中国通信学会主编　通信工程丛书

数字通信数学基础

张宏基　陈尚勤　华达芬　唐绍淑编著

人民邮电出版社

中国通信学会主编

通信工程丛书

数字通信数学基础

张宏基　陈尚勤
华达芬　唐绍淑　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书内容包括数字通信中常用的几种数学。共分四章：第一章，现代代数基础；第二章，线性代数；第三章，离散正交变换；第四章，Z变换。各章可以单独阅读，不须具有特殊的预备知识。

这几种数学通常是在较高深的电信数学专著中讲述；本书都是从头讲起，讲来简明扼要，通俗、活泼、易懂，联系实际，而且内容丰富，都讲到了一定深度，是适于各部门通信各专业的工程技术人员自学的一本工作进修参考书和工具书。

中国通信学会主编
通信工程丛书
数字通信数学基础
张宏基　陈尚勤
华达芬　唐绍淑　编著

*

人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　　1982年9月第一版
印张：14　页数：224　　1982年9月北京第一次印刷
字数：320千字　　印数：1—9,000册
统一书号：15045·总2615-无6196
定价：1.45元

丛书前言

为了帮助我国通信工程技术人员有系统地掌握通信学科有关专业的基础理论知识，提高解决专业科技问题、做好实际工作的能力，了解通信技术的新知识和发展趋势，以便为加快我国通信建设、实现通信现代化作出应有的贡献，我会与人民邮电出版社协作，组织编写这套“通信工程丛书”，准备陆续出版。

这套丛书的主要读者对象是从事通信工作不久的大专院校通信学科各专业毕业生、各通信部门的助理工程师、工程师和其他通信工程技术人员。希望能够有助于他们较快地实际达到通信各专业工程师所应具有的理论水平和技术水平。

这套丛书的特点是力求具有理论性、实用性、系统性和方向性。丛书内容从我国实际出发，密切结合当前通信科技工作和未来发展的需要，阐述通信各专业工程师应当掌握的专业知识，包括有关的系统、体制、技术标准、规格、指标、要求，以及技术更新等方面。力求做到资料比较丰富完备，深浅适宜，条理清楚，对专业技术发展有一定的预见性。这套丛书不同于高深专著或一般教材，不仅介绍有关的物理概念和基本原理，而且着重于引导读者把这些概念和原理应用于实际；论证简明扼要，避免繁琐的数学推导。

对于支持编辑出版这套丛书的各个通信部门和专家们，我们表示衷心感谢。殷切希望广大读者和各有关方面提出宝贵的意见和建议，使这套丛书日臻完善。

中国通信学会

一九八二年五月一日

前　言

数字通信的主要特点是使用离散信号。对于离散信号的处理、传输、编码、识别等，往往需要一些特殊的数学作为研究的工具。本书分别讲述了现代代数（第一章），线性代数（第二章），离散正交变换（第三章），Z 变换（第四章）等四种离散信号常用的数学。

这几种数学的独立性相当强，而且各章编写时均已注意到减少与其它各章的联系，因此，读者可以方便地单独阅读其中任意一章。我们所以把这几种数学放在一起的原因，仅仅由于它们都是数字通信常用到的数学，放在一起，便于查阅。

内容选择着重于与电信工程有关的基础数学，从最基本的开始，故阅读起来不需具备特殊的预备知识。书中不过分追求数学上的严格论证，往往用举例说明的方法来代替繁难的证明。我们的目的是介绍一些工程数学入门的知识，供开始从事数字信号处理、传输、交换的广大通信工作者自学进修参考。

作　者　1981 年 6 月于成都

目　录

第一章 现代代数基础

§1 概 述

1.1 现代代数内容简介

在设计一个电报系统的时候，我们往往只考虑与“中文单字”传输有关的问题，如果动物园没有展出菊花，这并不会使游客失望，因为他们想看的本来是“各种动物”。把我们希望研究或感兴趣的“东西”放在一起，这就是现代代数中所谓“集合”的最朴素的概念。其实“集合”就是一堆“东西”。“中文单字”，“各种动物”都可以叫做集合。我们之所以把某些“东西”收集在一起，是因为它们有共同的性质，便于研究。有了一个集合意味着我们有了研究对象。当然，仅有对象并不能成为数学，要形成一门数学还必须添上一些“关系”和“运算”。最简单的算术，其实就是对一个自然数的集合规定了一些“关系”(例如比较两个数量大小的关系，等于和小于)和一些“运算”(例如加法、乘法)。若我们把研究对象放宽，使它包含零和负数，我们的集合就变成整数的集合了。如果继续把分数、无理数、虚数添进集合中，我们的研究对象也就逐步扩大成为有理数、实数和复数。但不论是自然数、整数、有理数、实数、复数，一言以蔽之，它们都是“数”。若跳出“数”的范围，用“东西”(例如文字、语言、数字电路等)作为研究对象，并引进一些规定来构成一门数学，这样的一门数学，正是本章所要介绍的现

代代数。

非常粗略地说，现代代数就是研究集合间和集合中的那些“东西”的“关系”和“运算”的代数。

当然我们会问：什么是“东西”的“关系”？“东西”能“运算”吗？“天”字和“地”字的“运算”结果是什么？“斑马”和“野牛”有什么“关系”？不难想像，如果不给出一系列的定义，这些问题将是非常含糊不清的。初学现代代数时，往往感到定义太多，把问题弄得很复杂化，但这是不可避免的。现代代数也叫做抽象代数，它比普通代数抽象得多，普通代数研究的是“数”，而现代代数研究的对象已经远远超出了“数”的范围。正是由于它相当抽象，因此定义也就比较多。数学定义是在数学的发展过程中逐步健全、增加、完善起来的。不是先有定义后有数学。我们讲数学的时候，往往先叙述前人为我们总结好了的定义，然后根据定义推导出数学，这只是为了讲述方便吧了。

我们在讲述时，将尽量减少不常用的定义，并把与数字通信关系不大的定义略去。现在，让我们先用一些例子来说明为什么要有这些定义。例如，一个普通代数表示式

$$A<B$$

所给出的是A和B的数量关系。如果A和B不是数，那就必须重新对“$<$”的含义下定义。例如，若用

斑马$<$野牛

表示斑马在前野牛在后，就是把“$<$”定义为前后的关系。同理，只要各种“东西”有关系，而我们又赋予关系以恰当的定义，就可以用代数方法描述“东西”的关系。

至于各种“东西”如何“运算”，其实这也是个定义问题。如果我们定义“$+$”表示“或者”，那么加法运算

天时$+$地利$+$人和

就表示“天时或者地利或者人和”。下面再举一个比较具体的例子。假设现在我们要讨论的是只有“通”、“断”两种状态的开关，加法运算表示并联，$A+B$ 表示开关 A 和开关 B 并联(见图 1.1.1 a)；乘法运算表示串联，$A\times B$ 表示开关 A 和开关 B 串

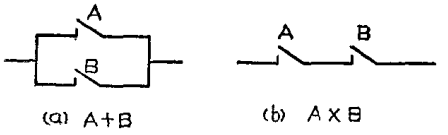

图 1.1.1

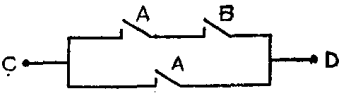

图 1.1.2 $(A\times B)+A$

联(见图 1.1.2 b)。因此 $(A\times B)+A$ 可以画成下面的图 1.1.2。如果我们只考虑 C、D 两点是否接通，显然这仅决定于 A 是“通”还是“断”，开关 B 不起作用。拿数学公式写出来，就是

$$(A\times B)+A=A$$

本章第 2 节说明集合的基本运算，第 3、4 节讨论集合内的“东西”间的“关系”，以后各节都是有关“东西”的“运算”。

1.2 现代代数在数字通信中的一些应用

上节我们已经从概念上说明了现代代数所研究的对象。本节我们简单地谈谈现代代数在数字通信中的一些应用。

数字通信的设备必须用到数字电路，设计数字电路的理论基础是布尔代数(更确切些说是开关代数，见 5.3 节)，而布尔代数在现代代数中是“一种分配有补格”(见 5.1 节)。布尔代数有很多种定义的方法，可以写成这样，也可以写成那样，一般常用 Huntington 于 1904 年给出的 6 条公理作为定义。不过，如何去理解这 6 条公理呢？各式各样的定义到底有没有什么区

别呢？如果我们从“格”的概念来理解布尔代数，我们将会知道，6条公理也好，其他写法也好，无非都是“分配有补格”的具体说明。因此现代代数能使我们对布尔代数有更全面、更深刻和更确切的理解。

数字通信传输的是数字信号（简单点说就是用0和1代表的二进信号）。在发送端，我们先把模拟信号编成二进代码；然后在接收端再把二进代码译成模拟信号。数字通信系统具有很多优越性，例如：可以进入数字计算机进行各种处理，可以进行保密编码，可以进行增加抗干扰能力的检错和纠错编码，可以比较方便地实现通信网的交换和多址通信等。不同的用途，编码的方法也不一样，伪随机码和纠错码（包括检错码）是其中很重要的两种。伪随机码主要用于保密、改变信号的概率分布、作遥控系统中的遥控信号、作多址通信中的地址信号等。纠错码则主要用于增加抗干扰能力，以便控制各式各样信道的误码率。随着数字通信的发展，采用的编码方法也五花八门，不胜枚举，人们早就希望找到一些理论，能够对研究编码方法起指导作用。五十年代出现了一种研究具体编码方法的代数码理论，这个代数就是现代代数。它把现代代数的理论，特别是群和域的理论，直接应用于具体的编码。不论是研究伪随机码还是纠错码，目前我们还没有比现代代数更得力的工具。五十年代还出现了信息论。它不研究编码方法，而着重研究编码的效率和极限。它的数学基础是概率论，而概率公理化定义也是建筑在现代代数的基础上的（见3.4节）。

七十年代以来，基于模糊数学的模糊信息、模糊逻辑等，已逐步在数字通信的领域中得到应用。简单点说：模糊数学是把现代代数中的普通集合改为模糊集合（见第§8节）的一种数学。模糊数学与现代代数，两者息息相关，甚至可以说后者是

前者的基础。

现代代数研究的是集合和集合中元素的关系与运算，只要把集合中的元素看成是数字信号，它就会给数字通信的研究带来不少方便。本章 2.6，3.4，5.4，6.8，8.4 节，将再列举一些实例来说明现代代数在数字通信中的某些应用。

§ 2 集合及其基本运算

2.1 集合和元素

集合是现代代数中最基本的概念，它没有严格的定义。本小节将给出一些符号和规定，用来比较清楚地表达集合这个概念。

我们用英文大写字母表示集合(简称集)，小写字母表示集合中的"东西"，今后我们叫做元素(简称元)。

$$x \in A$$

读作"x 属于 A"，意思是：元素 x 是集合 A 中的一种"东西"。与此相反，

$$x \notin A$$

读作"x 不属于 A"，表示 x 不是 A 的元素。

定义 如果集合 A 的任一元素都能在集合 B 中找到，同时集合 B 的任一元素也能在集合 A 中找到，则这两个集合相等，记成 $A=B$，或者 $B=A$。

为了使一个集合的元素能被一目了然，我们把元素放在一个大括号{ }中。至于如何写出大括号中的元素，则可以根据具体情况，选用下列三种方法之一。

(1) 把元素直接写出来。例如：

$\{0, 1\}$

$\{a, b, c, \cdots, y, z\}$,

$\{1, 2, 3, \cdots\}$。

(2) 用文字说明。例如：

$\{y^2-y=0$ 的全部解$\}=\{0, 1\}$,

{所有实数},

{中文单字}。

(3) 用一个小写字母(比如 x)表示任意元素，并在一竖之后注明 x 应该符合的条件。这种 x 叫做变元。例如：

$\{x \mid x^2-x=0\}$,

$\{x \mid x>1$，同时$x<5$ 的自然数$\}=\{2, 3, 4\}$,

$\{x \mid x \in A$，同时 $x \notin B\}$。

下面我们再就元素的写法作两条规定。

(1) 集合中的元素，如果可以用任意的顺序写出，叫做无序集；如果元素必须按一定的顺序排列，则叫做有序集。我们用{ }表示无序集，而用〈 〉表示有序集。例如：

$$\{a, b, c\}=\{c, b, a\}=\{b, a, c\}$$

$$\langle a, b, c\rangle \neq \langle c, b, a\rangle \neq \langle b, a, c\rangle$$

(2) 在同一个集合中，相同的元素只写一次。例如：

$$\{a, a, b, c, c, c\}=\{a, b, c\}$$

集合可以有无穷多个元素，也可以有有限多个元素，甚至一个也没有。这种一个元素也没有的特殊集合很重要，它相当于普通代数的零。我们给它一个专用符号 ϕ，并把它叫做空集。例如，

$$\{x \mid x>2 \text{ 同时 } x<1\}=\phi。$$

应该注意，

$$\phi \neq \{0\},$$