山东教育出版社

数学分析的方法

周家云　刘一鸣　解际太　编著

数学分析的方法

周家云　刘一鸣　解际太　编著

山东教育出版社
1991年·济南

鲁新登字2号

数学分析的方法

周家云　刘一鸣　解际太　编著

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　15.5印张　2插页　330千字

1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷

印数 1—1,980

ISBN 7—5328—1196—4/G·1010

定价　4.70元

前　言

数学分析是高等师范院校数学系和综合性大学数学系的一门重要基础课。由于课时的限制，该课程无论在内容的深度、广度，还是在解题的方法上不可能全面展开。本书在一般数学分析教科书的基础上，对某些内容作了适当的加深和拓广，特别在解题方法上作了较为全面的讨论，可作为数学分析的复习资料和教学参考书。

本书根据周家云副教授历年辅导本科生报考硕士研究生所用的材料编写而成。例题多数选用各类院校招收硕士研究生的入学试题（挑选其中较为典型的或较难的），具有一定的技巧性和难度。因此，本书也是一本报考硕士研究生用的极好参考资料。

在编写过程中，吕玉华、张小霞两位同志为本书提供了部分例题，在此表示感谢。

对于书中的缺点和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1991年 3 月

目　　录

第一章 极　　限

极限概念是数学分析的重要概念，极限理论是数学分析的基础理论，极限方法是数学分析研究函数的基本方法。本章主要介绍求极限与证明极限的方法。

一、基本方法（利用定义、性质）

例 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，令

$$z_n = \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = ab$。

证明：$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 知，$\exists M > 0$，使 $|x_n| \leqslant M$，$|y_n| \leqslant M$，且 $\exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{4(|b|+1)}$，$|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$。取 $N > \dfrac{4(M^2 + |ab|)N_1}{\varepsilon} + 2N_1$，当 $n > N$ 时，

$$\begin{aligned}|z_n - ab| \leqslant & \left|\frac{(x_1y_n - ab) + \cdots + (x_{N_1}y_{n-N_1+1} - ab)}{n}\right| \\ & + \left|\frac{(x_{N_1+1}y_{n-N_1} - ab) + \cdots + (x_{n-N_1}y_{N_1+1} - ab)}{n}\right| \\ & + \left|\frac{(x_{n-N_1+1}y_{N_1} - ab) + \cdots + (x_ny_1 - ab)}{n}\right| \\ \leqslant & \frac{|x_1y_n| + |ab| + \cdots + |x_{N_1}y_{n-N_1+1}| + |ab|}{n}\end{aligned}$$

$$+\frac{|x_{N_1+1}y_{n-N_1}-x_{N_1+1}b|+|x_{N_1+1}b-ab|}{n}+\cdots$$

$$+\frac{|x_{n-N_1}y_{N_1+1}-x_{n-N_1}b|+|x_{n-N_1}b-ab|}{n}$$

$$+\frac{|x_{n-N_1+1}y_{N1}|+|ab|+\cdots+|x_ny_1|+|ab|}{n}$$

$$\leqslant\frac{N_1(M^2+|ab|)}{n}$$

$$+\frac{|x_{N_1+1}||y_{n-N_1}-b|+|b||x_{N_1+1}-a|}{n}+\cdots$$

$$+\frac{|x_{n-N_1}||y_{N_1+1}-b|+|b||x_{n+N_1}-a|}{n}$$

$$+\frac{N_1(M^2+|ab|)}{n}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\left(M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+|b|\cdot\frac{\varepsilon}{4(|b|+1)}\right)\cdot(n-2N_1)}{n}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}z_n=ab.$$

例 2　设$\{x_n\}$是收敛数列，那么“要判定数列$\{x_ny_n\}$的收敛性只需判定$\{y_n\}$的收敛性”，问这种说法是否正确？

解：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

(1) 当$a\neq 0$时正确，即 $\{x_ny_n\}$收敛的充要条件是$\{y_n\}$收敛。

(2) 当$a=0$时不正确，即当 $\{y_n\}$发散时，$\{x_ny_n\}$也可收敛，也可发散。例如$x_n=\frac{1}{n^2}$，取 $y_n=(-1)^n$，那么$\{x_ny_n\}$

收敛；取$y_n=n^3$，那么$\{x_ny_n\}$发散。

例3　设函数f在$[0,+\infty)$上递增，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=c,$$

求证　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$。

证明：$\forall x>0$，有

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dt\geqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\to c\quad(x\to+\infty).$$

又

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(x)dt\leqslant\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt$$

$$=2\cdot\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)dt-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\to 2c-c=c$$

$$(x\to+\infty),$$

由夹逼性定理知　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$。

二、利用洛必达法则

凡属$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，0^0，1^∞，∞^0的不定型，都可经过适当的恒等变形化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的不定型，只要函数具有一定的可微性条件，就可以应用洛必达法则求极限。要注意凡需重复使用洛必达法则时，每一步求导后要整理所得结果，将定型的因式分离出来；凡在求导后达不到简化目的时，不可勉强使用洛必达法则，而需考虑其它方法。

洛必达法则是求极限的一种非常基本且有效的方法，下面很多例子中都使用了此法，这里不单独举例。

三、利用基本极限

在求极限时，有时直接使用洛必达法则达不到简化目的，甚至极限求不出来，此时需把原式恒等变形，分离出定型的因式，使剩下的因式便于求极限。这些常用的定型因式就是所谓的基本极限，例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a\quad (a>0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$.

此题直接使用洛必达法则显然是不适宜的，可以先把式子变形。

解：$\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$

$$=\frac{x^4}{\sin^4 x}\cdot\frac{2\sin\dfrac{x+\sin x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-\sin x}{2}}{x^4}$$

$$=\frac{x^4}{\sin^4 x}\cdot\frac{\sin\dfrac{x+\sin x}{2}}{\dfrac{x+\sin x}{2}}\cdot\frac{\dfrac{x+\sin x}{2}}{x}$$

$$\cdot \frac{\sin\frac{x-\sin x}{2}}{\frac{x-\sin x}{2}} \cdot \frac{x-\sin x}{x^3}.$$

前四个因式的极限都是已知的，最后一个因式的极限应用洛必达法则很易求出，最 后 的 结 果是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}=\frac{1}{6}.$$

四、利用泰勒公式

有些类型的不定型，可以将其中的某些式子利用泰勒公式展开，消去一些项，转化为易于求出极限的不定型。

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解：$\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+0(x^4)$,

$$\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{8}x^4+0(x^4).$$

又　$\cos x-e^{x^2}=\left[1-\dfrac{1}{2}x^2+0(x^2)\right]-[1+x^2+0(x^2)]$

$$=-\frac{3}{2}x^2+0(x^2),$$

故　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+0(x^4)}{-\frac{3}{2}x^2+0(x^2)}$

$$\cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8} + \frac{0(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2} + \frac{0(x^2)}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2} = -\frac{1}{12}.$$

例 6　设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 1982$，试求$\alpha$、$\beta$的值。

解：$$\frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\beta} = \frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\frac{\beta}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= \frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta + n \cdot 0\left(\frac{1}{n}\right)},$$

显然由条件知$\beta \neq 0$。而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta + n \cdot 0\left(\frac{1}{n}\right)} = \begin{cases} \infty, & \alpha-\beta+1 > 0, \\ \frac{1}{\beta}, & \alpha-\beta+1 = 0, \\ 0, & \alpha-\beta+1 < 0. \end{cases}$$

因此有$\alpha-\beta+1=0$，且$\frac{1}{\beta}=1982$，故$\alpha=-\frac{1981}{1982}$，$\beta=\frac{1}{1982}$。

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$。

解：先用一次洛必达法则，再利用泰勒公式，就有

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = \lim_{x\to\infty}(-x^2)\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]'$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-x^2)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}(-x^{2})\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{2}}+0\left(\frac{1}{x^{2}}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[-\frac{x^{2}}{x(1+x)}+\frac{1}{2}+\frac{0\left(\frac{1}{x^{2}}\right)}{\frac{1}{x^{2}}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}e.$$

五、利用定积分求和式极限

根据和式的特点，判断它是哪个函数在哪个区间（一般是[0，1]）、怎样划分（一般是n等分）、如何取点（一般是取左或右端点）的积分和。

例 8　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right)$。

解：$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}$

$$=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

最后一式是函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$在[0，1] 区间上的积分和（n

等分，取右端点），

故 $$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

又 $$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$

例 9　设 $f\in C[0,1]$，$f(x)>0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot f(1)}.$$

解：令 $S_n=\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot f(1)}$，则

$$\ln S_n=\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\ln f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln f(1)\right],$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\ln S_n=\int_0^1\ln f(x)dx.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln S_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln S_n}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}.$

六、利用数列的递推关系

1．单调有界数列极限存在（单调函数的极限存在）

例 10　设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，求证 $\{S_n\}$ 收敛。

证明：由$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加地收敛于$e$，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调减少地收敛于$e$，知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

故
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

于是　$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$，故$\{S_n\}$是递减的。

又
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n,$$

故$S_n>0$，即$\{S_n\}$有下界。因此$\{S_n\}$收敛。

如果令$c=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$（称$c$为欧拉常数），则根据以上讨论，有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n,\ \text{其中}\varepsilon_n\to0\ (n\to+\infty).$$

例11　设

$$x_n=\begin{cases}a,\ n=0,\ 0<a<\frac{\pi}{2},\\ \sin x_{n-1},\ n\geqslant1,\end{cases}$$

求证　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明：由$0<\sin x<x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，利用归纳法可知

$0\leqslant x_{n+1}<x_n<1$，$n=1$，2，…，即$\{x_n\}$是单调下降且有下界的，故$\{x_n\}$收敛。令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，易知 $0\leqslant l<1$。再由 $\sin x$的连续性知$l=\sin l$，易知$x=\sin x$在$[0,1)$上有唯一解$x=0$，故$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

例12 设$f\in C[1,+\infty)$，单调减少且$f(x)>0$，

令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$，求证$\{S_n\}$收敛。

证明：
$$S_{n+1}-S_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx$$
$$\leqslant f(n+1)-f(n+1)=0,$$

故$\{S_n\}$单调减少。又

$$\begin{aligned}S_n&=f(1)-\int_1^2 f(x)dx+f(2)-\int_2^3 f(x)dx+\cdots\\&\quad+f(n-1)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx+f(n)\\&\geqslant f(1)-f(1)+f(2)-f(2)+\cdots+f(n-1)\\&\quad-f(n-1)+f(n)=f(n)>0,\end{aligned}$$

即$\{S_n\}$有下界，故$\{S_n\}$收敛。

例13 设$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$，求证$\{a_n\}$收敛。

证明：显然$a_n<a_{n+1}$，即$\{a_n\}$递增。

由$n<2^{2^n}$ 知

$$a_n<\sqrt{2^2+\sqrt{2^{2^2}+\sqrt{2^{2^3}+\cdots+\sqrt{2^{2^n}}}}}$$

$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}<2\cdot2=4$$

（用数学归纳法可证$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n\text{个根号}}<2$），即$\{a_n\}$有上界，故$\{a_n\}$收敛。

例14 设f可导，且$0<f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}$（$k$为正常数），令$x_n=\begin{cases}x_0, & n。\\ f(x_{n-1}), & n\geqslant 1,\end{cases}$ 求证$\{x_n\}$收敛。

证明：由$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$及$f'(\xi_n)>0$，知$x_{n+1}-x_n$与$x_n-x_{n-1}$同号，故$\{x_n\}$单调。

又
$$
\begin{aligned}
|x_n|=|f(x_{n-1})|&=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)dx\right|\\
&\leqslant|f(x_0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|dx\\
&\leqslant|f(x_0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}dx\\
&=|f(x_0)|+k\pi,
\end{aligned}
$$
知$\{x_n\}$有界，故$\{x_n\}$收敛。

例15 若$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p, a_n>0$，求证$a_n=0\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$（$\varepsilon>0$）。

证明：取p'：$p-\varepsilon<p'<p$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p'}-1\right]=p'$ 知，

$\exists N$，$\forall n>N$，有$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p'}-1\right]$，故

$a_nn^{p'}>a_{n+1}(n+1)^{p'}>0$。因此 $\{a_nn^{p'}\}$单调减少且有下界，

故收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{p'}=a$，于是

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}}=a_n n^{p-\varepsilon}=a_n n^{p'} n^{p-\varepsilon-p'}$$

$$=a_n n^{p'}\frac{1}{n^{p'-(p-\varepsilon)}}\to 0 \quad (n\to+\infty),$$

所以 $a_n=0\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0)$。

2。利用不动点原理

设函数f满足：$\forall x$、$y\in(-\infty,\ +\infty)$，

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,$$

其中k：$0<k<1$是常数，那么存在唯一的x，使$x=f(x)$。

证明：取$x_1\in\mathscr{D}(f)$。令$x_{n+1}=f(x_n)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$，用数学归纳法可证

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant k^{n-1}|x_2-x_1|\ (n=2,$$

$3\cdots)$。因$0<k<1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|x_2-x_1|$收敛，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛。由此可知$\{x_n\}$收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，由

$$\begin{aligned}|f(x)-x|&\leqslant|f(x)-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x|\\&=|f(x)-f(x_n)|+|x_{n+1}-x|\\&\leqslant k|x-x_n|+|x_{n+1}-x|\to 0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

知 $x=f(x)$。

下证唯一性。

如果存在$x'\neq x$，使$x'=f(x')$，那么