高等学校教学用書

理論流体力学

第一卷　第一分册

Н.Е.柯欽　И.А.基别里　Н.В.罗斯著
曹俊　余常昭　陈耀松　蔡樹棠譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术与理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的柯欽(Н. Е. Кочин)、基別里(И.А. Кибель)、罗斯(Н.В. Розе)合著"理論流体力学"(Теоретическая гидромеханика)修正第四版譯出。原書經苏联高等教育部审定为綜合性大学教科書。

原書共二卷,譯本每卷分兩册出版,此册为第一卷第一分册,包括基本方程式,理想流体动力学等各部份。

本書內容包含很广,可以作为航空、气象、水利等方面的高年級学生、教师及这些方面的科学工作人員的参考書。

本書由曹俊、余常昭、陈耀松、蔡树棠四位同志合譯而成。譯者老師周培源教授曾校閱过本書部份譯稿。

理論流体力学

第一卷　第一分册

Н. Е. 柯欽等著

曹俊等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号)

京華印書局印刷　新華書店总經售

書号13010·86　開本850×1168 1/32　印張7 10/16　字數204,000

一九五六年七月北京第一版

一九五七年二月北京第二次印刷

印數7,001—9,000　定價(8)¥0.90

第一分册目錄

第二分册目录

第一章　流体媒質运动学

A　流体質点的变形

§1. 科犀-海姆霍兹公式　在剛体运动学中研究关于运动物体的速度分布問題，并指出物体的任意一点的速度 $\boldsymbol{v}$ 可以認为是兩个速度的几何和，这兩个速度就是：在物体上所选的極点的平移速度 $\boldsymbol{v}_0$，和圍繞經过極点的瞬时轉动軸的轉动速度。大家知道，轉动速度可以表示为矢積 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$，这里 $\boldsymbol{\omega}$ 是沿瞬时轉动軸的角速度矢量，而 $\boldsymbol{\rho}$ 是从極点引到物体上所考慮的那一点的相对矢徑；因此

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}, \tag{1.1}$$

并且按照剛性的条件，在物体运动时，長度 ρ 保持不变。因为 $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，式中，$\boldsymbol{r}$ 是物体上所取点的絕对矢徑，也就是从空間某一固定点所引的矢徑，那么公式(1.1)就同时給出了所考慮的那一点的位移元素 $d\boldsymbol{r}$ 的分解式，式中包含移动和轉动兩部分：

$$d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}_0+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})dt. \tag{1.2}$$

現在再來研究运动的流体媒質中各不同点的速度和位移，假設在媒質中切出一塊想像很小的質点，此質点被單連通面，例如球形面，所包圍；同时，我們考慮这質点在兩时刻 t 和 $t+dt$ 的兩个相鄰位置，而 t 和 $t+dt$ 間相隔無窮小时間 dt。

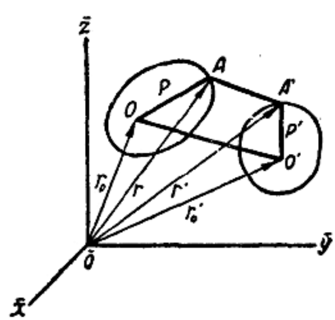

圖 1.

在流体質点的第一个位置上，取兩个任意点 O 和 A（圖1）；兩点中的一点，例如 O 点，取为基本点(極)，并以 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 表示从空間某一点 O

引到此兩点的絕对矢徑；以 $\boldsymbol{\rho}$ 表示相对矢徑 OA；令 $\boldsymbol{r}_0'$, $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$ 表示当 $t+dt$ 时刻在第二个位置上的相应的数值，这样，O 点和 A 点的位移元素將是:

$$d\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_0'-\boldsymbol{r}_0;\quad d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}.$$

差数 $\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}$ 可称为 A 点对于 O 的相对位移元素；以 $d\boldsymbol{\rho}$ 表示此元素，即

$$d\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}.$$

由于明顯的几何关系

$$\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0',\quad \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,$$

下列关系

$$d\boldsymbol{\rho}=d\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}_0=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)dt$$

將是正确的，式中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 是在 t 时刻 A 点和 O 点的速度。另一方面，考慮在 t 时刻流体的速度場，即認为速度是点函数

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0),$$

按照矢量对矢量的導数的定义，准确到二級微量时，我們有

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\rho})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0)=(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

因而

$$d\boldsymbol{\rho}=(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dt,\tag{1.3}$$

或者寫成在固定坐标軸 $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 上的分量

$$\left.\begin{aligned}
d\xi&=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\xi+\frac{\partial v_x}{\partial y}\eta+\frac{\partial v_x}{\partial z}\zeta\right)dt,\\
d\eta&=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\xi+\frac{\partial v_y}{\partial y}\eta+\frac{\partial v_y}{\partial z}\zeta\right)dt,\\
d\zeta&=\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\xi+\frac{\partial v_z}{\partial y}\eta+\frac{\partial v_z}{\partial z}\zeta\right)dt.
\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

將最后的公式，經过科厘指出的幷不复雜的代数变换后，可以把它变成下列形式：

$$\begin{aligned}
d\xi=&\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta\right]dt+\\
&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta\right]dt,
\end{aligned}$$

$$d\eta=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\xi+\frac{\partial v_y}{\partial y}\eta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\zeta\right]dt+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\xi-\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\zeta\right]dt,$$
$$d\zeta=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\xi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\eta+\frac{\partial v_z}{\partial z}\zeta\right]dt+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\eta-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\xi\right]dt.$$

为了省略起見引用符号

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_x}{\partial x}=\varepsilon_1, &&\frac{\partial v_y}{\partial y}=\varepsilon_2, &&\frac{\partial v_z}{\partial z}=\varepsilon_3,\\&\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}=\Theta_1, &&\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\Theta_2, &&\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}=\Theta_3.\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

記着渦量的定义，我們可以寫成：

$$\left.\begin{aligned}d\xi&=\left(\varepsilon_1\xi+\frac{1}{2}\Theta_3\eta+\frac{1}{2}\Theta_2\zeta\right)dt\\&\quad+\frac{1}{2}(\zeta\operatorname{rot}_y\boldsymbol{v}-\eta\operatorname{rot}_z\boldsymbol{v})dt,\\d\eta&=\left(\frac{1}{2}\Theta_3\xi+\varepsilon_2\eta+\frac{1}{2}\Theta_1\zeta\right)dt\\&\quad+\frac{1}{2}(\xi\operatorname{rot}_z\boldsymbol{v}-\zeta\operatorname{rot}_x\boldsymbol{v})dt,\\d\zeta&=\left(\frac{1}{2}\Theta_2\xi+\frac{1}{2}\Theta_1\eta+\varepsilon_3\zeta\right)dt\\&\quad+\frac{1}{2}(\eta\operatorname{rot}_x\boldsymbol{v}-\xi\operatorname{rot}_y\boldsymbol{v})dt.\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

或者縮寫成

$$\left.\begin{aligned}d\xi&=\frac{\partial F}{\partial\xi}dt+\left(\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_x dt,\\d\eta&=\frac{\partial F}{\partial\eta}dt+\left(\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_y dt,\\d\zeta&=\frac{\partial F}{\partial\zeta}dt+\left(\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_z dt,\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

式中

$$F=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\xi^2+\varepsilon_2\eta^2+\varepsilon_3\zeta^2+\Theta_1\eta\zeta+\Theta_2\xi\zeta+\Theta_3\xi\eta). \qquad (1.8)$$

最后的公式表示，相对位移元素 $d\boldsymbol{\rho}$ 可以認为是兩部分的几何和：1)具有分量 $\frac{\partial F}{\partial \xi}dt$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}dt$, $\frac{\partial F}{\partial \zeta}dt$ 的矢量，这个矢量即所謂純变形，及2)矢量 $\left[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\rho}\right]dt$, 它表示，假若質点变为固体的話，当 A 点圍繞經过 O 点的瞬时轉动軸以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 旋轉时，A 点的轉动位移元素。

因为 $d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}_0+d\boldsymbol{\rho}$, 我們就得到結論：流体質点上的任一点的位移元素，可以認为是平移，轉动和变形三种位移的几何和；將位移除以 dt 后，对于速度我們可以重复此結論如下：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \qquad (1.9)$$

式中 $\boldsymbol{v}_0$ 是極点 O 的平移速度；$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ 是所取点（决定于相对矢徑 $\boldsymbol{\rho}$)圍繞通过極点的瞬时轉动軸而轉动的速度，其角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \qquad (1.10)$$

$\boldsymbol{v}_2=\operatorname{grad}F$, 就是純变形的速度，它是一个由二次齐次函数(1.8)所决定的势矢量，在此函数中的系数具有上述的数值。

§2. 純变形 为了更清楚地表明称为純变形的运动特征，我們假定运动沒有轉动的部分；这样流体質点的某一点的相对坐标 ξ, η, ζ, 当經过时間元素 dt 后所取的数值为

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\xi+d\xi=(1+\varepsilon_1\,dt)\xi+\frac{1}{2}\Theta_3 dt\eta+\frac{1}{2}\Theta_2 dt\zeta,\\ \eta'&=\eta+d\eta=\frac{1}{2}\Theta_3\,dt\xi+(1+\varepsilon_2\,dt)\eta+\frac{1}{2}\Theta_1 dt\zeta,\\ \zeta'&=\zeta+d\zeta=\frac{1}{2}\,\Theta_2\,dt\xi+\frac{1}{2}\Theta_1 dt\eta+(1+\varepsilon_3 dt)\zeta.\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

因为 ξ', η', ζ' 在数值上与 ξ, η, ζ 的差别是無窮小，則准确到二級無窮小的精确度时，可以令

$$\xi' = \xi + \varepsilon_1 dt\xi' + \frac{1}{2}\Theta_3\, dt\eta' + \frac{1}{2}\Theta_2 dt\zeta',$$

$$\eta' = \eta + \frac{1}{2}\Theta_3\, dt\xi' + \varepsilon_2\, dt\eta' + \frac{1}{2}\Theta_1 dt\zeta',$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{1}{2}\Theta_2\, dt\xi' + \frac{1}{2}\Theta_1\, dt\eta' + \varepsilon_3\, dt\zeta',$$

从这里得

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1-\varepsilon_1 dt)\xi' - \frac{1}{2}\Theta_3\, dt\eta' - \frac{1}{2}\Theta_2\, dt\zeta', \\ \eta &= -\frac{1}{2}\Theta_3\, dt\xi' + (1-\varepsilon_2\, dt)\eta' - \frac{1}{2}\Theta_1 dt\zeta', \\ \zeta &= -\frac{1}{2}\Theta_2\, dt\xi' - \frac{1}{2}\Theta_1\, dt\eta' + (1-\varepsilon_3\, dt)\zeta'. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

最后的公式指出，若此流体小質点的点子在 t 时刻是在半徑 R 的球上

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2,$$

则在 $t+dt$ 时刻，这些点將轉到一个二次曲面上（因为上述公式是綫性的），由于运动的連續性，球形流体曲面在無窮小的时間單元 dt 后，僅能作無窮小的变形，所以此曲面只能是橢圓体；此橢圓体的方程式精确到二級無窮小时，將是：

$$(1-2\varepsilon_1\, dt)\xi'^2 + (1-2\varepsilon_2 dt)\eta'^2 + (1-2\varepsilon_3\, dt)\zeta'^2 - \\ -2\Theta_1\, dt\eta'\zeta' - 2\Theta_2\, dt\zeta'\xi' - 2\Theta_3\, dt\xi'\eta' = R^2. \tag{2.3}$$

上面的橢圓体称为变形橢圓体，它的主軸称为变形主軸。

§3. 变形橢圓体　我們將指出在变形主軸上的流体質点，在变形后仍然在同一軸上，只經过沿軸的平移。为了得到上述結論，我們利用橢圓体主軸和橢圓体在頂点的法綫相重合的特性。

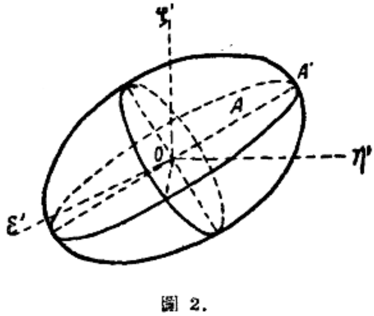

圖 2.

令 ρ' 是引到橢圓体半主軸端点 A' 的矢量，其分量为 ξ', η', ζ'（圖 2）。此橢圓体在 (ξ', η', ζ') 点的法綫的方向余弦与方程(2.3)左边部分对 ξ', η', ζ' 的導数成比例；如果此法綫与矢量 ρ' 是同綫的，則必須是：

$$\left.\begin{aligned}(1-2\varepsilon_1\,dt)\xi'-\Theta_3\,dt\eta'-\Theta_2\,dt\zeta'=\mu\xi',\\ -\Theta_3\,dt\xi'+(1-2\varepsilon_2 dt)\eta'-\Theta_1\,dt\zeta'=\mu\eta',\\ -\Theta_2\,dt\xi'-\Theta_1\,dt\eta'+(1-2\varepsilon_3\,dt)\zeta'=\mu\zeta'.\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

式中 μ 是暫时未定的具有非常簡單数值的参变数。实际上，如果依次將上面方程乘以 ξ', η' 和 ζ' 后相加，并利用方程(2.3)，則我們得到：

$$R^2=\mu(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)=\mu\rho'^2,$$

由此得

$$\mu=\frac{R^2}{\rho'^2},\tag{3.2}$$

式中 ρ' 是所考慮的橢圓体(2.3)的半主軸的長度。

利用方程(2.2)我們可以將关系式(3.1)改寫成以下形式：

$$2\xi-\xi'=\mu\xi',\quad 2\eta-\eta'=\mu\eta',\quad 2\zeta-\zeta'=\mu\zeta',$$

或者簡單地寫成：

$$\xi=\frac{1+\mu}{2}\xi',\quad \eta=\frac{1+\mu}{2}\eta',\quad \zeta=\frac{1+\mu}{2}\zeta',$$

如用矢量來表示則可寫成下式：

$$\boldsymbol{\rho}=\frac{1+\mu}{2}\boldsymbol{\rho}',$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 是 A 点的矢徑，經过变形后，这 A 点变到向量 $\boldsymbol{\rho}'$ 的端点。上面得到的方程式还指出，在变形橢圓体(2.3)的主軸上的各点在变形后仍在原來的軸綫上。

我們來計算單位时間內主軸相对伸長的数值，用 e 表示此相对伸長：

$$e=\frac{\rho'-\rho}{\rho\,dt},$$

于是

$$\rho'=\rho(1+e\,dt).$$

从方程(3.2)考慮到 $\rho=R$ 时得出：

$$\mu=\frac{1}{(1+e\,dt)^2},$$

或者，略去二級無窮小項时，就得

$$\mu=1-2e\,dt. \tag{3.3}$$

利用这些表示式，我們还可以把方程組(3.1)改寫成：

$$2(\varepsilon_1-e)\xi'+\Theta_3\eta'+\Theta_2\zeta'=0,$$

$$\Theta_3\xi'+2(\varepsilon_2-e)\eta'+\Theta_1\zeta'=0,$$

$$\Theta_2\xi'+\Theta_1\eta'+2(\varepsilon_3-e)\zeta'=0.$$

这个 ξ', η', ζ' 的三元齐次方程組相容的条件在于使判别式为零，即

$$\begin{vmatrix} 2(\varepsilon_1-e) & \Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 2(\varepsilon_2-e) & \Theta_1 \\ \Theta_2 & \Theta_1 & 2(\varepsilon_3-e) \end{vmatrix}=0. \tag{3.4}$$

这个 e 的三次方程式永远有三个实根 e_1, e_2, e_3(其中的二个或三个可以相等)。按照公式(3.3)我們計算对应的 μ 的数值：

$$\mu_1=1-2e_1dt,\quad \mu_2=1-2e_2dt,\quad \mu_3=1-2e_3dt,$$

并由公式(3.2)找到橢圓体(2.3)的主軸長度，此長度我們用 a, b, c 來表示：

$$a^2=\frac{R^2}{1-2e_1dt},\quad b^2=\frac{R^2}{1-2e_2dt},\quad c^2=\frac{R^2}{1-2e_3dt}.$$

因此，相对于对称軸綫的变形橢圓体 (2.3) 的方程式，就成为下列形式：

$$(1-2e_1dt)\xi_1^2+(1-2e_2dt)\eta_1^2+(1-2e_3dt)\zeta_1^2=R^2. \tag{3.5}$$

§ 4. 体積擴張量　系数 e_1, e_2, e_3 称为主伸長，当变换二次曲面的方程式时［从方程(3.4)得來的］，按照熟知的不变量的特性，就会得到下列关系：

$$e_1+e_2+e_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3. \tag{4.1}$$

或者，回想到下列符号所表示的意义时：

$$e_1+e_2+e_3=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{4.2}$$

也会得到此关系。

不难看出，末后的数量有它簡單的物理意义，就是表示在單位时間內液体本身的体積擴張量。实际上，若用 τ 及 τ' 表示球形質点的体積及此質点經变形后所变成的橢圓体的体積，我們得到准确到二級無窮小的体積擴張量：

$$\frac{\tau'-\tau}{\tau dt}=\frac{\frac{4}{3}\pi abc-\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 dt}=\frac{(1+e_1dt)(1+e_2dt)(1+e_3dt)-1}{dt}=$$

$$=e_1+e_2+e_3. \tag{4.3}$$

由此得到，对于不可压縮液体的每一質点，必需滿足下列关系式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{4.4}$$

我們注意到决定質点的純变形及轉动的数量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ 和質点的極点 O 有关，并且一般將是坐标（O 点的）及时間的函数；在这些数量是常数的情况下，变形称为均匀变形。

§5. 習題　1. 証明当均匀变形时在平面上或直綫上的液体質点于变形后仍在相对应的某一平面或直綫上。

2. 若所有其他的系数等于零时解釋系数 ε_1 的意义。

解答：ε_1 是沿 Ox 軸上的速度伸長。

3. 若所有其他的系数等于零时解釋系数 Θ_3 的意义。

解答：Θ_3 是直角 Oxy 傾斜减小的速度。

4. 証明，当均匀变形时任何液体質点的变形主軸的方向相同。

Б. 連續方程式

§6. 拉格蘭基变数　可以用兩种观点來研究流体运动。

第一种观点是由拉格蘭基特别詳尽發揮的，从这观点出發，研究的对象是运动流体本身，或更确切些說，就是研究个别的流体質点，它們被看成是物質質点，連續地充满了流体所占有的某一运动空間．这个空間姑且称为"流体空間"。

这种研究包括 1)研究各种矢量及标量在时間过程中的变化(例如速度、密度等等)，这些矢量和标量是表征流体空間某一指定質点的运动的；2)研究从流体空間的某一質点轉到其他質点时，这些量的变化；换句話說，把上述表征运动特性的各量看作是时間和标志所取質点特性的那些数字的函数。

例如可取在某一开始的时刻 t_0 时流体質点的笛卡尔坐标 x_0, y_0, z_0 作为上述数字；这样当流体空間运动时，描述任何流体質点的坐标 x, y, z 便顯然是时間 t 和此質点的开始坐标的确定函数：

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y&=\varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z&=\varphi_3(t, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

而当 $t=t_0$ 时函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 就恒变为 x_0, y_0, z_0。

$$x_0=\varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0),$$
$$y_0=\varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0),$$
$$z_0=\varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0).$$

在所研究的流体空間中，使一个質点区别于另一个質点的笛卡尔坐标 x_0, y_0, z_0，可以用另外三个量 a, b, c 來代替，它們与 x_0, y_0, z_0 有相互單值对应关系。

$$x_0=\psi_1(a, b, c),\quad y_0=\psi_2(a, b, c),\quad z_0=\psi_3(a, b, c);$$

换句話說可取开始时刻 t_0 时質点的曲綫坐标。

用拉格蘭基的观点，变数 a, b, c 是决定各种矢量与标量函数之值的自变数；而这些函数可以决定运动的特性；这些变数称为拉格蘭基变数。