关系但却又是很有意义的研究工作;这类习题有助于扩大读者眼界。碰到这些习题时读者不妨先思考一下,然后再翻阅参考文献;即使不详读文献,知道这些结果也是有好处的。

这里要向帮助我们完成本书的朋友与同事们致以谢忱。在编写第六章的大部分和第十章的一部分时,我们利用了凌君达先生搜集的材料和她的工作经验;同时凌君达先生还阅读了本书的大部分手稿,并给了许多帮助。第十章引用了刘闾先生的一些实验工作(图 10.2, 10.8, 10.9, 10.11, 10.21 及图 10.22)。黄宏嘉教授和郑乐民副教授详细地阅读了全书手稿,并提出了许多宝贵的意见。胡澄同志对第四章,陈宗隲及陆志刚先生对第九章曾提出过不少建设性的意见。

本书内容牵涉较广,作者学识浅陋,错误在所难免。我们诚恳地希望读者给我们提出批评和建议,以便有再版机会时加以改正。

黄武汉 林福成

緒 言

在无线电电子学中，一般的电子器件是利用自由电子的运动与电磁场交换能量来产生或放大电磁波的。由于自由电子的无规运动，在一般的电子器件中不可避免地存在着散粒噪声和热噪声。如果信号强度比噪声还要小，接收外来的讯号就变得十分困难了。大家知道，接收系统的灵敏度有赖于其讯号噪声比，所以提高接收机的灵敏度一直是和降低放大器的噪声水平相联系的。近年来低噪声高灵敏度放大器件的研究很受人们所重视。这主要是因为在实践中日益产生了对高灵敏度低噪声接收机的迫切需要。诸如：远程警戒雷达、人造卫星和超远距离通讯、遥测与遥控、射电天文学研究等方面都需要应用极高灵敏度的接收机来接收微弱讯号。为了获得灵敏度极高、噪声极低的放大器件，近年来进行了大量的研究工作，寻找新的工作原理和发展新器件。人们发现了利用微观系统分立能级间的感应辐射，可以制成超低噪声的放大器件。这类新型器件具有一系列突出的性能，因而使之迅速地发展成为一个新的科学技术领域。因为这门学科只有应用量子力学的方法才能得到充分的解释，所以国际上一般称它为量子电子学。量子电子学在原理上与经典无线电电子学有根本的区别，它不是利用自由电子，而是利用束缚电子，也就是利用物质的束缚电子与电磁波的相互作用使之发生能态的转变而产生或放大电磁波的。由于利用了感应辐射的特点，量子电子学的发展有可能解决过去经典无线电电子学中没有得到很好解决的三个关键问题：放大十分微弱的外来讯号，产生频率非常稳定的电磁波，以及开辟亚毫米波直到可见光。这些都为在无线电电子学上还是空白的波段提供了可能性。它的发展将引起无线电电子学以及其它学科的重大革新，其发展前途、规模、广度、深度以及对其他学科的影响是难以估量的。

量子顺磁放大器是量子电子学中的一个组成部分。由于在微波和毫米波段中自发辐射所引起的噪声非常微小，量子顺磁放大器作为微波和毫米波段的低噪声放大器，它的噪声可以接近测不准关系所容许的极限，亦即可以接近物理上可能实现的线性放大器的最低噪声极限。无论在理论上还是在实际上，都证明在微波和毫米波段内量子顺磁放大器的低噪声性能是无可比拟的。量子顺磁放大器具有前所未有的极高的灵敏度，有可能用来检测和放大甚至只有几个量子组成的极微弱的输入讯号。正是由于这一点，它在所有需要灵敏度特别高的接收系统中，存在着广泛的应用潜力。目前在不少实验性的系统中

应用了量子顺磁放大器作前置放大器,例如人造卫星电视通讯系统以及不少国家的射电望远镜装置中,量子放大器都在成功地运行中。

在本世纪的四十年代,扎沃依斯基 [Завойский, 1944] 发现了电子的顺磁共振,奠定了微波波段电子顺磁能级研究的基础。在五十年代初期,国外的一些科学家曾指出了利用电磁场量子 and 微观系统相互作用来产生和放大电磁波的可能性。1954~1955 年间他们制成氨分子束振荡器。这种振荡器具有极高的频率稳定性,但作为放大器则嫌频宽太窄。1955 年巴索夫和普洛霍洛夫 [Басов и Прохоров, 1955] 提出用三能级的方法来得到负温度。1956 年布隆伯根 [Bloembergen, 1956] 详细地计算了获得负温度的条件,提出了利用离子晶体中的过渡族离子来获得微波的放大,从而确定了目前的量子顺磁放大器的基本工作原理。1957 年斯科维尔等 [Scovil, Feher and Seidel, 1957] 研制成功了第一个量子顺磁放大器。以后几年,量子顺磁放大器无论在理论上和实验上都得到迅速的发展。在这短短的五、六年间,在这方面发表了成百上千的论文,在技术上也由实验室进入了实际应用的阶段。

和量子电子学的其他分支一样,量子顺磁放大器是基本学科和技术学科结合的产物。具体地讲,量子顺磁放大器一方面是建立在量子力学、固体物理学、电子顺磁共振这些基本学科上面,另一方面又广泛地应用了无线电电子学技术和低温技术。

由于量子顺磁放大器日趋完善,它的基本理论已由不少刊物作了介绍,现在就有可能比较全面和比较深入地介绍它的工作原理和物理基础。关于辐射的量子理论,过渡族离子在离子晶体中的能级和弛豫性质,量子顺磁放大器的基本理论和特性,量子放大器及其系统的噪声等方面,正是无线电电子学工作者感到新鲜的东西,因此本书也侧重这些方面。对于量子顺磁放大器本身,只详细地介绍了布隆伯根型的三能级情况。对于脉冲工作的二能级情况,因为不能作为性能良好的微波和毫米波低噪声放大器,就是用作发生器也很不成熟,所以本书只能对它作附带讨论。

最后,我们简单地估计一下量子顺磁放大器的发展方向。在微波波段,目前存在的问题是如何使它在现场运用时达到小型化、可靠、耐久。其中的关键问题在于如何克服庞大的低温系统和笨重的磁铁所带来的不便。最近在技术上已获得一些进展,例如使用保温时间较长的杜瓦瓶,把气体液化器小型化,使用永久磁铁或者超导磁铁等等。在这方面,继续寻找合适的顺磁晶体,寻找新的工作原理(例如利用交叉弛豫效应,光波激励微波放大,提高工作温度等等),设计高质量的谐振腔和慢波结构,都具有重要的意义。不过,就低噪声器件的本质来看,想进一步把工作温度提高到室温附近,恐怕是不现实的。量子顺磁放大器的另一个更为重要的发展方向就是去占领频率更高的波段。最近,单色光产生器

(光量子放大器)已经十分迅速地发展起来。在微波和光波波段之间存在着一个十分广阔的区域,这个区域内的放大器件和振荡器件恐怕还是非量子器件莫属。在这个区域内迈开哪怕是微小的一步,也会对电子学和物理学产生很大的影响。应当指出,微波和光受激发射技术是这样新颖而富于革命性,因此其发展与应用前景在目前尚无法预料。估计在某些方面的应用,其重要性可能超过本书讨论过的范围。

目 录

序	iii
绪 言	v
第一章 辐射理论	1
§ 1.1 电磁场的基本关系式	1
§ 1.2 偶极辐射和线宽	4
§ 1.3 散射、吸收和辐射	8
§ 1.4 与时间有关的微扰理论	12
§ 1.5 辐射的半经典理论	16
§ 1.6 自由电磁场的量子化	22
§ 1.7 有相互作用时的近似解法	26
§ 1.8 电磁波辐射和吸收的量子理论	30
§ 1.9 测不准关系式。涨落现象	33
第二章 羣论。原子和分子的补充知识	35
§ 2.1 对称变换羣	35
§ 2.2 羣的表示	41
§ 2.3 全旋转羣的不可约表示	48
§ 2.4 乘积表示 $D^{(j)} \times D^{(j')}$ 的约简。矢量耦合系数	56
§ 2.5 自由原子的能级	58
§ 2.6 不相容原理。洪德 (Hund) 定则	64
§ 2.7 特征标的理论	68
§ 2.8 晶体点羣	73
§ 2.9 维格纳-艾卡特 (Wigner-Eckart) 定理	78
§ 2.10 超精细结构	85
§ 2.11 分子结构的简单描述	91
§ 2.12 分子的振动	96
§ 2.13 时间反演和克兰默斯定理	103
§ 2.14 亚恩-特勒效应	107
第三章 过渡族离子的顺磁共振能谱	114
§ 3.1 一般介绍	114
§ 3.2 立方场	120

§ 3.3	能级的对称性质	126
§ 3.4	晶格场矩阵元的计算	132
§ 3.5	铁族离子的等效自旋哈密顿量(I)	141
§ 3.6	铁族离子的等效自旋哈密顿量(II)	150
§ 3.7	稀土族离子的自旋哈密顿量	159
§ 3.8	共价键的理论。氰酸盐、4d 族、5d 族、5f-6d 族的情况	165
§ 3.9	顺磁能级和跃迁几率的计算	171
§ 3.10	几种效应	178
第四章	顺磁弛豫	186
§ 4.1	磁化率的唯象理论	186
§ 4.2	自旋-自旋相互作用	199
§ 4.3	交叉弛豫	208
§ 4.4	自旋-晶格弛豫	214
§ 4.5	多能级自旋系统中的弛豫过程	222
第五章	顺磁晶体的受激辐射及其特性	229
§ 5.1	负温度和受激辐射	229
§ 5.2	谐振腔和顺磁晶体的等效参数	233
§ 5.3	谐振腔式量子顺磁放大器	238
§ 5.4	行波式量子顺磁放大器	245
§ 5.5	多腔量子顺磁放大器	247
§ 5.6	功率饱和	250
第六章	量子顺磁放大器中的微波结构	254
§ 6.1	谐振腔的一般特性	254
§ 6.2	几种常用的谐振腔	259
§ 6.3	常用的慢波结构和反向隔离	264
§ 6.4	周期性结构特性的计算	269
第七章	顺磁晶体的选择和使用	276
§ 7.1	顺磁离子的考虑	276
§ 7.2	晶体的选择	280
§ 7.3	常用顺磁晶体的自旋哈密顿量及其参数	283
§ 7.4	感应跃迁几率的性质	293
§ 7.5	交叉弛豫过程的利用	298
第八章	量子顺磁放大器的密度矩阵理论	308
§ 8.1	密度矩阵	308
§ 8.2	二能级量子放大器	313
§ 8.3	三能级量子顺磁放大器	317

§ 8.4 共振线的分裂	322
§ 8.5 反作用场	326
§ 8.6 量子顺磁放大器与参量放大器	332
第九章 量子顺磁放大器及其系统的噪声	336
§ 9.1 量子顺磁放大器系统概述	336
§ 9.2 噪声的若干概念	338
§ 9.3 系统各部分噪声的分析	343
§ 9.4 量子顺磁放大器本身的噪声 I (不考虑微波结构对噪声的贡献)	347
§ 9.5 量子顺磁放大器本身的噪声 II (考虑微波结构对噪声的贡献)	356
§ 9.6 噪声温度测量	360
第十章 实验技术	364
§ 10.1 电子顺磁共振波谱仪	364
§ 10.2 顺磁晶体特性的测量	374
§ 10.3 量子顺磁放大器的实验装置	379
§ 10.4 量子顺磁放大器性能的测量	381
§ 10.5 杜瓦瓶和其他的低温技术	386
§ 10.6 晶轴的确定	392
附录 I 物理常数和微波波段的划分	396
1. 物理常数	396
2. 微波波段的划分	396
附录 II 维格纳系数表	397
附录 III 一些点群的特征标表	408
1. 对称变换的尚弗利斯符号	408
2. 32 个晶体点群的符号	408
3. 不可约表示的记法	408
4. 点群的单值表示	409
5. 一些点群的两值表示	410
附录 IV 与顺磁离子能级计算有关的点群的一些性质	413
1. 全旋转群表示 $D(J)$ 在某些晶体点群作用下的约简	413
2. 某些晶体点群不可约表示的基和时间反演性质	413
3. 某些晶体点群乘积表示的约简	416
4. 某些晶体点群的一部分矢量耦合系数	418
附录 V 一些点群表示的对称二次幂和反对称二次幂的约简	423
附录 VI 算符等价法	424
1. 位能的直角坐标形式	424

2. 算符的等价形式·····	425
3. $\hat{V}^m$ 矩阵元的数值·····	426
4. 算符等价的参数·····	432
附录 VII 过渡族离子的自旋哈密顿·····	435
1. 最低轨道为单重态的铁族离子·····	435
2. 最低轨道为多重态的铁族离子·····	435
3. 含有奇数个电子的稀土元素离子·····	436
4. 含有偶数个电子的稀土元素离子·····	436
5. S 态离子·····	436
6. 强共价键化合物·····	436
附录 VIII $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$ 的能级和跃迁几率·····	437
1. 计算机的计算结果·····	437
附表 8.1—8.9 ($\theta = 10^\circ - 90^\circ$)	
2. 能级图·····	506
附图 8.1—8.11 ($\theta = 0^\circ - 90^\circ, 54^\circ 44'$)	
3. 最大的跃迁几率矩阵元·····	510
附图 8.12—8.19 ($H_{dc} = 0.5 - 7.5 \text{Kg}$)	
附录 IX $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Fe}^{3+}$ 的能级·····	513
1. 能级数据·····	513
2. 能级图·····	521
附录 X $\text{TiO}_2:\text{Cr}^{3+}$ 的能级图·····	522
1. 一般能级图·····	522
2. 对称能级图·····	523
附录 XI 自交叉弛豫三厘米红宝石量子放大器的设计数据·····	525
1. 自交叉弛豫对放大器性能的影响·····	525
2. $x \sim \theta$ 曲线·····	525
3. $I(\alpha^2 + \gamma^2)$ 或 $I(\beta^2)$ 图·····	525
附录 XII 主要符号表·····	533
参考文献·····	534
外国人名的译名与原名对照表·····	539

第一章 輻射理論

輻射理論討論的對象是電磁波和物質間的相互作用。這種相互作用是所有量子器件中的基本過程。以後將要討論的課題,如受激發射現象,順磁弛豫理論,量子順磁放大器的設計理論和量子順磁放大器中的噪聲等,都是建立在輻射理論基礎上的。

在量子順磁放大器中,只涉及輻射理論的一部分內容,即電磁波的散射、吸收和輻射,這就是本章所要討論的內容。輻射理論的其他方面,如電子湮沒而轉化為光子等,都不屬於我們討論的範圍。因為輻射理論在量子順磁放大器中占有重要的地位,所以我們將盡可能地給以詳細的介紹。關於這方面的更全面的闡述,可參考海脫勒的“輻射的量子理論”[Heitler, 1954]一書。

本章分為三部分。第一部分從麥克斯韋方程和羅倫茲方程出發,敘述輻射的經典理論。這將有助於我們對輻射過程得到直觀的了解和清晰的物理概念。第二部分是輻射的半經典理論,給出了感應發射和感應吸收的正確結果。第三部分是輻射的量子理論,它給出輻射過程的最詳細知識。

§ 1.1. 電磁場的基本關係式

令 $\mathbf{E}$ 代表電場強度, $\mathbf{H}$ 代表磁場強度, ρ 和 $\mathbf{v}$ 分別是電荷密度和電荷的運動速度, c 為光速,則真空中電磁場的麥克斯韋方程組為

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

這裡採用了高斯單位(今後不特別聲明)。在(1.1.1)式中,如果知道了 ρ 和 $\mathbf{v}$ 的運動規律,就能求出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的運動規律。由(1.1.1)式的一個特解,加上齊次方程組

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^0 = \operatorname{div} \mathbf{H}^0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

的解 $\mathbf{E}^0$ 和 $\mathbf{H}^0$, 就是方程組(1.1.1)的通解。

反过来,如果已经事先知道电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的运动规律,则可以用罗伦兹方程求出电荷的运动规律.在电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 中运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷 e 所受的力为

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (1.1.3)$$

此外,根据定义,电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (1.1.4)$$

由(1.1.1)式的第一个式子和第四个式子容易得到连续性方程

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \dot{\rho} = 0. \quad (1.1.5)$$

现在引入势的概念.因为 $\mathbf{H}$ 的散度等于零,所以可引入矢势 $\mathbf{A}$, 使

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (1.1.6a)$$

这时(1.1.1)式的第三个方程变成

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

所以可以引入标势 ϕ , 使得

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi. \quad (1.1.6b)$$

利用矢量恒等式

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} - \nabla^2,$$

由方程组(1.1.1)可以得到剩下的两个等式:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2 \mathbf{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (1.1.7a)$$

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\phi} = 4\pi \rho. \quad (1.1.7b)$$

由 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 可以唯一地决定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$, 但是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 却不能唯一地决定 $\mathbf{A}$ 和 ϕ . 如果引入任意函数 χ , 令 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi$, $\phi' = \phi + (1/c)\dot{\chi}$, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的数值仍然不变. 这种变换的不变性叫作规范不变性. 因为客观上可以测量的是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$, 所以适当地选择 χ , 可使方程组(1.1.7)大大简化. 一般说来, χ 的常用的选择方法有两种. 第一种方法是令

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{c} \dot{\phi}_0, \quad (1.1.8)$$

ϕ_0 和 $\mathbf{A}_0$ 是满足(1.1.7)式的任一组解. 如上所述, 函数

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 - \operatorname{grad} \chi, \\ \phi &= \phi_0 + \frac{1}{c} \dot{\chi} \end{aligned} \right\}$$

也是(1.1.7)式的解,把它们代入(1.1.8)式,得到

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0. \quad (1.1.9)$$

(1.1.9)式称为罗仑兹条件. 这时方程组(1.1.7)变为

$$-\square \mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (1.1.10a)$$

$$-\square \phi \equiv \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi = 4\pi \rho. \quad (1.1.10b)$$

明显地,如果选取 $\mathbf{A}_0$ 和 ϕ_0 满足罗仑兹条件,那么 χ 满足

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = 0. \quad (1.1.11)$$

因此选择 χ 的方法可以有无穷多种. 在(1.1.10)式中, $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的方程形式是相似的,都是非线性波动方程. 因此特解的形式也是相似的:

$$\varphi(\mathbf{R}_0, t) = \int \frac{1}{R} \rho(\mathbf{r}, t - R/c) dV, \quad (1.1.12a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R/c)}{R} dV. \quad (1.1.12b)$$

式中 R 代表积分的体积元 (位于 $\mathbf{r}$) 到所考虑点 $\mathbf{R}_0$ 的距离. 势在 t 时的值由电荷在 $(t - R/c)$ 时的运动情况决定,代表电磁作用的传播速度是光速 c . 由方程(1.1.12)所描述的势称为推迟势.

和(1.1.1)与(1.1.2)式相对应,方程(1.1.10)的通解还包括齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}^0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}^0 &= 0, \\ \nabla^2 \phi^0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi}^0 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{A}^0 + \frac{1}{c} \dot{\phi}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.13)$$

的解. 选择 χ , 使 $\phi^0 = 0$, 则上述方程组化为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}^0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}^0 &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}^0 = 0, \\ \mathbf{E}^0 &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}^0, \quad \mathbf{H}^0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.14)$$

它们的解是横波.

在量子理论中,在处理没有电子存在的情况时,常常使用另一种规范,称为库仑(Cou-

lomb)规范,它是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (1.1.15)$$

这种规范的时间部分和空间部分不对称,所以没有相对论的不变形式(不象罗仑兹条件可以写成 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$, 其中 $\mu = 1, 2, 3, 4$, x_1, x_2, x_3 代表空间坐标, $x_4 = ict$; A_1, A_2, A_3 代表矢势的三个分量, $A_4 = i\phi$. 附标出现两次代表对 μ 求和.) 但是在把电磁场量子化后却不出现纵光子和标量光子——它们在实验中不能观察到, 因此库仑规范比罗仑兹规范简单. (如果读者有兴趣, 可参考朱洪元的“量子场论”一书[朱洪元, 1960]). 在这种规范中, 方程组(1.1.7)变为

$$-\square \mathbf{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\phi} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (1.1.16a)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho. \quad (1.1.16b)$$

后一式子刚好就是普通的泊松方程, 标势和电荷密度的关系就和电荷在静止时的情况一样.

最后, 引入电磁场的能量

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV, \quad (1.1.17)$$

以及坡印亭(Poynting)矢量(能流密度矢量)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.1.18)$$

容易证明, 能量之间的平衡关系为

$$\frac{d(T + U)}{dt} = - \oint S_n d\sigma, \quad (1.1.19)$$

式中, T 是所考虑体积内电荷体系的动能, 等式右边的曲面积分在所考虑空间的表面进行, S_n 代表自里向外垂直曲面的矢量 $\mathbf{S}$ 的分量. 这个式子表明, 电荷体系和电磁场的能量增加, 等于外界所供给的能量.

§ 1.2. 偶极辐射和线宽

如果我们感兴趣的地点离开产生辐射的电荷体系很远(相对于电荷体系的线度而言), 则方程组(1.1.12)就可以进一步简化. 选取原点 O 在电荷体系内任意一点, P 是所求场的那一点, 令 $\mathbf{R}_0$ 代表自 O 到 P 的径矢量, 用 $\mathbf{n}$ 代表单位矢量 $\mathbf{R}_0/R_0$. 设电荷 $de = \rho dV$ 的矢径是 $\mathbf{r}$, 由 de 到 P 点的矢径为 $\mathbf{R}$, 那么有 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. 在 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的

积分中, R_0 保持不变.

假定我们感兴趣的区域 $R_0 \gg |\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}|$, 即离辐射源很远的地方, 同时 $R_0 \gg \lambda$, λ 为波长. 这个区域叫做波区. 那么因为 $|\mathbf{R}_0| \gg |\mathbf{r}|$, 就可以把 R 展开为 $\mathbf{r}$ 的幂级数, 保留展开式中 $\mathbf{r}$ 的一次方项. 由泰勒展开式

$$f(\mathbf{r}) \cong f(0) + \mathbf{r} \cdot \text{grad } f(0),$$

可得到

$$R = R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

代入方程组(1.1.12)时, 积分号内的分母 R 可直接用 R_0 代替, 如果分子的宗量 $(t - R/c)$ 中的 R 也要用 R_0 来代替的话, 其条件并不在于时间 R_0/c 和时间 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$ 的相对大小, 而是在于在 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$ 的时间内, 可将电荷分布的改变忽略. 令电荷体系的运动周期为 T , 线度为 a , 则 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$ 和 a/c 同数量级, 所以上述的条件就相当于 $a/c \ll T$, 由于 $\lambda = cT$, 所以要求波长 λ 比 a 大很多, 即

$$\lambda \gg a.$$

如果电荷的运动速度数量级是 v , 那么 $T \approx a/v$, 上述的条件可改写成

$$v \ll c,$$

即电荷的运动速度要远小于光速. 对于我们以后讨论的原子系统中束缚电子的情况, 这些条件都是满足的. 因此, (1.1.12b) 式变为

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}(t') dV, \quad (1.2.1)$$

式中 $t' = (t - R_0/c)$. 对 ϕ 也有类似的式子.

在我们考虑的“波区”区域, 它满足 $R_0 \gg \lambda \gg a$, 因此计算还可以进一步简化. 简化的原因有两个: 第一, 电磁场强度正比于 $1/R_0$, 另一个正比于 $1/R_0^2$ 的项 (可以证明有这一项的存在) 可以忽略不计; 第二, 这时在不大的区域内可以把电磁波看成平面波. 这是因为此时有 $\nabla \cdot \mathbf{A} \cong 0$, $\nabla \phi \cong 0$, 即化成(1.1.13)式, 所以可以应用(1.1.14)式中关于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的式子. 注意到 $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$ (上式中已略去 $1/R_0^2$ 项), 那么

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

现在我们来求方程(1.2.1)的解, 并把它代入(1.2.2)式求出电磁场强度的表达式. 因为 t' 与积分变数无关, 并且由于(1.1.4)式, 所以

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} (\sum e\mathbf{v}),$$

由于

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

式中 $\mathbf{d}$ 是电荷体系的偶极矩, 所以

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}, \quad (1.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

因此由(1.1.18)式得坡印亭矢量:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3 R_0^2} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 \mathbf{n}. \quad (1.2.5)$$

现在考虑电荷体系对所有方向辐射能的总和。辐射到立体角元 $d\Omega$ 之内的辐射强度 dI , 等于通过与 $d\Omega$ 相对应的球面面元 $R_0^2 d\Omega$ 的能流, 即

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 d\Omega. \quad (1.2.6)$$

取极轴沿 $\ddot{\mathbf{d}}$ 方向, $\mathbf{n}$ 的方向为 (θ, φ) , $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, 对 $d\Omega$ 积分得单位时间内的辐射能:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2, \quad (1.2.7)$$

这就是偶极辐射的公式。由这个式子可以看出, 只有作不等速运动的电荷体系才会辐射电磁波。

上述讨论还可以从另一个观点来看。运动电荷体系对外的辐射是克服某种力对外做功的结果, 由于在上面的讨论中并没有出现另外的相互作用, 所以这个力是电荷体系所产生的电磁场作用在电荷体系本身的结果, 因而叫做“自力”, 用 $\mathbf{F}_s$ 表示。由能量平衡的结果, 得到

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt.$$

上式中把电荷体系认为是一个电荷, 这完全是为了简化的缘故。为了明显地导出 $\mathbf{F}_s$ 的形式, 可以假定运动是周期运动, $t_2 - t_1$ 是 n 个周期。在 $(t_2 - t_1)$ 的时间内对外辐射的能量远小于电荷本身的能量, 所以在 t_1 和 t_2 时, 运动情况的变化可以忽略, 也即 $\mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 不变。把