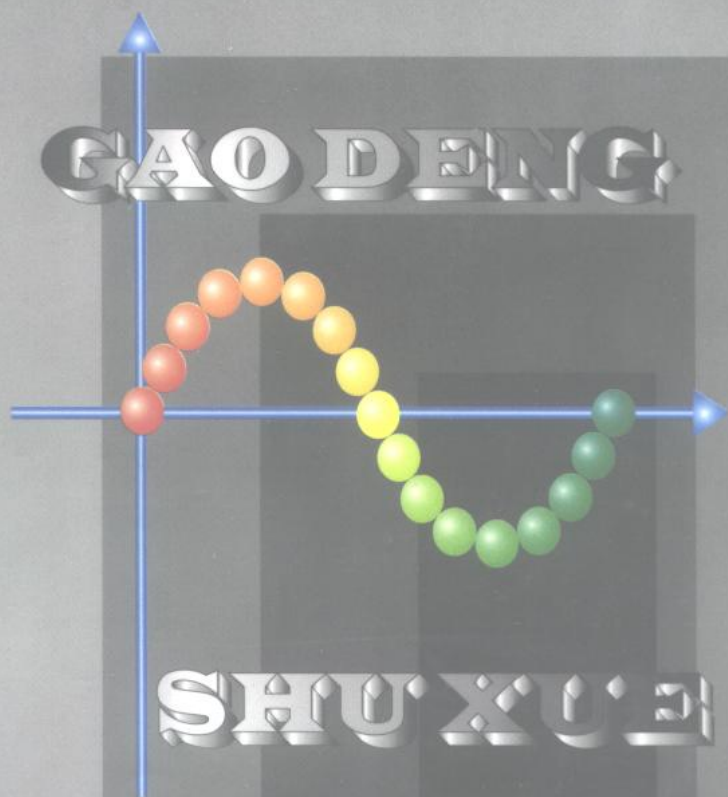


全国高等职业技术师范院校教材



高等数学

陈付贵 宋贵海 主编



天津大学出版社

448885

全国高等职业技术师范院校教材

高等数学

主 编 陈付贵 宋贵海

副主编 程昌年 黄汉禹 石 飏

参 编 (按姓氏笔划为序)

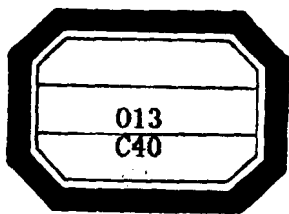
石 飏 宋贵海 吴 莉 陈付贵

郭运瑞 黄春生 黄汉禹 程昌年

主 审 李万选



00448885



天津大学出版社

内容提要

高等数学是高等院校的一门重要基础课. 本书分为四篇 19 章, 内容包括: 函数的极限与连续, 一元函数微积分及其应用, 多元函数微分法, 二重积分, 三重积分, 微分方程, 曲线与曲面积分, 积分变换, 行列式矩阵及线性方程组的解, 概率论等. 每章后都配有习题, 习题答案附书后, 以便于教学使用.

本书可作为高等院校工科类专业的教材, 也可供工业院校或成人高校、函授教育等有关专业选用, 还可作为工矿、企业工程技术人员、科技管理人员的参考书.

全国高等职业技术师范院校教材

高等数学

陈付贵 宋贵海 主编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

邮编: 300072

天津大学印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 31 字数: 774 千

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—6000

ISBN 7-5618-1032-6

O·96 定价: 35.00 元

前 言

为适应高等职业技术师范教育事业的发展,贯彻落实国家教委(1984)8号文件转发的《机制工艺教育专业教学方案》的精神,在国家教委师范教育司的指导下,依据1995年12月常州、石家庄两次会议通过的《全国职技高师机制工艺教育专业统编教材(高等数学)编写大纲》,我们编写了这本教材。

本书与同类教材相比,具有以下三个特点:

(一)本书结构严谨、内容精炼、重点突出.全书共分四篇,包括微积分、积分变换、线性代数、概率论四大部分共19章.在基本概念和方法的阐述上,着重于思路分析,注意培养学生的思维能力和逻辑推理能力以及运用知识分析解决问题的能力。

(二)根据高等职业技术教育教学改革的需要,将机制工艺教育专业所需数学知识与专业融为一体.在内容的取舍上,既照顾教材本身的知识体系又紧密联系专业实践,突出了学用结合、学以致用原则,摒弃了不必要的繁杂的理论推导过程。

(三)为加深对基本概念的理解,掌握理论方法,提高计算能力,本书每章都配有丰富的例题和习题,难易适中.对于每章习题书末附有答案,供教学时参考。

本书教学时数约为160学时,章节前加了“*”号的系教学大纲要求之外的内容,可根据学科需要,适当选用或参考。

本书可作为高等职业技术师范院校工科类专业的教材,也可作为工矿、企业工程技术人员、科技管理人员的自学参考书。

陈付贵教授为本书责任主编,宋贵海为主编;程昌年、黄汉禹、石飏为副主编.具体章节分工如下:

第一、四、五章由河南职业技术学院陈付贵编写;

第二、三章由天津职业技术学院程昌年编写;

第六、七章(前三节)由河南职业技术学院郭运瑞编写;

第七(后三节)、八章由天津职业技术学院黄春生编写;

第九、十章由上海师范大学黄汉禹编写;

第十一、十二、十三章由吉林职业技术学院宋贵海编写;

第十四、十五、十六章由湖南师范大学吴莉编写;

第十七、十八、十九章由常州职业技术学院石飏编写。

本书前10章由陈付贵统稿,后9章由宋贵海统稿.在广泛征求意见的基础上最后全书由陈付贵负责审理、修改和定稿.本教材在编写过程中,得到了河南职业技术学院、天津职业技术学院有关同志的通力合作和大力帮助,特别是天津职业技术学院教材科胡振武同志做了大量工作,在此谨致深切的谢意。

李万选教授在百忙中担任本书的主审,审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平所限,书中难免出现不妥及错误之处,恳请读者批评指正。

编 者

1996.12

目 录

第一篇 微积分	(1)
第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函数的概念	(1)
一、集合 区间与邻域	(1)
二、函数的概念	(2)
三、函数的几种特性	(3)
§ 1.2 初等函数	(4)
一、反函数	(4)
二、复合函数	(5)
三、初等函数	(5)
四、双曲函数与反双曲函数	(6)
§ 1.3 极限	(8)
一、数列的极限	(8)
二、函数的极限	(11)
§ 1.4 无穷小量与无穷大量	(14)
一、无穷小量	(14)
二、无穷小量的运算定理	(15)
三、无穷大量	(15)
四、无穷小量的比较	(16)
§ 1.5 函数极限的运算法则	(17)
一、函数和、差、积、商的极限	(17)
二、求极限的一些方法	(19)
§ 1.6 极限存在准则 两个重要极限	(20)
§ 1.7 函数的连续性与间断点	(23)
一、函数的连续性	(23)
二、函数的间断点	(24)
§ 1.8 连续函数的运算与初等函数的连续性	(26)
一、连续函数的运算法则	(26)
二、初等函数的连续性	(26)
§ 1.9 闭区间上连续函数的性质	(27)
第一章 习题	(28)
第二章 导数与微分	(32)
§ 2.1 导数概念	(32)
一、两个具体问题	(32)
二、导数的定义	(33)

三、基本初等函数的导数	(34)
四、进一步讨论	(35)
§ 2.2 函数和、差、积、商的求导法则	(36)
§ 2.3 反函数与复合函数的导数	(38)
一、反函数的导数	(38)
二、复合函数的求导法则	(39)
三、双曲函数与反双曲函数的导数	(40)
四、求导公式小结	(41)
§ 2.4 高阶导数	(41)
§ 2.5 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(43)
一、隐函数的导数	(43)
二、由参数方程所确定的函数的导数	(44)
三、求导举例	(46)
§ 2.6 函数的微分	(47)
一、微分的概念	(47)
二、微分的计算	(49)
§ 2.7 导数与微分的应用	(50)
第二章 习题	(52)
第三章 中值定理与导数的应用	(55)
§ 3.1 微分学中值定理	(55)
一、罗尔(Rolle)定理	(55)
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理	(56)
三、柯西(Cauchy)中值定理	(57)
四、应用举例	(58)
§ 3.2 罗必塔(L'Hospital)法则	(59)
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	(59)
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(60)
三、其它类型的未定式	(61)
§ 3.3 泰勒(Taylor)公式	(62)
§ 3.4 函数的单调性与极值	(64)
一、函数单调性的判定	(64)
二、函数的极值	(66)
三、函数的最大值和最小值	(68)
§ 3.5 曲线的凹凸性与拐点	(69)
§ 3.6 函数作图	(71)
一、渐近线	(72)
二、依据函数特性作图	(73)
§ 3.7 曲率及其应用	(75)

一、弧微分	(75)
二、曲率	(75)
三、曲率的计算	(76)
四、应用举例	(77)
第三章 习题	(78)
第四章 不定积分	(81)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(81)
一、原函数与不定积分的概念	(81)
二、不定积分的性质	(82)
三、基本积分公式	(82)
§ 4.2 换元积分法	(83)
一、第一类换元积分法	(83)
二、第二类换元积分法	(86)
§ 4.3 分部积分法	(89)
§ 4.4 几种特殊函数的积分	(91)
一、有理函数的积分举例	(91)
二、三角函数有理式的积分	(94)
三、简单无理函数的积分	(94)
§ 4.5 积分表的使用	(95)
第四章 习题	(96)
第五章 定积分及其应用	(98)
§ 5.1 定积分的概念与性质	(98)
一、定积分问题举例	(98)
二、定积分的定义	(99)
三、定积分的基本性质	(100)
§ 5.2 微积分基本公式	(102)
一、积分上限的函数	(102)
二、牛顿—莱布尼兹公式	(103)
§ 5.3 定积分的换元积分法	(104)
§ 5.4 定积分的分部积分法	(105)
§ 5.5 定积分的近似计算	(106)
一、梯形法	(107)
二、抛物线法	(107)
§ 5.6 广义积分与伽玛(Gamma)函数	(109)
一、无穷限的广义积分	(109)
二、无界函数的广义积分	(110)
三、伽玛(Gamma)函数	(111)
§ 5.7 平面图形的面积	(112)
一、定积分的元素法	(112)

二、平面图形的面积	(112)
§ 5.8 体积	(115)
一、旋转体的体积	(115)
二、平行截面面积为已知的立体的体积	(116)
§ 5.9 平面曲线的弧长	(117)
一、直角坐标情形	(117)
二、参数方程情形	(118)
三、极坐标情形	(118)
§ 5.10 功 水压力和引力	(119)
一、变力沿直线所作的功	(119)
二、水压力	(120)
三、引力	(120)
第五章 习题	(121)
第六章 空间解析几何与矢量代数	(125)
§ 6.1 矢量	(125)
一、空间直角坐标系	(125)
二、矢量的概念	(126)
三、矢量的线性运算	(127)
四、矢量的乘法运算	(131)
§ 6.2 平面与直线	(135)
一、平面	(135)
二、空间直线	(139)
§ 6.3 一些常见的二次曲面及空间曲线	(144)
一、常见的二次曲面	(145)
二、空间曲线	(151)
第六章 习题	(153)
第七章 多元函数的微分法及其应用	(156)
§ 7.1 多元函数的基本概念	(156)
一、多元函数及其定义域	(156)
二、二元函数的几何表示	(157)
三、二元函数的极限	(158)
四、二元函数的连续性	(159)
§ 7.2 二元函数的偏导数与全微分	(160)
一、偏导数	(160)
二、高阶偏导数	(163)
三、全微分及其应用	(164)
§ 7.3 多元复合函数与隐函数的求导法则	(167)
一、多元复合函数的求导法则	(167)
二、全微分形式不变性	(168)

三、隐函数的求导法则	(169)
§ 7.4 微分法在几何上的应用	(170)
一、空间曲线的切线与法平面	(170)
二、曲面的切平面与法线	(173)
§ 7.5 方向导数与梯度	(175)
一、方向导数	(175)
二、梯度	(177)
§ 7.6 多元函数的极值及其求法	(179)
一、多元函数的极值	(179)
二、条件极值	(182)
第七章 习题	(184)
第八章 重积分	(187)
§ 8.1 二重积分的概念	(187)
一、引例	(187)
二、二重积分的定义	(188)
§ 8.2 二重积分的性质	(189)
§ 8.3 二重积分的计算	(191)
一、利用直角坐标计算二重积分	(191)
二、利用极坐标计算二重积分	(195)
§ 8.4 三重积分的概念	(199)
§ 8.5 三重积分的计算	(200)
一、利用直角坐标计算三重积分	(201)
二、利用柱面坐标计算三重积分	(203)
三、利用球面坐标计算三重积分	(205)
§ 8.6 二重积分的应用	(207)
一、曲面的面积	(207)
二、平面薄片的重心	(209)
三、平面薄片的转动惯量	(210)
四、平面薄片对质点的引力	(211)
第八章 习题	(212)
第九章 曲线积分与曲面积分	(216)
§ 9.1 曲线积分	(216)
一、对弧长的曲线积分	(216)
二、对坐标的曲线积分	(219)
三、两类曲线积分之间的关系	(223)
§ 9.2 格林(Green)公式	(223)
§ 9.3 平面曲线积分与路径无关的条件	(228)
§ 9.4 曲面积分	(231)
一、对面积的曲面积分	(231)

二、对坐标的曲面积分	(233)
三、两类曲面积分之间的关系	(237)
第九章 习题	(239)
第十章 微分方程	(242)
§ 10.1 微分方程的基本概念	(242)
§ 10.2 一阶微分方程	(244)
一、可分离变量的微分方程	(244)
二、一阶线性微分方程	(246)
三、一阶微分方程应用举例	(249)
§ 10.3 可降阶的高阶微分方程	(251)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	(251)
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	(251)
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	(252)
§ 10.4 二阶常系数齐次线性微分方程	(253)
§ 10.5 二阶常系数非齐次线性微分方程	(256)
第十章 习题	(262)
第十一章 无穷级数	(265)
§ 11.1 常数项级数的概念和性质	(265)
一、常数项级数的基本概念	(265)
二、无穷级数的基本性质	(267)
§ 11.2 常数项级数的审敛法	(269)
一、正项级数及其审敛法	(269)
二、交错级数 任意项级数及绝对收敛	(274)
§ 11.3 幂级数	(275)
一、函数项级数的一般概念	(275)
二、幂级数及其收敛性	(276)
三、幂级数的运算	(278)
§ 11.4 函数展开成幂级数	(279)
一、泰勒级数	(279)
二、函数展开成幂级数	(280)
§ 11.5 函数的幂级数展开式的应用	(283)
一、近似计算	(283)
二、欧拉(Euler)公式	(284)
§ 11.6 傅立叶(Fourier)级数	(285)
一、三角级数 三角函数系的正交性	(285)
二、函数展开成傅立叶级数	(286)
§ 11.7 正弦级数和余弦级数	(289)
§ 11.8 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	(291)
§ 11.9 傅立叶级数的复数形式	(293)

第十一章 习题	(295)
第二篇 积分变换	(298)
第十二章 傅立叶变换	(298)
§ 12.1 傅立叶积分	(298)
§ 12.2 傅立叶变换	(299)
一、傅立叶变换的概念	(299)
二、单位脉冲函数及其傅立叶变换	(300)
三、非周期函数的频谱	(302)
§ 12.3 傅立叶变换的性质	(304)
§ 12.4 卷积	(307)
第十二章 习题	(309)
第十三章 拉普拉斯变换	(311)
§ 13.1 拉普拉斯变换的概念	(311)
§ 13.2 拉氏变换的性质	(314)
§ 13.3 拉氏逆变换	(318)
§ 13.4 卷积	(321)
§ 13.5 拉普拉斯变换的应用	(323)
第十三章 习题	(327)
第三篇 线性代数	(329)
第十四章 n 阶行列式	(329)
§ 14.1 n 阶行列式的定义	(329)
§ 14.2 n 阶行列式的性质	(333)
§ 14.3 克莱姆法则	(338)
第十四章 习题	(340)
第十五章 矩阵	(342)
§ 15.1 矩阵的概念	(342)
一、矩阵的定义	(342)
二、几种特殊矩阵	(343)
§ 15.2 矩阵的运算	(344)
一、矩阵的加法	(344)
二、数与矩阵相乘	(344)
三、矩阵与矩阵相乘	(345)
四、矩阵的转置	(347)
五、方阵的行列式	(348)
§ 15.3 矩阵的秩	(349)
§ 15.4 逆矩阵	(350)
§ 15.5 矩阵的初等变换	(354)
一、矩阵的初等变换	(354)
二、利用初等变换求矩阵的秩	(354)

三、初等方阵	(356)
四、利用初等变换求逆矩阵	(357)
第十五章 习题	(358)
第十六章 线性方程组	(361)
§ 16.1 非齐次线性方程组	(361)
§ 16.2 齐次线性方程组	(367)
§ 16.3 线性方程组的数值解法	(371)
一、主元素消去法	(372)
二、迭代法	(375)
第十六章 习题	(378)
第四篇 概率论	(380)
第十七章 随机事件及其概率	(380)
§ 17.1 随机事件 事件的关系及运算	(380)
一、随机试验	(380)
二、随机事件 样本空间	(381)
三、随机事件的关系及运算	(382)
§ 17.2 频率、概率及其性质	(384)
一、频率	(384)
二、概率的统计定义	(385)
三、概率的公理化定义	(386)
§ 17.3 古典概型	(388)
一、古典概型的计算公式	(388)
二、排列与组合	(388)
三、古典概型计算例题	(389)
§ 17.4 条件概率与事件的独立性	(392)
一、条件概率	(392)
二、事件的独立性	(394)
§ 17.5 全概率公式与贝叶斯公式	(397)
一、全概率公式	(397)
二、贝叶斯(Bayes)公式	(398)
第十七章 习题	(399)
第十八章 随机变量及其分布	(402)
§ 18.1 随机变量	(402)
§ 18.2 离散型随机变量的概率分布	(403)
一、概率分布律	(403)
二、常见离散型概率分布举例	(403)
§ 18.3 随机变量的分布函数	(406)
§ 18.4 连续型随机变量的概率密度	(409)
一、连续型随机变量 概率密度	(409)

二、连续型随机变量概率分布举例	(410)
§ 18.5 二维随机变量	(413)
一、二维随机变量及其分布函数	(413)
二、二维离散型随机变量	(414)
三、二维连续型随机变量	(415)
四、边缘分布	(416)
五、随机变量的相互独立性	(418)
§ 18.6 随机变量的函数及其分布	(420)
一、一维随机变量的函数	(420)
二、二维随机变量的函数	(423)
第十八章 习题	(425)
第十九章 数字特征 大数定律与中心极限定理	(429)
§ 19.1 数学期望	(429)
一、数学期望	(429)
二、数学期望的性质	(432)
§ 19.2 方差	(433)
§ 19.3 协方差 相关系数	(436)
§ 19.4 大数定律与中心极限定理	(437)
一、大数定律	(437)
二、中心极限定理	(438)
第十九章 习题	(440)
附录 I 几种常用的曲线	(442)
附录 II 积分表	(445)
附录 III 傅氏变换简表	(452)
附录 IV 拉氏变换简表	(455)
附录 V 正态分布表	(459)
习题参考答案	(461)

第一篇 微积分

第一章 函数与极限

现实世界中的空间形式和数量关系是数学研究的主要对象. 有大量问题需要人们去探讨变量与变量之间的相互依存关系, 并由此产生了函数的概念, 极限方法则是研究变量的一种基本方法, 它奠定了微积分学的基础. 本章将介绍函数的极限与连续性等基本概念.

§ 1.1 函数的概念

一、集合 区间与邻域

集合是数学中一个原始的概念, 在初等数学中我们已有所了解, 本节仅简要介绍和补充区间与邻域的概念.

区间是本书最常用的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$. 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点; 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\},$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点; 数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 与 $\{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开区间或半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

根据实数与数轴上的点一一对应的关系, 这些有限区间在数轴上表示长度为有限的线段. 如闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1.1(a) 与 1.1(b) 所示.

除以上谈到的有限区间外, 还有无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 例如, 满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数, 用区间 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$ 表示; 满足关系式

$x < b$ 的全体实数, 用区间 $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ 表示. 读者可类似地定义区间 $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b]$.

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

有了区间的概念, 我们进一步介绍邻域的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 数集

$$\{x | |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $N(a, \delta)$. 点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

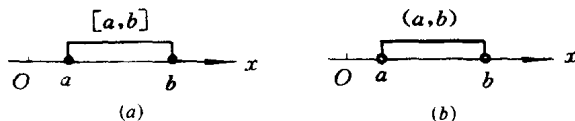


图 1.1

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $-\delta<x-a<\delta$, 即 $a-\delta<x<a+\delta$, 所以

$$N(a, \delta) = \{x | x-\delta < x < a+\delta\}.$$

由此看出, $N(a, \delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$, 该区间以点 a 为中心, 而长度为 2δ (图 1.2).

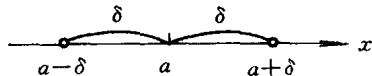


图 1.2

以 a 点为中心的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心的 δ 邻域, 记作 $N(\hat{a}, \delta)$, 即

$$N(\hat{a}, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x-a|$ 就表示了 $x \neq a$.

二、函数的概念

自然界任何事物都处在不断地运动、变化中, 而且每一事物的运动、变化都不是孤立的, 总是同它周围其他事物互相联系并遵循着一定的变化规律. 对于两个变量间的函数关系我们在中学已有所学习, 这里仅作复习和加深巩固 (多于两个变量的情形在第七章介绍).

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 全体函数值的集合

$$W = \{y | y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域. 对于任意 $x \in D$, 对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样, 以 x 为横坐标、 y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 (x, y) , 当 x 取遍 D 上的每一个数值时, 就得到点 (x, y) 的一个集合 C :

$$C = \{(x, y) | y=f(x), x \in D\},$$

称这个点集 C 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

由函数的定义知, 确定一个函数必须知道定义域和对应法则. 于是定义域 D 和对应法则 f 就称为确定函数关系的两个要素. 两个函数相同, 是指函数的定义域和对应法则分别相同.

例 1 设有两个函数 $y=\sin x$, $y=\frac{x \sin x}{x}$. 前者的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 后者的定义域为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$, 因此这两个函数并非相同.

例 2 函数 $f(x)=x+\ln x+1$ 与 $g(t)=t+\ln t+1$ 是相同的. 因为这两个函数除自变量所采用的字母不同, 定义域和对应法则完全相同.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如果不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用算式表达的函数, 函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

在函数的定义中, 对于定义域内每一个 x 值, 对应的函数值只能有唯一的一个, 这种函数称为单值函数; 若允许同一 x 值可以和不止一个 y 值相对应, 则称它为多值函数. 以后没有特别说明的, 函数都是指单值函数.

表示函数的方法有三种: 解析法、列表法、图像法. 三种表示法各有其优缺点, 在解决实际问题时要根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用. 高等数学所讨论的函数, 有时会遇

到在自变量 x 的不同取值范围内用不同的解析式子表示的函数，通常称为分段函数(如例 3、例 4)。

例 3 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1.3 所示。

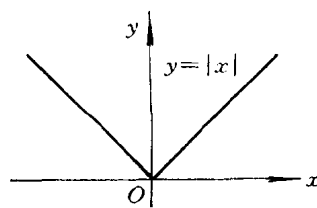


图 1.3

例 4 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1.4 所示。

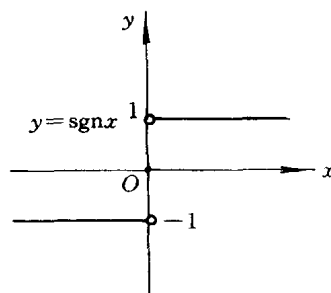


图 1.4

例 5 设 x 为任一实数, 不超过自变量 x 的最大整数函数简称为 x 的最大整数函数, 记作

$$y = [x].$$

如, $[\frac{2}{3}] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [\pi] = 3, [-0.2] = -1, [-2] = -2$. 函

数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \mathbb{Z}$. 它的图形如图 1.5 所示, 这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处, 图形发生跳跃度为 1 的跳跃. 这函数也称为取整函数。

例 6 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{当 } x \leq 0; \\ x, & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

是一个分段函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = (0, +\infty)$ (图 1.6). 需要注意的是: 分段函数在整个定义域上表示一个函数, 而不是几个函数。

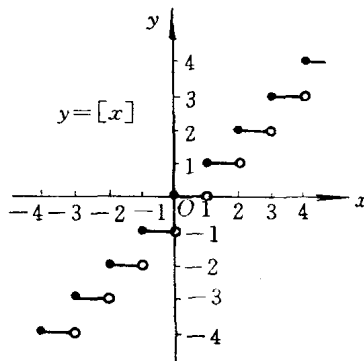


图 1.5

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 如果存在正的常数 M , 对任一 $x \in X$, 函数 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界, 即对任意正数 M (无论多么大), 总存在 $x_0 \in X$, 使 $|f(x_0)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对于 x 取任意实数, $|\sin x| \leq 1$ 都成立. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $|\frac{1}{x}| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立。

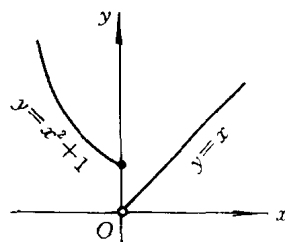


图 1.6

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界,其几何意义是函数 $y=f(x)$ 的图形在该区间内必落在平行于 x 轴的两直线 $y=\pm M$ 之间.

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对于 I 上任意两点 x_1 和 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)}$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调增加的**(或**单调减少的**).单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.

函数的单调性是一个局部的性质.如函数 $f(x)=|x|$,在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的;在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)=|x|$ 不是单调的(图1.3).又如,函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则必有 $-x \in D$).如果对于任一 $x \in D$

$$f(-x)=f(x) \text{ (或 } f(-x)=-f(x) \text{)}$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,函数 $y=\sin x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数,函数 $y=\sin x + \cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D .如果存在一个不为零的常数 l ,使得对于任一 $x \in D$ 有

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**, l 称为 $f(x)$ 的**周期**,通常我们说周期是指周期函数的**最小正周期**.

例如,函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\operatorname{tg} x$ 是以 π 为周期的周期函数.函数 $f(x)=C$ (C 为常数)是周期函数,但无最小正周期.

§ 1.2 初等函数

一、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的.我们不仅要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的状况,有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况.例如,由静止状态自由下落的物体,物体下落的距离 s 是时间 t 的函数

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0, T],$$

知道 t 就可以算出 s .但是如果由物体下落的距离 s 来确定所需的时间,则由原来函数中解出 t 表示为 s 的函数

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}, \quad s \in [0, H].$$

其中 H 是物体在开始下落时与地面的距离,我们称函数 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ 是函数 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的反函数,而