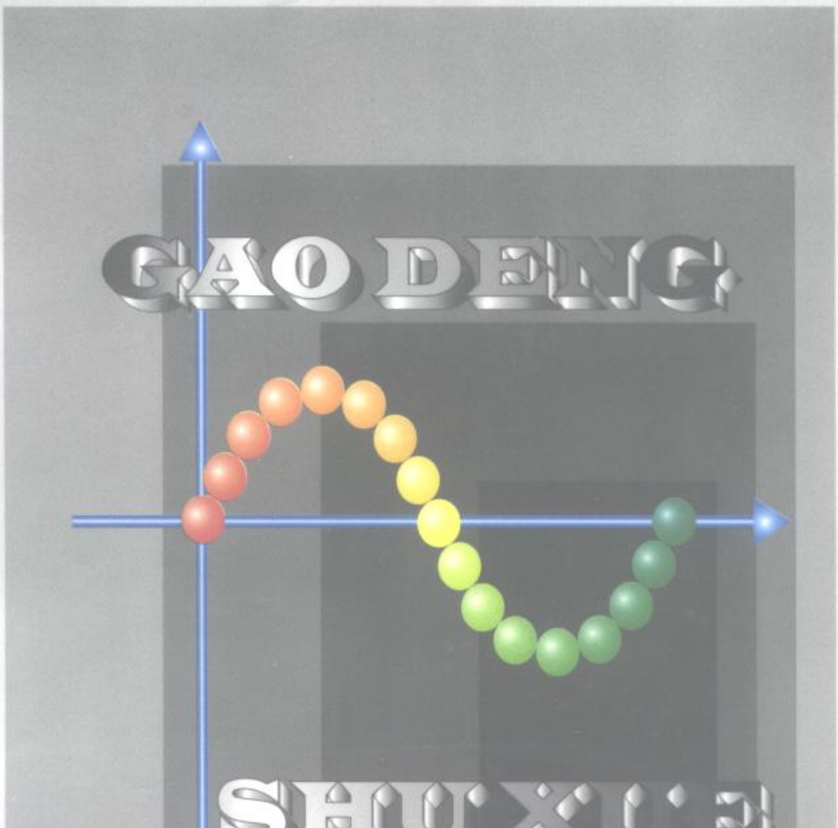
全国高等职业技术师范院校教材

高等数学

陈付贵 宋贵海 主编



天津大学出版社

全国高等职业技术师范院校教材

高 等 数 学

主　编　陈付贵　宋贵海
副主编　程昌年　黄汉禹　石　飚
参　编　（按姓氏笔划为序）
　　　　石　飚　宋贵海　吴　莉　陈付贵
　　　　郭运瑞　黄春生　黄汉禹　程昌年
主　审　李万选

天津大学出版社

内容提要

高等数学是高等院校的一门重要基础课．本书分为四篇19章，内容包括：函数的极限与连续，一元函数微积分及其应用，多元函数微分法，二重积分，三重积分，微分方程，曲线与曲面积分，积分变换，行列式矩阵及线性方程组的解，概率论等．每章后都配有习题，习题答案附书后，以便于教学使用．

本书可作为高等院校工科类专业的教材，也可供工业院校或成人高校、函授教育等有关专业选用，还可作为工矿、企业工程技术人员、科技管理人员的参考书．

全国高等职业技术师范院校教材

高　等　数　学

陈付贵　宋贵海　主编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

邮编：300072

天津大学印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米　1/16　印张：31　字数：774千

1998年7月第1版　1998年7月第1次印刷

印数：1—6000

ISBN 7-5618-1032-6

O·96　定价：35.00元

前　言

为适应高等职业技术师范教育事业的发展，贯彻落实国家教委(1984)8号文件转发的《机制工艺教育专业教学方案》的精神，在国家教委师范教育司的指导下，依据1995年12月常州、石家庄两次会议通过的《全国职技高师机制工艺教育专业统编教材(高等数学)编写大纲》，我们编写了这本教材.

本书与同类教材相比，具有以下三个特点：

(一)本书结构严谨、内容精炼、重点突出.全书共分四篇，包括微积分、积分变换、线性代数、概率论四大部分共19章.在基本概念和方法的阐述上，着重于思路分析，注意培养学生的思维能力和逻辑推理能力以及运用知识分析解决问题的能力.

(二)根据高等职业技术教育教学改革的需要，将机制工艺教育专业所需数学知识与专业融为一体.在内容的取舍上，既照顾教材本身的知识体系又紧密联系专业实践，突出了学用结合、学以致用的原则，摒弃了不必要的繁杂的理论推导过程.

(三)为加深对基本概念的理解，掌握理论方法，提高计算能力，本书每章都配有丰富的例题和习题，难易适中.对于每章习题书末附有答案，供教学时参考.

本书教学时数约为160学时，章节前加了"*"号的系教学大纲要求之外的内容，可根据学科需要，适当选用或参考.

本书可作为高等职业技术师范院校工科类专业的教材，也可作为工矿、企业工程技术人员、科技管理人员的自学参考书.

陈付贵教授为本书责任主编，宋贵海为主编；程昌年、黄汉禹、石飚为副主编.具体章节分工如下：

第一、四、五章由河南职业技术师范学院陈付贵编写；

第二、三章由天津职业技术师范学院程昌年编写；

第六、七章(前三节)由河南职业技术师范学院郭运瑞编写；

第七(后三节)、八章由天津职业技术师范学院黄春生编写；

第九、十章由上海师范大学黄汉禹编写；

第十一、十二、十三章由吉林职业技术师范学院宋贵海编写；

第十四、十五、十六章由湖南师范大学吴莉编写；

第十七、十八、十九章由常州职业技术师范学院石飚编写.

本书前10章由陈付贵统稿，后9章由宋贵海统稿.在广泛征求意见的基础上最后全书由陈付贵负责审理、修改和定稿.本教材在编写过程中，得到了河南职业技术师范学院、天津职业技术师范学院有关同志的通力合作和大力帮助，特别是天津职业技术师范学院教材科胡振武同志做了大量工作，在此谨致深切的谢意.

李万选教授在百忙中担任本书的主审，审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中难免出现不妥及错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

1996.12

目　录

第一篇　微积分

第一章　函数与极限

现实世界中的空间形式和数量关系是数学研究的主要对象.有大量问题需要人们去探讨变量与变量之间的相互依存关系,并由此产生了函数的概念,极限方法则是研究变量的一种基本方法,它奠定了微积分学的基础.本章将介绍函数的极限与连续性等基本概念.

§1.1　函数的概念

一、集合　区间与邻域

集合是数学中一个原始的概念,在初等数学中我们已有所了解,本节仅简要介绍和补充区间与邻域的概念.

区间是本书最常用的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点;数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点;数集 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开区间或半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$.

以上这些区间都称为有限区间.数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**.

根据实数与数轴上的点一一对应的关系,这些有限区间在数轴上表示长度为有限的线段.如闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来,分别如图 1.1(*a*)与 1.1(*b*)所示.

除以上谈到的有限区间外,还有**无限区间**.引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间.例如,满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数,用区间 $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$ 表示;满足关系式 $x<b$ 的全体实数,用区间 $(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$ 表示.读者可类似地定义区间 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b]$.

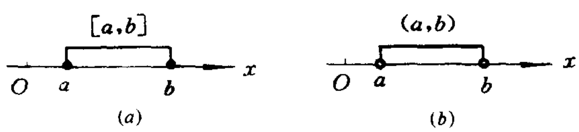


图 1.1

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

有了区间的概念,我们进一步介绍邻域的概念.设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$.数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $N(a,\delta)$.点 a 称为该**邻域的中心**,δ 称为该**邻域的半径**.

因为$|x-a|<\delta$相当于$-\delta<x-a<\delta$，即$a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$N(a,\delta)=\{x|x-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$N(a,\delta)$也就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，该区间以点a为中心，而长度为2δ(图 1.2).

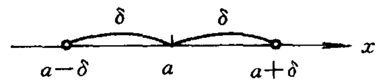


图 1.2

以a点为中心的δ邻域去掉中心a后，称为点a的**去心的δ邻域**，记作$N(\hat{a},\delta)$，即

$$N(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

这里$0<|x-a|$就表示了$x\neq a$.

二、函数的概念

自然界任何事物都处在不断地运动、变化中，而且每一事物的运动、变化都不是孤立的，总是同它周围其他事物互相联系并遵循着一定的变化规律. 对于两个变量间的函数关系我们在中学已有所学习，这里仅作复习和加深巩固(多于两个变量的情形在第七章介绍).

定义 设x和y是两个变量，D是一个给定的数集. 如果对于每个数$x\in D$，变量y按照一定法则总有确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$. 数集D叫做这个函数的**定义域**，x叫做**自变量**，y叫做**因变量**.

当x取数值$x_0\in D$时，与x_0对应的y的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的**函数值**，记作$f(x_0)$. 全体函数值的集合

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**. 对于任意$x\in D$，对应的函数值为$y=f(x)$. 这样，以x为横坐标、y为纵坐标就在xOy平面上确定一点(x,y)，当x取遍D上的每一个数值时，就得到点(x,y)的一个集合C：

$$C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\},$$

称这个点集C为函数$y=f(x)$的图形.

由函数的定义知，确定一个函数必须知道定义域和对应法则. 于是定义域D和对应法则f就称为确定函数关系的两个要素. 两个函数相同，是指函数的定义域和对应法则分别相同.

例 1 设有两个函数$y=\sin x$，$y=\dfrac{x\sin x}{x}$. 前者的定义域为$(-\infty,+\infty)$；后者的定义域为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$，因此这两个函数并非相同.

例 2 函数$f(x)=x+\ln x+1$与$g(t)=t+\ln t+1$是相同的. 因为这两个函数除自变量所采用的字母不同，定义域和对应法则完全相同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

在函数的定义中，对于定义域内每一个x值，对应的函数值只能有唯一的一个，这种函数称为**单值函数**；若允许同一x值可以和不止一个y值相对应，则称它为**多值函数**. 以后没有特别说明的，函数都是指单值函数.

表示函数的方法有三种：**解析法**、**列表法**、**图像法**. 三种表示法各有其优缺点，在解决实际问题时要根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用. 高等数学所讨论的函数，有时会遇

到在自变量 x 的不同取值范围内用不同的解析式子表示的函数，通常称为**分段函数**(如例 3、例 4).

例 3 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.3 所示.

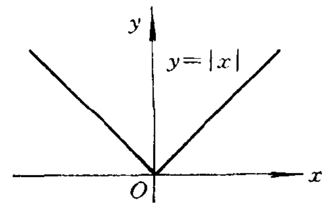


图 1.3

例 4 **符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, & \text{当 } x<0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \\ 1, & \text{当 } x>0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.4 所示.

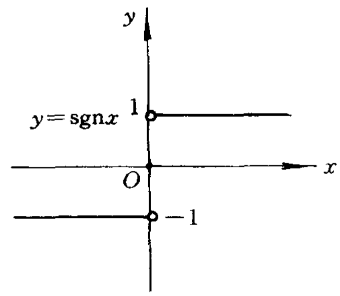


图 1.4

例 5 设 x 为任一实数，不超过自变量 x 的最大整数函数简称为 x **的最大整数函数**，记作

$$y=[x].$$

如，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-0.2]=-1$，$[-2]=-2$. 函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=Z$. 它的图形如图 1.5所示，这图形称为**阶梯曲线**. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃度为 1 的跳跃. 这函数也称为**取整函数**.

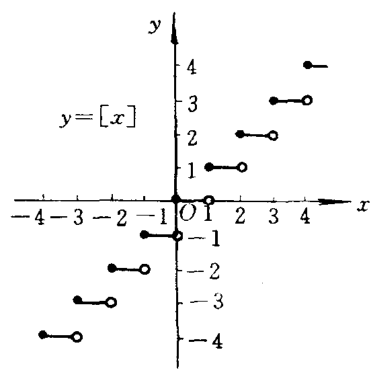


图 1.5

例 6 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{当 } x\leqslant 0; \\ x, & \text{当 } x>0 \end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(0,+\infty)$(图 1.6). 需要注意的是：分段函数在整个定义域上表示一个函数，而不是几个函数.

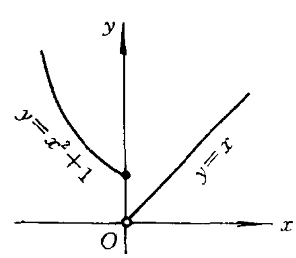


图 1.6

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在正的常数 M，对任一 $x\in X$，函数 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ **在** X **上有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，即对任意正数 M(无论多么大)，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$，那么**函数** $f(x)$ **在** X **上无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于 x 取任意实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界，其几何意义是函数 $y=f(x)$ 的图形在该区间内必落在平行于 x 轴的两直线 $y=\pm M$ 之间.

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上内有定义，对于 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\text{（或 }f(x_1)>f(x_2)\text{）}$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调增加的**（或**单调减少**的）. 单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.

函数的单调性是一个局部的性质. 如函数 $f(x)=|x|$，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=|x|$ 不是单调的（图1.3）. 又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$

$$f(-x)=f(x)\text{（或 }f(-x)=-f(x)\text{）}$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**（或**奇函数**）.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数，函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的常数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常我们说周期是指周期函数的**最小正周期**.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\mathrm{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数. 函数 $f(x)=C$（C 为常数）是周期函数，但无最小正周期.

§1.2 初等函数

一、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的. 我们不仅要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的状况，有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况. 例如，由静止状态自由下落的物体，物体下落的距离 s 是时间 t 的函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\qquad t\in[0,T],$$

知道 t 就可以算出 s. 但是如果要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间，则由原来函数中解出 t 表示为 s 的函数

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\qquad s\in[0,H].$$

其中 H 是物体在开始下落时与地面的距离，我们称函数 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 是函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数，而