高等学校教学用书

連續媒质电动力学

LIANXU MEIZHI DIANDONG LIXUE

上册

Л. Д. 朗道
E. M. 栗弗席茲 著
周奇 譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

連續媒质电动力学

LIANXU MEIZHI DIANDONG LIXUE

上　册

Л. Д. 朗　道
E. M. 栗弗席茲　著
周　奇　譯

人民教育出版社

本书是根据苏联国家物理数学书籍出版社（Физматгиз）出版的朗道（Л. Д. Ландау）和栗弗席兹（E. M. Лифшиц）所著的“連續媒质电动力学”（Электродинамика сплошных сред）一书 1959 年版譯出的。本书系統地和比較詳細地讲述了連續媒质內的电动力学，可作为綜合性大学物理系学生和研究生的参考书。

本书共有十五章，分两册出版，上册包括前七章。

連續媒质电动力学

（上　册）

Л. Д. 朗道　E. M. 栗弗席兹著

周　奇　譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1094　开本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印张 9 $^{5}/_{16}$

字数 240,000　印数 3,501—4,500　定价（6）¥0.90

1963 年 7 月第 1 版　1963 年 1[illegible]月北京第 2 次印刷

序　言

本卷“理論物理学”闡述物质媒质內的电磁場理論和物质的宏观电学性质和磁学性质理論。从目录上可以看出，这些理論所包含的問題是十分广泛的。

在編著本书的过程中，我們曾經遇到一些頗大的困难，这是由于要从現有的大量材料中进行某些选擇，也是由于普通对本书所包括的許多問題的闡述缺乏必要的物理意义的明确性，甚至还往往包含有錯誤之处。我們也清楚地了解到，我們的論述也仍然还有許多缺点，希望将来再版时改正。

承 B. Д. 金兹堡教授审閱了本书的手稿，并提出了許多宝貴意見，我們謹致以謝意，我們也很感謝 И. E. 迪日亚洛辛斯基和 Л. П. 皮塔耶夫斯基，他們在校对方面給了作者很多帮助！

Л. Д. 朗　道

E. M. 栗弗席兹

1956 年 10 月于莫斯科

主要符号

电場强度 $\mathbf{E}$

电感应强度 $\mathbf{D}$

磁場强度 $\mathbf{H}$

磁感应强度 $\mathbf{B}$

外电場强度 $\mathfrak{E}$，絕对值 $\mathfrak{E}$

外磁場强度 $\mathfrak{H}$，絕对值 $\mathfrak{H}$

电介质极化强度 $\mathbf{P}$

磁化强度 $\mathbf{M}$

物体的总电矩 $\mathscr{P}$

物体的总磁矩 $\mathscr{M}$

介电常数 ε

磁导率 μ

电流密度 $\mathbf{j}$

电导率 σ

絕对溫度（能量单位表示）T

热力学量	单位体积的	整个物体的
熵	S	$\mathscr{S}$
內能	U	$\mathscr{U}$
自由能	F	$\mathscr{F}$
热力学势	ϕ	$\mathscr{P}$
化学势	ζ	

普朗克常数（用 2π 除） h

复数周期时間因子均取为 $e^{-i\omega t}$

累加規則均用于矢量和張量表达式內出現两次的三維指标（拉丁字母）和二維指标（希腊字母）。

目　录

第一章 导体的静电学

§1 导体的静电場

宏观电动力学的对象是研究被物质所充滿的空間內的电磁場。和任何宏观理論一样，在电动力学中所处理的物理量是按照“物理无限小”体积元所求得的平均値，对于这些物理量因物质的分子結构而引起的微观变化，則不感兴趣。例如，不采用电場强度的实际“微观”值 e，我們将研究它的平均値，这平均値表示为

$$\bar{\mathbf{e}}=\mathbf{E} \tag{1.1}$$

对眞空內的电磁場方程求平均值，就得到連續媒质电动力学的基本方程。这种从微观方程变换到宏观方程的方法，是由 Г. A. 洛倫兹首先提出的。

宏观电动力学方程的形状和所包含的物理量的意义，主要决定于媒质的物理性质以及場随时間变化的特性。因此，分别就每一类物理对象进行推导和研究这些方程，是很合理的。

大家知道，所有的物体按照它們的电学性质，可分成两大类——导体和电介质，前者和后者的区别是：一切电場在导体內引起电荷运动，即产生电流①。

我們从研究带电导体所产生的恒定电場开始(导体的靜电学)，首先从导体的基本性质可知，在靜电学的情况下，导体內的电場强度必須等于零。实际上，不为零的电場强度 E 将引起电流的产生；而且电流在导体內流动要引起能量的損耗，因而就不能自己(沒有

① 但是必須説明，这里假定了导体是均匀的(指成分、温度等)。如后文将讲到的，在不均匀的导体內可能存在电場，但不会引起电荷的运动。

外加电源)維持在稳定状态。

由此可知,导体上的全部电荷应該分布于导体表面,因为导体內部如果存在电荷,必然在导体內产生电場[①];电荷沿导体表面的分布可以这样实現,使这些电荷在导体內部产生的电場互相抵銷。

因此,导体的静电学問題,就归結为确定导体以外的眞空內的电場和电荷沿导体表面的分布。

在不十分靠近导体表面的各点处,眞空內的平均电場 $\mathbf{E}$,事实上和实在的电場 $\mathbf{e}$ 相等。离导体很近的地方必須发生了不規則的分子場的影响,这两个量才有差別。但是,后一情况并不会影响平均場方程的形状。眞空內的精确的麦克斯韦微观方程是

$$\operatorname{div} \mathbf{e}=0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}=-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \tag{1.3}$$

(式中 $\mathbf{h}$ 是微观磁場强度)。因为假定平均磁場不存在,因而导数 $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$ 經过平均后变成零;于是我們得到,眞空內的恒定电場滿足普通方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}=0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}=0, \tag{1.4}$$

这也就是势为 φ 的势場,势和电場强度的关系为

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad} \varphi, \tag{1.5}$$

并且滿足拉普拉斯方程:

$$\Delta \varphi=0. \tag{1.6}$$

电場 $\mathbf{E}$ 在导体表面上的边界条件,可从方程 $\operatorname{rot} \mathbf{E}=0$ 得出,这个方程[和起始方程(1.3)一样]在导体外和导体內都同样正确。我們选擇导体表面某一点的法綫方向为 z 軸。于是在导体表面的紧邻近,电場分量 E_z 达到很大的数值(由于在很小距离上存在一

① 从下面引入的方程(1.8),可明显地看出这一点。

有限的电势差)。这种很大的場是导体表面的一种性质，并且决定于导体表面的物理特性，但和我們所研究的静电学問題沒有关系，因为当距离达到原子距离时，它已迅速降落。但是重要的是，导体表面如果是均匀的，那末沿导体表面的导数$\frac{\partial E_z}{\partial x}$，$\frac{\partial E_z}{\partial y}$仍保持有限值，尽管$E_z$本身会变成无穷大。因此，由

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0$$

可知，$\frac{\partial E_y}{\partial z}$是有限的。这表明，在导体表面上，$E_y$是連續的(因为$E_y$的突变表明导数$\frac{\partial E_y}{\partial z}$变为无穷大)。同样$E_x$也是如此，但是因为在导体内总是$\mathbf{E}=0$，所以我們得到結論：在导体表面上，外电場的切向分量必須变为零：

$$\mathbf{E}_t=0. \tag{1.7}$$

由此可見，在导体表面的每一点处，靜电場应垂直于导体表面。因为$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$，因而这表明在任何导体的全部表面上，电場势应为常数。换句話說，均匀导体的表面是靜电場的等势面。

垂直于导体表面的电場分量和分布于导体表面的电荷密度之間，存在一个非常簡单的关系，这关系可从普遍的电动力学方程$\mathrm{div}\,\mathbf{e}=4\pi\rho$得出，这方程經平均后給出

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\bar{\rho}, \tag{1.8}$$

式中$\bar{\rho}$是平均电荷密度。大家知道，这方程写成积分形式表明，通过閉合面的电通量等于这閉合面所包圍的体积內的总电荷(乘上4π)。把这定理应用到无限靠近的两个单位面积所包圍的体积元上(两单位面积的两側和导体面接触)，并考虑到在內面的面积上$\mathbf{E}=0$，于是得到$E_n=4\pi\sigma$，式中σ是电荷的面密度，也就是导体表面单位面积上的电荷。因此，导体表面的电荷分布，由下式給出

$$4\pi\sigma=E_n=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\tag{1.9}$$

（場势导数取在导体表面的外法綫方向）。导体上的总电荷为

$$e=-\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}df,\tag{1.10}$$

式中的积分对导体的全部表面进行。

任何静电場内的电势分布，具有下面一种奇异性质：势函数 $\varphi(x、y、z)$ 只在电場区域的边界上有极大值或极小值。这个定理也可表述成这样的說法：带到电場内的試驗电荷 e 不可能保持稳定平衡，因为在电場内，沒有任何一点处的势能 $e\varphi$ 是极小值。

这个定理的证明是非常簡单的。例如，我們假設在某一点 A 处（不在場的边界上）电势有极大值。于是我們可以用一个很小的封閉面把 A 点包圍起来，在封閉面上各处的法向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0$。因而遍这个面的积分 $\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}df<0$。但是由于拉普拉斯方程：

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}df=\int\Delta\varphi dV=0,$$

这是和假設相矛盾的。

§2. 导体的静电場能量

現在我們来計算带电导体的静电場的总能量 $\mathscr{U}$①：

$$\mathscr{U}=\frac{1}{8\pi}\int E^2dV,\tag{2.1}$$

式中的积分对导体外的全部空間进行。我們把这积分变换如下：

① 平方 E^2 并不和导体表面附近以及导体內（此处 $E=0$，当然 $\bar{e}^2\neq0$）的实在場的均方值 $\bar{e}^2$ 相等。在計算积分（2.1）时，我們略去了不感兴趣的导体的內能和电荷与导体表面的亲和能。

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\cdot dV=-\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}(\varphi\mathbf{E})\,dV+$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\,dV.$$

由于(1.4)式，第二个积分变为零，而第一个积分可以变换成遍包圍場的导体表面和遍无限远表面的积分。但是，后一积分由于場在无穷远处衰减得相当快，因而变成零。用下角标 a 表示导体，并用 φ_a 表示每个导体上的恒定电势值，于是得到①

$$\mathscr{U}=\frac{1}{8\pi}\sum_a\oint\varphi E_n df=\frac{1}{8\pi}\sum_a\varphi_a\oint E_n df.$$

末了，根据(1.10)式引入导体的总电荷 e_a，于是最后得到下列表达式:

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a, \tag{2.2}$$

这个式子和点电荷系統的能量表达式相类似。

导体的电荷和电势不可能同时用任意方式給定；在它們之間存在一定的关系。由于眞空內的場方程是綫性和齐次的，因而这种关系也必須是綫性的，即可用下列的关系式表示:

$$e_a=\sum_b C_{ab}\varphi_b, \tag{2.3}$$

式中的量 C_{aa}、C_{ab} 是长度的量綱，并且取决于导体的形状和它們的相互位置。量 C_{aa} 称为电容系数，而量 $C_{ab}(a\neq b)$ 称为静电感应系数。特别是，如果只有一个导体，則 $e=C\varphi$，其中 C 是电容；电容的数量級和导体的綫度相同。用电荷表示电势的逆式是

① 在这里和下面，变换体积分为面积分时，必須注意，E_n 是导体外法綫方向上的电場分量，这个方向和进行体积分的区域(即导体外的空間)的外法綫方向相反。因此，在变换时积分的正負号改变。

$$\varphi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b, \tag{2.4}$$

式中系数 C^{-1}_{ab} 所組成的矩陣是系数 C_{ab} 所組成的矩陣的逆矩陣。

現在来計算导体系統当其电荷或电势发生无穷小变化时的能量变化。将初始方程(2.1)变分，我們得到

$$\delta\mathscr{U} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\delta\mathbf{E}dV,$$

这个表达式可以用两种等效的方法进一步变换。代入 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$，并注意到变分后的場，和初始場一样，滿足方程(1.4)(因而 $\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=0$)，于是我們有

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}dV = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\delta\mathbf{E})dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_a \varphi_a \oint \delta E_n df,$$

或者最后写成

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a \varphi_a \delta e_a, \tag{2.5}$$

也就是我們得到用电荷变化所表示的能量变化。但是，显而易見，这結果也就是将无穷小电荷 δe_a 从无穷远处(其电場势等于零)带到給定导体上所必須作的功。

另一方面，可以写出

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\delta\varphi\cdot dV = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\delta\varphi)dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_a \delta\varphi_a \oint E_n df,$$

或者写成

$$\delta\mathscr{U} = \sum e_a \delta\varphi_a, \tag{2.6}$$

也就是能量变化可用导体的电势变化来表示。

公式(2.5)和(2.6)指明，将能量$\mathscr{U}$对电荷求微分，我們就得到导体的电势，而$\mathscr{U}$对电势的导数給出电荷值：

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial e_a}=\varphi_a,\quad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \varphi_a}=e_a, \tag{2.7}$$

另一方面，电势和电荷互相为綫性函数。利用(2.3)式，我們有

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b}=\frac{\partial e_b}{\partial \varphi_a}=C_{ba},$$

改变微分的次序，我們得到C_{ab}。由此可見，

$$C_{ab}=C_{ba} \tag{2.8}$$

(同样$C^{-1}_{ab}=C^{-1}_{ba}$)。于是能量$\mathscr{U}$可以表示成电势或电荷的二次式：

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\sum_{a,\,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b=\frac{1}{2}\sum_{a,\,b} C^{-1}_{ab}e_a e_b. \tag{2.9}$$

这个二次式和初始式子(2.1)一样，必須取有限的正值。从这条件可导出系数C_{ab}所滿足的不等式。特别是，全部电容系数都是正的：

$$C_{aa}>0. \tag{2.10}$$

(以及$C^{-1}_{aa}>0$)①

相反地，全部静电感应系数都是負的：

$$C_{ab}<0,\quad (a\neq b). \tag{2.11}$$

从下面的簡单討論，可以明显地看出这种情况。假設全部导体，除其中第a个导体外，一律接地，也就是説，它們的电势都等于零。于是由第a个带电导体在某一导体b上所感生的电荷等于$e_b=C_{ba}\varphi_a$。十分显然，感生电荷的正負号和感应电势的正負号相反，因而$C_{ab}<0$。根据静电場的电势在导体外不可能达到极大值和极小值，可以更严格地证明这一点。例如，假設唯一未接地的导

① 我們也可证明，在(2.3)式为正值的条件下，还出現不等式：$C_{aa}C_{bb}>C^2_{ab}$。

体的电势为 $\varphi_a>0$。于是在全部空間内，电势也将是正的，只在接地导体上，电势才达到最小值（零值）。由此得出，在接地导体的表面，电势的法向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是正的，而按照(1.10)式，它們的电荷是负的。

根据相似的考虑，可以证明 $C_{ab}^{-1}>0$。

导体的静电場能量具有某种极值的性质，誠然，这性质与其說是物理的特征，无宁說是一种形式的特征。为了导出这种性质，我們假設导体上的电荷分布发生了一无穷小的变化（但每个导体的总电荷不变），因而电荷也有可能落入导体的內部；这时我們撇开不談这种电荷分布实际上不可能是稳定的。現在我們来研究相应的积分的变化：

$$\mathscr{U}=\frac{1}{8\pi}\int E^2dV,$$

这个积分現在必須扩展到全部空間，包括导体本身的体积在內（因为电荷移动以后，电場 $\mathbf{E}$ 一般說来在导体內部也不为零）。我們写出

$$\delta\mathscr{U}=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}dV=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\cdot\delta\mathbf{E})\,dV+\frac{1}{4\pi}\int\varphi\operatorname{div}\delta\mathbf{E}dV.$$

第一个积分变换成对无穷远表面的积分以后变成零。在第二个积分內，由于(1.8)式，我們得到 $\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=4\pi\delta\bar{\rho}$，因此，

$$\delta\mathscr{U}=\int\varphi\delta\bar{\rho}dV.$$

但是如果 φ 相应于实在的静电場，这个积分变成零，因为在这种情况下，在每个导体內部，$\varphi=$常数，而积分 $\int\delta\bar{\rho}dV$ 对导体的全部体积进行积分后等于零，因为导体的总电荷保持不变。

由此可見，眞实的静电場能量，和电荷沿导体体积作其他任何分布时所产生的电場能量比較，为极小值①(湯姆逊定理)。

具体地說，从这定理可以得出这样的結果：将不带电的导体带到給定电荷(带电导体)的电場內，則使电場的总能量减小。为了证明这一点，我們只要比較一下未带电导体引入后所建立的眞实电場的能量和相应于被引入的导体上不存在感生电荷时的虛电場能量，就足够了。第一种能量因为是可能的极小值，所以小于第二种能量，而后者則和原来电場的能量相等(因为不存在感生电荷，电場"透入"导体內部而无任何变化)。这一結果也能够表述成另一种形式：离电荷系統很远的不带电导体，会受到电荷系統的吸引。

最后可以证明，带到静电場內的导体(带电的或不带电的)，只在电力的作用下，一般不可能保持稳定平衡。这个論断推广了前一节末尾所证明的点电荷的相似定理；由結合应用点电荷定理和湯姆逊定理，就可以得出这种論断；我們在这里不准备作相应的討論。

用公式(2.9)来計算各个导体彼此分开有限距离的导体系統的能量是非常方便的。但是要計算均匀外电場 $\mathfrak{E}$(可以想像为由无穷远处的电荷所产生的)內未带电导体的能量，則需要作特別的研究。根据(2.2)式，这能量等于 $\mathscr{U}=\frac{1}{2}e\varphi$，其中 e 是产生电場的远处电荷，而 φ 是所研究的导体在电荷 e 所在的点处所产生的电势(从 $\mathscr{U}$ 內消去了电荷 e 在其本征場內的能量，因为它与我們要計算的导体能量无关)。导体的电荷虽然等于零，但在外电場的作用下，导体得到电偶极矩，我們用 $\mathscr{P}$ 表示它。大家知道，电偶极子在

① 我們在此处不准备給出簡单的討論，以說明我們所指的是极小值，而一般不是指极值。

很大距离 $\mathbf{r}$ 处的場势是 $\varphi=\frac{\mathscr{P}\mathbf{r}}{r^3}$。因此

$$\mathscr{U}=\frac{e\mathscr{P}\mathbf{r}}{2r^3},$$

但是$\frac{e\mathbf{r}}{r^3}$是电荷 e 所产生的电場强度 $\mathfrak{E}$。所以

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{2}\mathscr{P}\mathfrak{E}. \tag{2.12}$$

因为全部場方程都是綫性的，因而十分显然，偶极矩$\mathscr{P}$的分量是电場强度 $\mathfrak{E}$ 的分量的綫性函数。$\mathscr{P}$ 和 $\mathfrak{E}$ 間的比例系数的量綱是长度的立方，因而和导体的体积成正比:

$$\mathscr{P}_i=V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{2.13}$$

式中系数 α_{ik} 只与导体的形状有关。全部的 $V\alpha_{ik}$ 量組成一个張量，称为导体的极化率張量。这張量是对称的: $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$(这一論断的证明見 §11)。相应地，能量(2.12)可以写成下列形式:

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{2.14}$$

例 题

1. 試用系数 C_{ab} 表示由两个导体（所带的电荷为 $\pm e$）所組成的系統的互电容 C。

解. 两个导体的互电容定义为下列关系式中的系数:

$$e=C(\varphi_2-\varphi_1),$$

于是导体系統的能量用 C 表示为$\mathscr{U}=\frac{e^2}{2C}$。和(2.9)式比較，我們得到

$$\frac{1}{C}=C_{11}^{-1}-2C_{12}^{-1}+C_{22}^{-1}=\frac{C_{11}+2C_{12}+C_{22}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}.$$

2. 設点电荷 e 位于接地导体系統附近的 O 点处，并在这些导体上感生出电荷 e_a。如果电荷 e 不存在，而其中一个导体(第 a 个)的电势为 φ_a'(其余导体仍接地)，則在 O 点处的場势为 φ_0'。試用 φ_a' 和 φ_0' 表示电荷 e_a。