

高等学校教学用书



53.819
571
=1

固体物理引论

GUTI WULI YINGLUN

上册

C. 基特耳 著
万紆民 万寿民 译
萧静斋 李明荣

人民教育出版社

在本书中, 作者对固体物理学中的许多重要领域, 如晶体学、晶体点阵的振动理论、晶体点阵的热、介电和磁性质、能带理论、半导体、超导电性、晶体缺陷等都作了非常清晰的介绍, 还指出了某些问题的发展方向。可作为有关系科的大学生和研究生的参考书, 也可供有关的科学技术研究人員参考。

新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 15010·1058 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 20 $\frac{3}{16}$
字数 435,000 印数 0,001—6,000 定价 (6) 元 2.00
1962年6月第1版 1962年6月北京第1次印刷

一般参考文献

晶体学

F. C. Phillips, *An introduction to crystallography*, Longmans, London, 1946.

M. J. Buerger, *Elementary crystallography*, John Wiley & Sons, New York, 1956.

原子物理学基础

Max Born, *Atomic physics*, Hafner, New York, 5th ed., 1951.

F. K. Richtmyer and E. H. Kennard, *Introduction to modern physics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 4th ed., 1947.

浅近教本

F. O. Rice and E. Teller, *Structure of matter*, John Wiley & Sons, New York, 1949.

J. C. Slater, *Introduction to chemical physics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1939.

J. C. Slater, *Quantum theory of matter*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1951.

高深教本

N. F. Mott and H. Jones, *Theory of the properties of metals and alloys*, Clarendon Press, Oxford, 1936.

F. Seitz, *Modern theory of solids*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1940.

F. Seitz and D. Turnbull, *Solid state physics, advances in research and applications*, Academic Press, New York, Vol. 1, 1955; Vol. 2, 1956; Vol. 3, tentative date December 1956.

A. H. Wilson, *Theory of metals*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd ed., 1953.

R. E. Peierls, *Quantum theory of solids*, Clarendon Press, Oxford, 2nd.

el., 1955.

数据汇编和参考指南

Chemical Abstracts (especially the decennial indices).

Gmelins *Handbuch der anorganischen Chemie*.

Landolt-Bornstein *Physikalisch-chemische Tabellen*, J. Springer, Berlin,

5th ed., 1935; 6th ed., 1952.

C. J. Smithells, *Metals reference book*, Butterworths Scientific Publications, London, 1949.

前 言

人們对物質材料的結構、性質和行为的了解，大部分是通过量子力学、分子运动論和缺陷結構理論的应用，近来已經取得了很大的进展。科学家和工程師們目前利用固体物理和現代化学这些工具来研究、发展并应用金属、陶瓷、玻璃、半导体以及聚合物。此外，原子能和电子学的研究，也促进了这些物質材料的工艺学的进展，虽然这种作用也許是不太明显的。人們对性能更好的新材料和对旧有材料內的新性能的需要，促使了这些領域的发展。

这套丛书的总的企图，是要介紹構成所有重要固体物質的行为、制作和技术应用的基础方面的科学和工艺学。由于作者們掌握了整套丛书的发展动态，严重的重复是不会有，因此，丛书的每一本书和与其有关的其它几本书能够較好地結合成为一个整体。我們編著这套丛书的目的，是希望它能符合大学生、青年科学家和工程師們的需要，并且还希望能适合过去可能沒有讀过現在正在成为大学正規課程的那些学科而需要学习的較有經驗的人們的需要。而且，为了适应这些需要，丛书的内容是从基本观点闡述的，因而它将具有持久的兴趣和重要性。

丛书中有几卷将是讲述固体物理学和固体化学的。其它几卷將討論金属、陶瓷、玻璃、半导体以及聚合物的行为。我希望这套丛书將是一套充分闡述物質材料的科学、工艺学和工程学的内容广博的丛书。这些材料的行为的科学描述就是固体物理学。基特耳博士著的本书第一版，是这門科学的非常精辟的导論和評述。新版本經過了仔細的校訂并增添了新材料，它不仅是丛书的基石，并且以編者所希望保持的周密性和特色，給本丛书树立了一个良好的开端。

約翰·郝洛蒙(John H. Hollomon)

第二版序言

作者编写本书的目的,是希望它能作为物理学、化学和工程学的学生們在学习固体物理学时的初級教科书。其目的是要初步地、簡要地闡明固体物理学中具有代表性的方面。至于內容深度,讀者必須較好地、概括地熟悉現代原子物理学(其程度相当于許多大学中对大学肄业生所授的現代原子物理学教程)以后,才能深入理解本书內容。此外,可以不必先讀量子力学也能理解本书大部分內容,但是讀者还应该熟悉普朗克(Planck)輻射定律、德布罗意(De Broglie)关系、氫原子的玻尔(Bohr)理論、塞曼(Zeeman)效应和自由質点的波动方程。一些須要用到量子力学基础的高深問題,放在附录中去討論。

固体物理学是一門領域辽闊的科学。它研究的对象是固体的物理性質,特別要研究原子和分子在晶体中相互組合并有規則的周期排列时所表現出来的特殊性質。現在已經有了能解决范围广闊的不少問題的有成效的理論方法和观念,它們对于这一領域的发展有着重大的統一的影响。因此很自然,一本初級教科书应当着重討論固体的簡單模型的基本理論。在取材方面,我坦然喜欢那些可以用簡單、具体和已有适当发展的模型来討論的內容。然而,不应该忘記,真实固体差不多总是比我們所設想的模型更为錯綜复杂。

第二版比第一版大約增多了 200 頁。新增篇幅的一半是用来充实基本概念的解释,特别是充实晶体的对称性和能带理論的解释。另一半則用来增加有关合金、半导体、光导电性、发光和固体缺陷等新材料。出版社曾經搜集了那些把本书第一版选为教本的教师們的意見,这些意見已使我在第二版的修訂工作中得到帮助。我謹向曾以他們的經驗使我受益的許多人們,致以总的謝意。

作者不打算把本书写成一般的参考书。固体物理学的若干活跃的和重要的分支，在本书内毫未提及。在略去的问题中有内耗、热电效应、相变、氧化物阴极、表面物理学、压电效应、液体氦和固体氦、塑料和分子晶体。本书的每一章几乎都是其他作者各自的专著方面的论题，因而对本书所包括的问题的论述，必然是不完善的。各章的参考文献，仅列举一些有代表性的评论和经典性论文，同时还从近来的著作中精选出来很多资料，以便使读者能够从中获得这门科学的现代动向的本质的印象。从这样丰富的优秀著作中摘引资料，当然要比实际计算更加随便些。有一些文献由于机遇律的原因被略去了，作者对此表示歉意。

每章之末都列有数组习题，对于过于复杂或困难的习题，都以星号记明。在附录 18 中，给出了热力学和统计力学的有关部分的极其简略的摘要。除另有注明之处外，本书均采用高斯 cgs 单位。电子的电荷 e 的值，取负号： $e = -4.80 \times 10^{-10}$ 绝对静电单位。

作者在第一版序言中曾经表示过下述的致谢：“我衷心感激我的学生 E. 阿布腊姆斯、M. 科恩、H. 卡普兰、F. 克弗、J. 特斯曼以及 Y. 亚费特，因为他们校对了本书的几部分内容。我要感谢 J. 巴尔登对超导电性和半导体两章的审阅以及 F. 赛次对有关固体缺陷各章的审阅；K. K. 达诺曾经欣然审阅过若干章节。对于以下各位的帮助，谨致谢意：R. T. 比尔格对于基本物理常数值方面所给与的帮助；N. 布勒伯根提议了很多的习题；劳伦斯·布喇格先生和 W. M. 洛默所给与的位错模型照片；A. 冯·希佩耳和小 P. W. 福斯贝格所供给的铁电畴照片；H. F. 克伊和 B. J. 阿珀耳布供给了晶体长大图案的照片；A. F. 基普和 M. 廷克哈姆所供给的超精细结构照片；E. R. 帕尔克所供给的小角度的晶粒间界照片；H. J. 威廉斯供给的铁磁畴照片以及 W. H. 查卡里孙供给的离子半径表。我还要感谢 W. 布拉坦、E. 费密、C. 赫临、A. N. 霍耳登、U. 玛裘斯女士、J. 韦毛思以及 E. A. 伍德夫人等的帮助和建议。C. E. 索尔希耳夫人在索引的汇编工作中曾给了我极诚挚的帮助。”

R. E. 貝林格欣然校對過第二版的內容。位錯理論一章幾乎完全是約翰·菲歇重寫成的，作者衷心感謝他的慷慨幫助和令人信服的討論。我還感謝 F. 斯坦對校樣的校對。對於以下各位的幫助，我謹致謝意：W. 肖克累的多項建議；F. 克弗和 A. M. 波蒂斯建議了許多習題；P. H. 基朱和 N. 派耳曼制訂了德拜溫度數值表；D. S. 馬克路爾供給了激子(exciton)光譜照片；J. B. 紐開克供給了晶體長大照片；A. L. 夏諾供給了超導電體的磁疇結構照片；A. H. 懷特供給了半導體晶體管的照片；W. J. 麥耳茲和 R. 佩平斯基制訂了鐵電性數據表；M. 廷克哈姆在題目索引的匯編工作中的幫助；J. C. 肯九魯和 R. G. 巴里西供給了比爾格旋進照相機製得的 X 射綫照片；小 F. L. 伏格耳供給了位錯腐蝕陷斑照片；J. M. 賈利費夫人供給了粉末照片；J. 瓦希伯恩供給了勞厄(Laue)照片；小 C. A. 否勒供給了磁疇花紋照片；R. L. 斯特里供給了病毒晶體的電子顯微鏡照片；C. S. 巴雷特供給了 Cu_3Au 的有序-無序轉變的 X 射綫照片；C. J. 克里斯曼供給了金屬磁化率數值的示圖；S. 布倫訥和 D. 康托利昂女士供給了金屬晶須照片；J. W. 米特切耳供給了位錯網照片；H. 布魯克斯供給了有效質量數值；西里耳·斯·斯密斯供給了位錯的晶粒間界照片以及 W. 克萊特對磁化率值的編纂。我從 F. 賽次在柏克拉所作的講座中特別受到教益。作者還要感謝 R. H. 布貝、M. 藍珀特、J. H. 哈拉門、H. W. 路易斯、R. 斯莫拉喬斯基、J. E. 郭耳德曼以及 W. D. 克萊特等的幫助和建議。F. C. 菲利普斯所著結晶學導論一書的出版者：朗曼、格林和康帕尼，曾欣然允許我轉載了許多該書所用的許多圖形。我很感謝 A. F. 凱普對於他在以本書為教本的教學中取得的經驗所作的討論。如果沒有 C. E. 索爾希耳夫人的幫助，這一版是決不能問世的。

C. 基特耳 于柏克拉，加里福尼亞 1956 年 8 月

目 录

一般参考文献	vii
前言	ix
第二版序言	x
第一章 晶体结构的描述	17
平移群, 二维晶体, 二维点群, 平移对称条件对点群的限制, 二维结晶学点群的推导, 二维布喇菲点阵, 二维空间群, 三维晶体, 三维点群, 三维布喇菲点阵, 三维空间群, 密勒指数, 简单晶体的 结构, 六角密集结构, 金刚石结构, 閃鋅矿的结构, 氯化鈉的结构, 氯化鉍的结构, 氯化鈣(螢石)的结构, 晶体结构的資料蒐集, 习题, 参考文献	
第二章 晶体的X射线衍射	47
布喇格定律, 劳厄衍射方程, 干涉条件和倒易点阵, 原子散射 因数, 几何结构因数, X射线衍射的实验方法, 劳厄法, 旋轉晶体 法, 粉末法, X射线衍射在固体和冶金方面的应用, 习题, 参考文 献	
第三章 固体的分类; 离子晶体的点阵能量	68
晶体結合的经验分类, 离子晶体, 共价晶体, 金属晶体, 分子 晶体, 氫键晶体, 离子晶体的点阵能, 氯化鈉的点阵能, 馬德隆常 数的推算, 关于排斥势的幂指数 n 的计算, 晚近的研究工作, 离子 半径, 习题, 参考文献	
第四章 晶体的弹性常数	92
弹性应变和应力的分析, 膨胀, 切应变, 应力分量, 弹性屈服 和勁度常数, 能量密度, 立方晶体, 弹性常数的实验测定, 立方晶 体中的弹性波, 弹性的各向同性, 斜角关系, 弹性系数的点阵理論, 关于金属的计算, 习题, 参考文献	
第五章 点阵振动	
一维的均匀綫的振动, 同質原子綫上的波动, 計算有限长的綫	



的簡正振动方式, 含两种原子的一維晶体, 二維点陣和三維点陣的振动, 离子晶体的紅外綫吸收, 习题, 参考文献

第六章 固体的热学性质.....128

經典統計力学的回顧, 点陣热容量的爱因斯坦模型, 点陣热容量的德拜模型, 双原子点陣, 德拜理論的回顧, 金属中傳导电子的热容量, 和内部自由度相联系的热容量, 固体的热导率, 热导率的計算, 电介質晶体中声子的平均自由程, 金属的热导率, 热膨胀, 固态方程, 格朗萊生关系式, 习题, 参考文献

第七章 电介质的性质.....170

局部电場, 退极化电場, 洛倫茲場, 空腔内部偶极子的电場, 电容器极板間的电介質中的电場, 介电常数和极化率, 介量常数的測量, 电子的极化率, 电子的极化率的經典理論, 离子的极化率, 取向极化率, 极化率突变, 固体中的电偶极子的取向, 电偶极子的弛豫和介电損失, 德拜弛豫時間, 固体中的弛豫, 复数介电常数和損失角, 习题, 参考文献

第八章 铁电晶体.....197

駐极体, 铁电晶体的分类, 鈦酸鋇的理論, 铁电体中电极化的突变, 鈦鈦矿結構中的局部电場, 在居里点附近的介电常数, 铁电畴, 反铁电晶体, 习题, 参考文献

第九章 抗磁性与順磁性.....224

抗磁性, 朗之万的抗磁性方程的推导, 对于一个特殊情况的拉莫尔定理的推导, 分子的抗磁性, 磁化率的測量方法, 順磁性, 朗之万的順磁性理論, 順磁性的量子理論, 稀土元素离子, 鉄族离子, 軌道角动量的猝灭, 核子的順磁性, 以順磁盐的絕热去磁化来进行冷却, 达到的極低温度, 核子自旋共振吸收和电子自旋共振吸收, 宏观方程, 綫的寬度, 零場中电子能級的裂距, 附言, 关于单位的說明, 习题, 参考文献

第十章 金属的自由电子模型.....253

电导率和欧姆定律, 維德曼-弗蘭茲比, 傳导电子的热容量, 傳导电子的順磁磁化率, 匣中自由粒子的量子理論, 費密-狄喇克分布定律, 絕对零度, 低温($kT \ll E_F$), 电子气的热容量的量子理

論, 自旋順磁性的量子理論, 費密-狄喇克分布对电导率的影响, 紫外綫中碱金属的透明性, 热离子发射的方程, 习题, 参考文献	
第十一章 固体的能带理論; 布里淵区	293
周期点陣中的波函数, 克罗尼格-彭內模型, 克罗尼格-彭內結果的另一种推导法, 波矢量为零的波函数, 威格勒-賽次法, 晶体中电子的有效質量, 有效質量的物理基础, 有效質量的后果, 霍耳效应, 空穴的运动, 金属电导率的計算, 剩余电阻, 布里淵区, 軟性X射綫发射光譜, 习题, 参考文献	
第十二章 布里淵区理論在金属和合金中的应用	338
体心立方点陣, 面心立方点陣, 六角密集結構, 金属的能带結構, 碱金属, 貴金属, 两价金属, 三价金属, 二元合金, 关于合金相的休谟-饒塞里定律, 霍耳常数的变化, 磁化率的变化, 过渡元素, 有序-无序变化, 有序的基本理論, 长程序和短程序, 习题, 参考文献	
第十三章 半导体晶体	374
本征电导率, 本征范围內的迁移率, 杂质电导率或外来电导率, 杂质能态, 杂质的热电离, 杂质原子存在时的迁移率, 实验結果的分析, 寿命和复合, 少数載流子的輸运和空穴注入, 迴旋加速器共振实验, 半导体內的輻射损伤, 习题, 参考文献	
第十四章 半导体整流器与晶体管	414
鍺晶体的制备, 阻擋层的整流作用, $p-n$ 結的整流作用, 点触晶体管, 結型晶体管, 习题, 参考文献	
第十五章 鉄磁性与反鉄磁性	435
居里点与交换积分, 自发磁化强度与温度的关系, 絕对零度下的自发磁化强度, 迴旋磁性实验和后旋共振实验, 迴旋磁性实验, 鉄磁共振吸收, 鉄磁嚙, 磁嚙的来源, 矯頑磁力与滞后現象, 可逆的磁导率, 磁性材料, 各向异性性能, 磁致伸縮, 布洛赫壁, 磁嚙的大小, 反鉄磁性, 双子点陣模型, 居里点以下的磁化率, 反鉄磁性共振, 用中子衍射来确定自旋点陣, 鉄銻氧磁物的磁性, 习题, 参考文献	
第十六章 超导电性	483

实验情况, 零电阻, 持久电流, 磁场效应, 磁力线驱出, 中间状态, 过渡到正常状态时熵的增加, 频率效应, 迴旋磁比率, 同位素效应, 超导电性的产生, 非理想的超导体, 细粒的超导电性, 温差电效应, 热导率, 理论状况, 超导电性转变的热力学, 布洛赫定理, 伦敦方程式, 高频时的超导电性, 一个球的磁化率及粒度效应, 居间状态与磁畴结构, 超导电性的量子理论, 习题, 参考文献

第十七章 点阵空位、扩散和色中心.....510

点阵空位, 扩散, 金属, 基尔肯多耳效应, 色中心, F 中心, 其它电子中心, V 中心, 照相过程, 习题, 参考文献

第十八章 激子、光导电性以及发光.....539

激子, 绝缘晶体中的光导电性, 陷阱, 隙中的光导电性, 空间电荷或极化效应, 晶体计数器, 发光, 硫化物磷光体, 受钝激活过的氯化钾, 电致发光, 习题, 参考文献

第十九章 位错.....573

单晶体的抗切强度, 位错, 位错的应力场, 小角度的晶粒间界, 位错密度, 位错繁殖和滑移, 合金的强度, 位错与晶体生长, 习题, 参考文献

附录.....608

A. 计算点阵总电势的埃瓦耳德方法, B. 极化率的量子力学表示式, C. 极性物质的介电常数的翁萨格理论, D. 单核系统抗磁性的量子理论, E. 范符累克的温度无关的顺磁性, F. 磁能和静电能, G. 軌角动量受晶体电场的作用而猝灭, H. 顺磁性盐中的光谱裂距因数 g , I. 近似自由电子受周期性电势的微扰, J. 金属电子的紧密束缚近似法, K. 低温下的电导率, L. 本征半导体中的迁移率, M. 康韦耳-怀斯科夫公式的推导, N. 费密能级与化学势, O. 铁磁体中自旋波的半经典的讨论, P. 布洛赫定理, Q. 重要的换算因数, R. 热力学和统计力学结果的摘要, S. 常用的物理常数的值

第一章 晶体结构的描述

我們首先来探討完善晶体的几何性質。一个完善晶体，可以看作是由相同的結構单元或积木(building block)，在空間作无穷多的、有規則的重复而形成的。本章仅对晶体結構的主要对称性进行初步的討論。要在这里深入地討論这些問題是不可能的。有兴趣的讀者可参考本章末所开列的专门教科书。原子的周期排列的特性，在固体物理学中具有根本的重要性；在本章內，我們的任务是要分析和描述可能的周期排列的几何性質。

平移群

如果一个物体由排列成点陣的原子所組成，这点陣具有三个基本平移矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，这些矢量有着如下的性質，即当从任意点 $\mathbf{r}$ 观察时，和在另一个满足条件

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}, \quad (1.1)$$

(其中 n_1, n_2, n_3 为任意的整数)的点 $\mathbf{r}'$ 观察时，所看到的原子排列在各方面都全同，那么，这个物体就被定义为理想晶体。如果从任意两点 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 所看到的原子排列是相同的，并且經過适当地選擇整数 n_1, n_2, n_3 以后，該两点就能始終滿足公式(1.1)，那么，基本平移矢量就是初基的。我們常常把初基平移矢量定义为晶軸 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，虽然晶軸的其它的(非初基的)选取法也将采用。

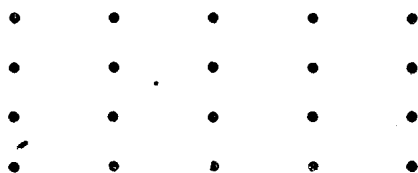
如果令晶体平行于自身而移动，且移动的量为

$$\mathbf{T} = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}, \quad (1.2)$$

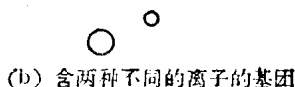
則这种移动操作叫做平移操作。对于整数 n_1, n_2, n_3 的所有的值，进行这种操作的总和，就叫做晶体的平移群。最重要的描写晶体結構特点

的操作就是与晶体結構相联系的对称操作^①。討論三維晶体的对称性，頗为冗长，因此我們將相当全面地叙述二維晶体理論，而仅仅討論少数三維結構的重要例子。

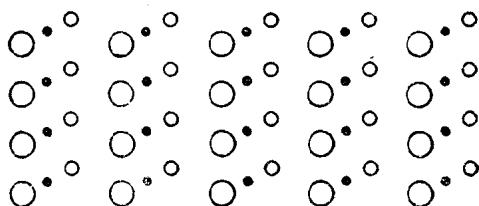
一个平行的、类似网状的点的排列，如果其中任何一点周圍的环境和任何其它一点周圍的环境，在各方面都全同，那么我們就定义这种点的排列为点陣。我們必須弄清楚点陣和晶体結構的区别：晶体結構是由每个陣点与一个在成份、排列、取向上均相同的原子集团单位或原子基团相結合而成的。这种差别已在图 1.1 中表明。如我們所料想，所



(a) 空間点陣



(b) 含两种不同的离子的基团



(c) 晶体結構

图 1.1. 晶体結構(c)可看作基团(b)和空間点陣(a)的每个陣点相加而成。

① 本书中关于晶体对称性的討論，一般都依照 F. Seitz 的論述，Z. Krist. 88, 433 (1934); 90, 289(1935); 91, 336(1935); 94, 100(1936)以及 Vol. 1 of *International tables for X-ray crystallography*, Kynoch Press, Birmingham, 1952. 关于空間群的最易懂的討論，見 F. C. Phillips, *An introduction to crystallography*, Longmans, London, 1946, 221—272 頁。

有的陣点都是由上述方程(1.2)所决定的諸平移操作 T 而联系起来。

二維晶体

图 1.2 所示的一般的二維点陣，是一个无限的点列陣。这些点遵从点陣条件，即各个点在相同的取向上应该有相同的环境。显然，图中所示的 a, b 是点陣的初基平移矢量的一种可能选择。由初基平移矢量 a, b 决定的一般的平行四边形，构成一个初基晶胞，它只是晶胞的一种，以后我們將詳細地討論晶胞，現在只須指出一点，即施于一个晶胞的晶体平移操作，將把平面上的点包括无遺。只在角隅上才含有陣点的晶胞，称为初基晶胞。

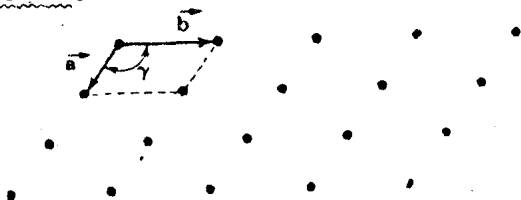


图 1.2. 一般的二維斜方点陣的基本平移矢量 a, b 和晶胞的一种可能选择。

引入联系初基矢量 a, b 的特殊关系，是有益处的。这种关系将决定四种特殊点陣，这些特殊点陣所具有的对称性，是图 1.2 那样的一般的斜方点陣所沒有的。要了解这些特殊点陣，我們首先必須討論联系二維点群的对称操作。

二維点群

所謂点群，就是对于一个点所施的对称操作的集合，經過这种操作后，物体不发生变化。这个物体，比方說，可以是一个分子、一个原子团、一个点陣或一个晶体結構。二維結晶学上的点群的对称操作，就是指的环绕一个点的一重、二重、三重、四重和六重旋轉以及横过一根綫的鏡反射。我們以数字表示旋轉操作，以符号 m 表示鏡反射。就一个

平面分子而言,任意旋轉 $\frac{2\pi}{n}$,原則上都可以是一種對稱操作,此處 n 為一整数。現在我們要證明,對於一個點陣,僅當 $n=1, 2, 3, 4, 6$ 時,才於方程(1.1)所規定的平移對稱的要求。

$\frac{2\pi}{5}$ 就是一個不許可的旋轉的例子。不可能有這種點陣,當繞

過該點陣的一個陣點的軸旋轉 $\frac{2\pi}{5}$ 後,就能夠使這點陣重合到原來位置。我們把這個特殊例子的證明,留作習題 1.1,請讀者自己去證明,雖然即將在下節導出的普遍結果也足以說明這樣一個旋轉是不許可的。

平移對稱條件對點群的限制

我們已經知道,在二維情況下,對點陣施以平移

$$\mathbf{T} = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b}, \quad (1.3)$$

不會使點陣有任何改變。我們將會看到,正是這種要求限制了許可的旋轉和與一給定的旋轉相一致的平移。我們還要研究在更普遍的情形下都不引起改變的點陣,即這種點陣在施以繞着一個陣點的旋轉並且同時施以一個平移後,仍然不變。

設在一個固定的笛卡兒坐標系中有一個點 (x, y) ,它繞着原點旋轉了一個角度 ϕ 而移至另一点 (x', y') ,那麼 x', y' 由如下的方程確定:

$$x' = x \cos \phi - y \sin \phi;$$

$$y' = x \sin \phi + y \cos \phi.$$

假定 $\mathbf{a}$ 為平移群中最短的非零平移。我們選擇坐標系的軸時,使 $\mathbf{a}$ 平行於 x 軸。現在,如令 $\mathbf{a}$ 旋轉一個角度 ϕ ,我們就得到一個新矢量 $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}'$ 的分量為

$$a'_x = a \cos \phi;$$

$$a'_y = a \sin \phi.$$

如果這個點陣在旋轉 ϕ 後仍然不變,則矢量 $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ 必為方程(1.3)所決定的 $\mathbf{T}$ 的形式。矢量 $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ 的分量為

$$a'_x - a_x = a(\cos \phi - 1);$$

$$a'_y - a_y = a \sin \phi;$$

因此

$$|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^2 = a^2(2 - 2\cos\phi). \quad (1.4)$$

因为 $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ 是一个平移矢量 $\mathbf{T}$, 且 $\mathbf{a}$ 又是平移矢量中最短的矢量, 因而必有 $|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^2 \geq a^2$. 于是, 由公式(1.4), 有 $2 - 2\cos\phi \geq 1$, 或 $\cos\phi \leq \frac{1}{2}$, 因此

$$\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{3}. \quad (1.5)$$

上式即为 ϕ 的许可范围的一个条件。对 $\phi = 0$ 的旋转显然是许可的, 因为我们可以取 $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, 而使 $\mathbf{T} = 0$ 。

只要考虑到矢量 $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$ 亦必为 $\mathbf{T}$ 的形式, 且其大小不小于 $\mathbf{a}$, 那么就得到了对 ϕ 的另一个限制。如此, 必有 $2 + 2\cos\phi \geq 1$, 或 $\cos\phi \geq \frac{1}{2}$, 因此

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}. \quad (1.6)$$

上式即为 ϕ 的许可范围的第二个条件。但对于 $\phi = \pi$ 的旋转也是许可的, 因为可令 $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$, 而使 $\mathbf{T} = 0$ 。

对于 ϕ 的许可范围的最后一个限制, 可以由如下的推论得到: 我们令 $\mathbf{a}$ 反向旋转 $-\phi$ 而得到一个新的矢量 $\mathbf{a}''$, 它的分量为

$$\begin{aligned} a_x'' &= a \cos\phi; \\ a_y'' &= -a \sin\phi. \end{aligned}$$

矢量 $\mathbf{a}' + \mathbf{a}''$ 具有分量

$$\begin{aligned} a_x' + a_x'' &= 2a \cos\phi; \\ a_y' + a_y'' &= 0; \end{aligned}$$

因而

$$|\mathbf{a}' + \mathbf{a}''|^2 = 4a^2 \cos^2\phi. \quad (1.7)$$

由上所述, 必有 $4\cos^2\phi \geq 1$, 或

$$-\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{4\pi}{3}. \quad (1.8)$$