

高等学校教学用书



理論流体力学

第一卷 第一分冊

Н. Е. 柯欽 Н. А. 基別里 Н. В. 羅斯著
曹俊 余常昭 陈耀松 蔡樹棠譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术与理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的柯欽(Н. Е. Кочин)、基別里(И. А. Кибель)、羅斯(Н. В. Розе)合著“理論流体力学”(Теоретическая гидромеханика)修正第四版譯出。原書經苏联高等教育部审定为綜合性大学教科書。

原書共二卷，譯本每卷分兩册出版，此册为第一卷第一分册，包括基本方程式，理想流体动力学等各部份。

本書内容包含很广，可以作为航空、气象、水利等方面的高年級学生、教师及这些方面的科学工作人員的参考書。

本書由曹俊、余常昭、陈蠟松、蔡樹棠四位同志合譯而成。譯者老师周培源教授曾校閱过本書部份譯稿。

理論流体力学

第一卷 第一分册

Н. Е. 柯欽等著

曹俊等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号)

京華印書局印刷 新華書店总經售

書号13010·86 開本850×1168¹/₃₂ 印張7¹⁰/₃₂ 字數204,000

一九五六年七月北京第一版

一九五七年二月北京第二次印刷

印數7,001—9,000 定價(8)¥0.90

第一分册目錄

第四版序言

第一章 流体媒質运动学	1
A. 流体質点的变形	1
§ 1. 科摩-海姆霍茲公式	1
§ 2. 純变形	4
§ 3. 变形椭圓体	5
§ 4. 体積擴張量	7
§ 5. 習題	8
B. 連續方程式	8
§ 6. 拉格蘭基变数	8
§ 7. 欧拉变数	10
§ 8. 从拉格蘭基变数轉換到欧拉变数以及相反的轉換	11
§ 9. 速度場	12
§ 10. 拉格蘭基变数的連續方程式	15
§ 11. 欧拉变数的連續方程式	17
§ 12. 求得連續方程的結果的其他方法	18
§ 13. 柱面坐标, 球面坐标及曲綫坐标的連續方程式	19
§ 14. 習題	22
B. 無旋运动与旋渦运动的运动学的特性	24
§ 15. 引言	24
§ 16. 速度势	24
§ 17. 單連通空間中的無旋运动的特性	26
§ 18. 多連通空間中的無旋运动	30
§ 19. 渦量場和它的性質	31
§ 20. 習題	33
第二章 理想流体的流体动力学基本方程式	37
§ 1. 質量力与表面力	37
§ 2. 普遍的运动方程式	38
§ 3. 理想流体中的流体动压力	39

§ 4. 理想流体的普遍运动方程式	40
§ 5. 欧拉型的运动方程式	41
§ 6. 运动方程式的矢量形式	47
§ 7. 藍伯型的运动方程式	47
§ 8. 拉格蘭基型的运动方程式	50
§ 9. 流体动力学問題概述	51
§ 10. 不可壓縮流体的情形	51
§ 11. 可壓縮流体的情形 • 正压性和斜压性 • 流入能量方程式	52
§ 12. 起始条件与边界条件	56
§ 13. 动量定律与动量矩定律的应用	58
§ 14. 能量方程式	64
§ 15. 習題	67
第三章 流体靜力学	75
A. 流体靜压力	75
§ 1. 平衡方程式	75
§ 2. 力的条件	76
§ 3. 大气压公式	77
§ 4. 分界面上的条件	79
§ 5. 确定固体表面上压力的一般公式	80
§ 6. 不可壓縮的重力流体的压力	81
§ 7. 平面壁上的压力	82
§ 8. 阿基米德定律	84
§ 9. 曲面壁上的压力	85
§ 10. 習題	86
B. 浮体的平衡	88
§ 11. 浮体平衡的条件	88
§ 12. 截面的曲面	89
§ 13. 浮心曲面	90
§ 14. 浮心曲面的主法截綫的曲率半徑	91
§ 15. 平衡的穩定	91
§ 16. 習題	96
第四章 理想流体的簡單运动	102
A. 伯努利積分与科摩積分	102
§ 1. 定常运动	102

§ 2. 無旋运动	105
§ 3. 定常的無旋运动	109
§ 4. 对速度的限制	109
§ 5. 托里拆利公式	110
§ 6. 气体出流	111
§ 7. 瞬时力的作用	111
§ 8. 無旋运动的动能	111
§ 9. 湯姆生定理	115
§ 10. 習題	117
B. 平面無旋运动	121
§ 11. 引言	121
§ 12. 流函数	122
§ 13. 流函数与速度势的关系	123
§ 14. 复速度与复势	125
§ 15. 平面的流体动力学問題与复变数函数論的关系	126
§ 16. 复势的例子	126
§ 17. 源点与匯点	128
§ 18. 偶極子	130
§ 19. 旋渦点	131
§ 20. 旋源	133
§ 21. 复速度的殘数, 环量及速度通量	133
§ 22. 習題	135
第五章 理想流体的旋渦运动	137
A. 旋渦理論的基本方程式及关于渦量守恒的海姆霍茲定理	137
§ 1. 引言	137
§ 2. 湯姆生定理	141
§ 3. 拉格蘭基定理	145
§ 4. 海姆霍茲定理	145
§ 5. 矢量綫的守恒性	147
§ 6. 費列德曼方程式·海姆霍茲方程式	153
§ 7. 海姆霍茲定理	155
§ 8. 旋渦的形成. 維·伯耶尔克涅斯定理	156
§ 9. 形成旋渦的实例	159
§ 10. 習題	165

B. 由已知的渦量場及速度散量場確定速度場	167
§ 11. 由無限空間的渦量和速度散量計算速度矢量	167
§ 12. 一條渦綫的情形	179
§ 13. 直渦綫	184
§ 14. 二條直渦綫, 旋渦系的運動	186
§ 15. 圓形渦綫	190
§ 16. 旋渦層	195
§ 17. 習題	198
B. 卡門渦列	200
§ 18. 引言	200
§ 19. 單一渦列	201
§ 20. 二條渦列	203
§ 21. 卡門渦列的穩定性	205
§ 22. 流体中物体运动形成旋渦的卡門圖式	223
§ 23. 按照卡門方法計算迎面阻力	228
§ 24. 習題	235

第二分册目录

第六章 理想流体中物体运动的平面問題	237
§ 1. 引言	237
§ 2. 边界条件·狄里赫利与涅曼問題	238
§ 3. 圆柱运动	244
§ 4. 运动的圆柱所引起的不定常运动	252
§ 5. 在定常流动时流体动力的反作用力的一般表示式·布拉休斯-蔡普雷金公式	253
§ 6. 定常流动时流体动力的反作用力的有效計算·庫达-茹可夫斯基公式	255
§ 7. 保角表示方法的应用	258
§ 8. 对周綫的反作用力	263
§ 9. 稳定性拋物綫	267
§ 10. 橢圓柱的繞流	269
§ 11. 平板的繞流	275
§ 12. 断面为某些形狀的柱体繞流	277
§ 13. 茹可夫斯基断面的繞流	283
§ 14. 薄翼	293
§ 15. 平面周綫的非定常运动	307
§ 16. 具有断裂流束的繞流·克希荷夫方法	320
§ 17. 茹可夫斯基-密切尔方法·孔口出流·流束在平板上的冲击·滑翔板	328
§ 18. 列維—謝維达方法	342
§ 19. 具有断裂流束的繞流时和具有环量繞流时的压力	363
§ 20. 具有一对自由稳定旋渦的繞流	365
第七章 理想流体中物体运动的空間問題	363
§ 1. 無旋运动·球的运动	363
§ 2. 橢圓体的繞流	366
§ 3. 軸对称流动的流函数	372
§ 4. 源点和匯点方法	376
§ 5. 軸对称物体的橫向繞流	380
§ 6. 固体在無限流体中的运动	382
§ 7. 物体运动时流体动力的反作用力的計算	387
§ 8. 例子	396
§ 9. 物体以慣性运动	405
第八章 理想液体中的波动	411
A. 波动理論的基本方程式	411
§ 1. 各种波型	411

§ 2. 基本方程式	412
§ 3. 初始条件	416
B. 平面波	419
§ 4. 引言	419
§ 5. 驻波	419
§ 6. 进行波	425
§ 7. 化进行波为定常运动	429
§ 8. 群速度	431
§ 9. 平面問題的一般情形	435
§ 10. 波的輪廓	442
§ 11. 在有限深度液体中的波	448
§ 12. 在两种液体的分界面上的波	453
§ 13. 毛細波	457
§ 14. 有限振幅波	461
§ 15. 盖尔斯特涅尔摆綫波	461
§ 16. 摆綫波的性质	464
§ 17. 波的能量	470
§ 18. 能量的轉移	474
§ 19. 波阻 • 自由面以下的物体运动	475
§ 20. 習題	494
B. 三維波	495
§ 21. 一般公式	495
§ 22. 船波	506
§ 23. 重的液体在容器中的留駐振动	511
§ 24. 在矩形容器中的液体振动	514
§ 25. 在圆柱中的液体振动	517
§ 26. 習題	519
Г. 長波	520
§ 27. 基本方程式	520
§ 28. 等深度的渠道中的長波	524
§ 29. 变深度的渠道中的留駐振动	527
§ 30. 小深度的柱形容器中的留駐振动	530
§ 31. 等深度的渠道中的強迫振动	531
§ 32. 潮汐的靜力理論	535
§ 33. 潮汐靜力理論的結論	539
§ 34. 潮汐的渠道理論	544
§ 35. 在旋轉大气層中的波	549
§ 36. 習題	553
参考文献	555

第一章 流体媒質运动学

A 流体質点的变形

§ 1. 科犀-海姆霍茲公式 在剛体运动学中研究关于运动物体的速度分布問題，并指出物体的任意一点的速度 v 可以認為是两个速度的几何和，这两个速度就是：在物体上所选的極点的平移速度 v_0 ，和圍繞經過極点的瞬时轉动軸的轉动速度。大家知道，轉动速度可以表示为矢積 $\omega \times \rho$ ，这里 ω 是沿瞬时轉动軸的角速度矢量，而 ρ 是从極点引到物体上所考慮的那一点的相对矢徑；因此

$$v = v_0 + \omega \times \rho, \quad (1.1)$$

并且按照剛性的条件，在物体运动时，长度 ρ 保持不变。因为 $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ，式中， $\mathbf{r}$ 是物体上所取点的絕对矢徑，也就是从空間某一固定点所引的矢徑，那么公式(1.1)就同时給出了所考慮的那一点的位移元素 $d\mathbf{r}$ 的分解式，式中包含移动和轉动兩部分：

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + (\omega \times \rho)dt. \quad (1.2)$$

現在再來研究运动的流体媒質中各不同点的速度和位移，假設在媒質中切出一塊想像很小的質点，此質点被單連通面，例如球形面，所包围；同时，我們考慮这質点在兩时刻 t 和 $t+dt$ 的兩個相鄰位置，而 t 和 $t+dt$ 間相隔無窮小時間 dt 。

在流体質点的第一个位置上，取兩個任意点 O 和 A (圖1)；兩点中的一点，例如 O 点，取为基本点(極)，并以 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r}$ 表示从空間某一点 O

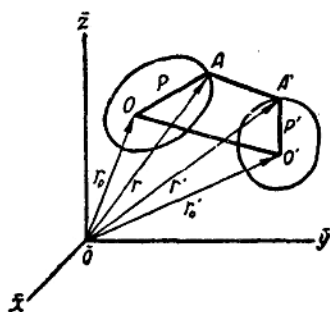


圖 1.

引到此兩點的絕對矢徑；以 ρ 表示相對矢徑 OA ；令 $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'$ 和 ρ' 表示當 $t+dt$ 時刻在第二個位置上的相應的數值，這樣， O 點和 A 點的位移元素將是：

$$d\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}.$$

差數 $\rho' - \rho$ 可稱為 A 點對於 O 的相對位移元素；以 $d\rho$ 表示此元素，即

$$d\rho = \rho' - \rho.$$

由於明顯的幾何關係

$$\rho' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0, \quad \rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,$$

下列關係

$$d\rho = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)dt$$

將是正確的，式中 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}_0$ 是在 t 時刻 A 點和 O 點的速度。另一方面，考慮在 t 時刻流體的速度場，即認為速度是點函數

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0),$$

按照矢量對矢量的導致的定義，準確到二級微量時，我們有

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \rho) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = (\rho \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

因而

$$d\rho = (\rho \cdot \nabla) \mathbf{v} dt, \quad (1.3)$$

或者寫成在固定坐標軸 $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 上的分量

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta \right) dt, \\ d\eta &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta \right) dt, \\ d\zeta &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

將最後的公式，經過科里指出的並不複雜的代數變換後，可以把它變成下列形式：

$$\begin{aligned} d\xi &= \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \zeta \right] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \eta \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\eta &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \zeta \right] dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \xi - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \zeta \right] dt, \\
d\zeta &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta \right] dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \eta - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \xi \right] dt.
\end{aligned}$$

为了省略起见引用符号

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} &= \varepsilon_1, & \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \varepsilon_2, & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \varepsilon_3, \\
\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \Theta_1, & \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \Theta_2, & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \Theta_3.
\end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

記着渦量的定义,我們可以寫成:

$$\left. \begin{aligned}
d\xi &= \left(\varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2} \Theta_3 \eta + \frac{1}{2} \Theta_2 \zeta \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} (\zeta \operatorname{rot}_y \mathbf{v} - \eta \operatorname{rot}_x \mathbf{v}) dt, \\
d\eta &= \left(\frac{1}{2} \Theta_3 \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \Theta_1 \zeta \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} (\xi \operatorname{rot}_z \mathbf{v} - \zeta \operatorname{rot}_x \mathbf{v}) dt, \\
d\zeta &= \left(\frac{1}{2} \Theta_2 \xi + \frac{1}{2} \Theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} (\eta \operatorname{rot}_z \mathbf{v} - \xi \operatorname{rot}_y \mathbf{v}) dt.
\end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

或者縮寫成

$$\left. \begin{aligned}
d\xi &= \frac{\partial F}{\partial \xi} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_x dt, \\
d\eta &= \frac{\partial F}{\partial \eta} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_y dt, \\
d\zeta &= \frac{\partial F}{\partial \zeta} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_z dt,
\end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

式中

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + \Theta_1 \eta \zeta + \Theta_2 \xi \zeta + \Theta_3 \xi \eta). \quad (1.8)$$

最后的公式表示, 相对位移元素 $d\rho$ 可以認為是兩部分的几何和:

- 1) 具有分量 $\frac{\partial F}{\partial \xi} dt, \frac{\partial F}{\partial \eta} dt, \frac{\partial F}{\partial \zeta} dt$ 的矢量, 这个矢量即所謂純变形, 及
- 2) 矢量 $\left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right] dt$, 它表示, 假若質点变为固体的話, 当 A 点圍繞經過 O 点的瞬时轉动軸以角速度 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ 旋轉时, A 点的轉动位移元素。

因为 $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\rho$, 我們就得到結論: 流体质点上的任一点的位移元素, 可以認為是平移, 轉动和变形三种位移的几何和; 將位移除以 dt 后, 对于速度我們可以重复此結論如下:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (1.9)$$

式中 $\mathbf{v}_0$ 是極点 O 的平移速度; $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ 是所取点 (决定于相对矢徑 $\boldsymbol{\rho}$) 圍繞通过極点的瞬时轉动軸而轉动的速度, 其角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (1.10)$$

$\mathbf{v}_2 = \operatorname{grad} F$, 就是純变形的速度, 它是一个由二次齐次函数(1.8)所决定的势矢量, 在此函数中的系数具有上述的数值。

§ 2. 純变形 为了更清楚地表明称为純变形的运动特征, 我們假定运动沒有轉动的部分; 这样流体质点的某一点的相对坐标 ξ, η, ζ , 当經過時間元素 dt 后所取的数值为

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \xi + d\xi = (1 + \varepsilon_1 dt)\xi + \frac{1}{2}\Theta_3 dt\eta + \frac{1}{2}\Theta_2 dt\zeta, \\ \eta' &= \eta + d\eta = \frac{1}{2}\Theta_3 dt\xi + (1 + \varepsilon_2 dt)\eta + \frac{1}{2}\Theta_1 dt\zeta, \\ \zeta' &= \zeta + d\zeta = \frac{1}{2}\Theta_2 dt\xi + \frac{1}{2}\Theta_1 dt\eta + (1 + \varepsilon_3 dt)\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

因为 ξ', η', ζ' 在数值上与 ξ, η, ζ 的差別是無窮小, 則准确到二級無窮小的精确度时, 可以令

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + \varepsilon_1 dt \xi' + \frac{1}{2} \Theta_3 dt \eta' + \frac{1}{2} \Theta_2 dt \zeta', \\ \eta' &= \eta + \frac{1}{2} \Theta_3 dt \xi' + \varepsilon_2 dt \eta' + \frac{1}{2} \Theta_1 dt \zeta', \\ \zeta' &= \zeta + \frac{1}{2} \Theta_2 dt \xi' + \frac{1}{2} \Theta_1 dt \eta' + \varepsilon_3 dt \zeta',\end{aligned}$$

从这里得

$$\left. \begin{aligned}\xi &= (1 - \varepsilon_1 dt) \xi' - \frac{1}{2} \Theta_3 dt \eta' - \frac{1}{2} \Theta_2 dt \zeta', \\ \eta &= -\frac{1}{2} \Theta_3 dt \xi' + (1 - \varepsilon_2 dt) \eta' - \frac{1}{2} \Theta_1 dt \zeta', \\ \zeta &= -\frac{1}{2} \Theta_2 dt \xi' - \frac{1}{2} \Theta_1 dt \eta' + (1 - \varepsilon_3 dt) \zeta'.\end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

最后的公式指出，若此流体小質点的点在 t 时刻是在半徑 R 的球上

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2,$$

則在 $t + dt$ 时刻，这些点將轉到一个二次曲面上（因为上述公式是綫性的），由于运动的連續性，球形流体曲面在無窮小的時間單元 dt 后，僅能作無窮小的变形，所以此曲面只能是橢圓体；此橢圓体的方程式精确到二級無窮小时，將是：

$$\begin{aligned}(1 - 2\varepsilon_1 dt) \xi'^2 + (1 - 2\varepsilon_2 dt) \eta'^2 + (1 - 2\varepsilon_3 dt) \zeta'^2 - \\ - 2\Theta_1 dt \eta' \zeta' - 2\Theta_2 dt \zeta' \xi' - 2\Theta_3 dt \xi' \eta' = R^2.\end{aligned} \quad (2.3)$$

上面的橢圓体称为变形橢圓体，它的主軸称为变形主軸。

§ 3. 变形橢圓体 我們將指出在变形主軸上的流体質点，在变形后仍然在同一軸上，只經過沿軸的平移。为了得到上述結論，我們利用橢圓体主軸和橢圓体在頂点的法綫相重合的特性。

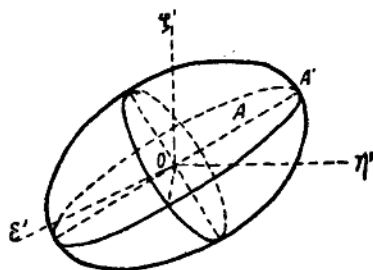


圖 2.

令 ρ' 是引到橢圓體半主軸端點 A' 的矢量, 其分量为 ξ', η', ζ' (圖 2)。此橢圓體在 (ξ', η', ζ') 点的法綫的方向余弦与方程(2.3)左边部分对 ξ', η', ζ' 的導数成比例; 如果此法綫与矢量 ρ' 是同綫的, 則必須是:

$$\left. \begin{aligned} (1-2\varepsilon_1 dt)\xi' - \Theta_3 d\eta' - \Theta_2 d\zeta' &= \mu\xi', \\ -\Theta_3 d\xi' + (1-2\varepsilon_2 dt)\eta' - \Theta_1 d\zeta' &= \mu\eta', \\ -\Theta_2 d\xi' - \Theta_1 d\eta' + (1-2\varepsilon_3 dt)\zeta' &= \mu\zeta'. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中 μ 是暫時未定的具有非常簡單數值的參變數。實際上, 如果依次將上面方程乘以 ξ', η' 和 ζ' 后相加, 並利用方程(2.3), 則我們得到:

$$R^2 = \mu(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \mu\rho'^2,$$

由此得

$$\mu = \frac{R^2}{\rho'^2}, \quad (3.2)$$

式中 ρ' 是所考慮的橢圓體(2.3)的半主軸的長度。

利用方程(2.2)我們可以將關係式(3.1)改寫成以下形式:

$$2\xi - \xi' = \mu\xi', \quad 2\eta - \eta' = \mu\eta', \quad 2\zeta - \zeta' = \mu\zeta',$$

或者簡單地寫成:

$$\xi = \frac{1+\mu}{2}\xi', \quad \eta = \frac{1+\mu}{2}\eta', \quad \zeta = \frac{1+\mu}{2}\zeta',$$

如用矢量來表示則可寫成下式:

$$\rho = \frac{1+\mu}{2}\rho',$$

式中 ρ 是 A 点的矢徑, 經過變形后, 這 A 點變到向量 ρ' 的端點。上面得到的方程式還指出, 在變形橢圓體(2.3)的主軸上的各點在變形后仍在原來的軸綫上。

我們來計算單位時間內主軸相對伸長的數值, 用 e 表示此相對伸長:

$$e = \frac{\rho' - \rho}{\rho dt},$$

于是

$$\rho' = \rho(1 + e dt).$$

从方程(3.2)考慮到 $\rho = R$ 时得出:

$$\mu = \frac{1}{(1 + e \, dt)^2},$$

或者,略去二級無窮小項时,就得

$$\mu = 1 - 2e \, dt. \quad (3.3)$$

利用这些表示式,我們还可以把方程組(3.1)改寫成:

$$2(\varepsilon_1 - e)\xi' + \Theta_3\eta' + \Theta_2\zeta' = 0,$$

$$\Theta_3\xi' + 2(\varepsilon_2 - e)\eta' + \Theta_1\zeta' = 0,$$

$$\Theta_2\xi' + \Theta_1\eta' + 2(\varepsilon_3 - e)\zeta' = 0.$$

这个 ξ' , η' , ζ' 的三元齐次方程組相容的条件在于使判别式为零, 即

$$\begin{vmatrix} 2(\varepsilon_1 - e) & \Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 2(\varepsilon_2 - e) & \Theta_1 \\ \Theta_2 & \Theta_1 & 2(\varepsilon_3 - e) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

这个 e 的三次方程式永远有三个实根 e_1, e_2, e_3 (其中的二个或三个可以相等)。按照公式(3.3)我們計算对应的 μ 的数值:

$$\mu_1 = 1 - 2e_1 dt, \quad \mu_2 = 1 - 2e_2 dt, \quad \mu_3 = 1 - 2e_3 dt,$$

并由公式(3.2)找到橢圓体(2.3)的主軸長度, 此長度我們用 a, b, c 來表示:

$$a^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_1 dt}, \quad b^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_2 dt}, \quad c^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_3 dt}.$$

因此, 相对于对称軸綫的变形橢圓体(2.3)的方程式, 就成为下列形式:

$$(1 - 2e_1 dt)\xi_1^2 + (1 - 2e_2 dt)\eta_1^2 + (1 - 2e_3 dt)\zeta_1^2 = R^2. \quad (3.5)$$

§ 4. 体積擴張量 系数 e_1, e_2, e_3 称为主伸長, 当变换二次曲面的方程式时 [从方程(3.4)得來的], 按照熟知的不变量的特性, 就会得到下列关系:

$$e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (4.1)$$

或者,回想到下列符号所表示的意义时:

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (4.2)$$

也会得到此关系。

不难看出,末后的数量有它简单的物理意义,就是表示在单位时间内液体本身的体积膨胀量。实际上,若用 τ 及 τ' 表示球形质点的体积及此质点经变形后所变成的椭圆体的体积,我们得到准确到二级无穷小的体积膨胀量:

$$\begin{aligned} \frac{\tau' - \tau}{\tau dt} &= \frac{\frac{4}{3}\pi abc - \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 dt} = \frac{(1 + e_1 dt)(1 + e_2 dt)(1 + e_3 dt) - 1}{dt} = \\ &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

由此得到,对于不可压缩液体的每一质点,必需满足下列关系式

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

我们注意到决定质点的纯变形及转动的数量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ 和质点的极点 O 有关,并且一般将是坐标(O 点的)及时间的函数;在这些数量是常数的情况下,变形称为均匀变形。

§ 5. 习题 1. 证明当均匀变形时在平面上或直线上的液体质点于变形后仍在相对应的某一平面或直线上。

2. 若所有其他的系数等于零时解释系数 ε_1 的意义。

解答: ε_1 是沿 Ox 轴上的速度伸长。

3. 若所有其他的系数等于零时解释系数 Θ_3 的意义。

解答: Θ_3 是直角 Oxy 倾斜减小的速度。

4. 证明,当均匀变形时任何液体质点的变形主轴的方向相同。

B. 連續方程式

§ 6. 拉格蘭基变数 可以用两种观点来研究流体运动。

第一种观点是由拉格蘭基特別詳盡發揮的,从这观点出發,研究的对象是运动流体本身,或更确切些說,就是研究个别的流体質点,它們被看成是物質質点,連續地充滿了流体所占有的某一运动空間。这个空間姑且称为“流体空間”。

这种研究包括 1)研究各种矢量及标量在時間过程中的变化(例如速度、密度等等),这些矢量和标量是表征流体空間某一指定質点的运动的; 2)研究从流体空間的某一質点轉到其他質点时,这些量的变化;換句話說,把上述表征运动特性的各量看作是時間和标志所取質点特性的那些数字的函数。

例如可取在某一开始的时刻 t_0 时流体質点的笛卡尔坐标 x_0, y_0, z_0 作为上述数字;这样当流体空間运动时,描述任何流体質点的坐标 x, y, z 便顯然是時間 t 和此質点的开始坐标的确定函数:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0), \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

而当 $t=t_0$ 时函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 就恒变为 x_0, y_0, z_0 。

$$x_0 = \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0),$$

$$y_0 = \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0),$$

$$z_0 = \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0).$$

在所研究的流体空間中,使一个質点区别于另一个質点的笛卡尔坐标 x_0, y_0, z_0 , 可以用另外三个量 a, b, c 來代替,它們与 x_0, y_0, z_0 有相互單值对应关系。

$$x_0 = \psi_1(a, b, c), \quad y_0 = \psi_2(a, b, c), \quad z_0 = \psi_3(a, b, c);$$

換句話說可取开始时刻 t_0 时質点的曲綫坐标。

用拉格蘭基的观点,变数 a, b, c 是决定各种矢量与标量函数之值的自变数;而这些函数可以决定运动的特性;这些变数称为拉格蘭基变数。