大型动力系统的理论与应用

分解·稳定与结构

卷 1

刘永清 宋中昆 著

华南工学院出版社

THEORY AND APPLICATION OF LARGE-SCALE DYNAMIC SYSTEMS

大型动力系统的理论与应用

——分解、稳定与结构

卷 1

刘永清 宋中昆 著

华南工学院出版社

内 容 简 介

本书介绍了秦元勋教授开创的大型动力系统的稳定性理论与实践研究成果的系统论述. 书中包括了线性、非线性大系统; 离散大系统及具有滞后的大系统的稳定性; 其应用还涉及自动化、计算机、化工、电机、经济、生态、航天及动力大系统的稳定性与结构.

本书是自动化的新理论、系统工程及管理工程的系统理论. 同时为大系统理论与应用及应用数学工作者提供了一类研究问题.

本书为大专院校的理工、师范高年级学生、研究生的教材; 也可供工程技术及研究人员参考.

本书经1986 年 5 月在杭州举行的国家教委应用数学教材委员会推荐出版.

责任编辑　赵　琪
封面设计　吴俊卿

大型动力系统的理论与应用
——分解、结构与稳定性
卷 1

刘永清　宋中昆　著

华南工学院出版社出版发行
广东省新华书店经销
广东第二新华印刷厂电脑照排印装
787×1092毫米　1/16　印张:15　字数:336千字
1988 年 1 月第 1 版　1988 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-4000
ISBN 7-5623-0001-1/TP·001
国内定价: 精　装4.50 元 半精装3.20 元

序　言

大型动力系统的分解理论是自动化理论的第三阶段，即在古典理论与现代控制理论之后的第三代新理论，它也是系统工程、管理工程的系统理论．复型的大型系统常常是由若干互相关联较少的子系统所构成，为了便于理解它们的相互关系，为了便于处理和计算，分解问题便自动地提到日程上来．因此，研究大型动力系统的分解问题对于促进自动化、系统工程、管理工程等软学科发展，以及实际解决工程技术中的具体问题都是重要的和必要的．

早在 1959 年，我在研究飞机自动驾驶仪的设计中，从工程技术工作者的处理方法中，提升出大型动力系统的稳定性的分解概念．我的共同工作者王慕秋、刘永清等同志迅速将这一概念发展和应用于实际工作，王慕秋同志首先将这一概念应用于线性定常系统，给出了线性微分方程系统的分解条件；刘永清同志在他担负的升船机的研究工作中应用了这一概念，在解决非线性控制系统中提出了大系统的李雅普诺夫函数分解法．这样，中国工作者在 1959 年至 1965 年首次在国际上开辟了大型动力系统稳定性分解这一领域的研究工作．此后，刘永清又将这一方法加以扩展，将它与我们在 1957－1960 年提出的在稳定性理论中微分方程差分方程等价性的研究方法相结合，形成了“分解等价法”，研究了具有滞后的大系统，以及变系数的系统和离散的大系统等等．刘永清同志将这一方向全面推进，在发展这一理论的同时，并将它应用于自动化、计算机、化工、电力大系统等方面，理论联系实际地发展了这一学科．国际上，1966 年 Bailey 才开始提出这类问题．1970 年，Thompson 也提出标量和的李雅普诺夫函数法．

这本书中介绍了 1959－1982 年间我和王慕秋、刘永清、宋中昆等同志的工作，以及刘永清和宋中昆同志 1981 年 8 月在上海中美双边国际控制系统学术交流会上所作的报告；1983 年 8 月在北京第四届国际双微会（DD 4）上所作的报告；刘永清提交在 1984 年 7 月匈牙利召开的第九届世界自动控制联合会（IFAC 9）的报告；刘永清、刘金宪 1985 年 6 月在福州国际微分方程学术会上作的报告；同时，刘永清、朱学峰在杭州工业过程的建模与控制国际学术会上所作的报告；刘永清、刘金宪、唐功友、陈潮填 1986 年 9 月于意大利那不勒斯（Naples）AMSE 的建模与模拟的国际学术会议上的报告等．此外，还介绍了 Michel Miller 的工作，特别是 Šiljak 在大型动力系统稳定性与结构的工作．应用范围涉及到生态、经济、航天和动力各方面的内容．

此书初稿在 1982 年初完成以来，先后为华南工学院 78 届应用数学专业，82 届、83 届和 84 届自动化系研究生及部分数学教师讲述了此书．特别于 1983 年 7－8 月在青岛为全国应用数学、自动控制、系统工程和管理工程举办了“大型动力系统分解理论与应用”为期一个月的讲习班，大大推动了全国大系统研究工作的开展．

从 1959 年开始以来，这一方向已极大发展，刘永清和宋中昆同志及时地总结了这方面的工作，汇集成书，在使用中，又不断地进行了修改、更新、充实和提高，完善了此书，这对四化建设必将作出贡献，故乐为之序．

秦元勋

1986 年 9 月

于北京中国科学院应用数学研究所

目　　录

第一章　大型动力系统的稳定性分解概念与方法

§1　大型动力系统稳定性分解概念的提出

随着科学技术的发展，人们提出了大系统．它最初面临的问题是要克服与其相关的数学模型日益增大和复杂性带来的困难．对“大而复杂”的大系统，有时甚至应用效率较高的大型计算机也难以解决；即使能解决，也因过多的计算时间，使用代价太高而很不经济．这就促使人们寻求其他的解决方法，大系统分解就在这种实践的推动下产生．

人们最初对“大系统”概念的认识，是把一个系统分解为相互联接的子系统，若能由子系统的性质组合得到整体系统的性质时，就把这个系统视为大系统．然而什么叫大系统呢？到目前为止还没有公认的严格定义．但是大系统具有：规模庞大、结构复杂、功能综合、因素众多的特点．

1950年 Kron[1] 最早提出分解法在电网络中取得成功．而 Himelblau[2] 在1973年的报告中谈到分解方法的思想早在1843年 Gerling 在解有主对角线元素的代数方程组中已有应用了．

分解法可使大系统简化和研究方便，然而它仍然依赖于一个特殊分解的选取．选取不太损伤大系统的解易子系统是件非常困难的工作．因为把大系统分解后，用子系统的性质组合作为整体大系统的性质时，有时或者不可能表达大系统的性质，或者精度不够．因此，这就说明为什么大系统分解法，Kron 在他提出的电网络分析中取得成功后的这样一段较长的时间中，在其他学科，特别是大型动力系统中取得成效甚微的原因．

大型动力系统的分解理论，目前正处在成果甚少的初创阶段．对它的分解，有两种分解原则是较重要和可取的：物理分解和数学分解

当大系统表示为有物理意义的相互联接的子系统的一个结构时，如升船机的电力拖动控制中的两个五阶非线性系统分解为两个子系统，那么这种分解虽然它在数学模型上有局限性，但它不仅能引起数值简化，而且也能同时给出大系统结构性质的信息；在另一方面，分解原因可能完全是数学的数值简化，此时子系统的变量和数学模型可自由选取而有广泛性，但分解前后变量与系统都排除了全部物理意义，而仅仅由总体的大系统的最终解的性质才可以解释．分解原则的这两方面对我们都是有趣的！我们充分注意运用了这两种分解原则．

早在1959年秦元勋[3][4]就飞机自动驾驶仪的设计中，将飞机六个自由度运动的稳定性，分解为纵向运动的稳定性和横向运动的稳定性各为三个自由度的子系统的运动．并且只考虑纵向运动子系统的稳定性．从这种物理分解原则上升到数学分解原则，首次在国内外提出了大型动力系统的稳定性分解概念．为了说明秦元勋提出的大型动力系统稳定性分解概念的形成过程，我们首先考虑如下的例子．

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{1.1}$$

它的两个孤立子系统为

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 \qquad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \tag{1.2}$$

$a_{ij}(i, j=1, 2)$为常数，(1, 1)的特征方程为

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{1.3}$$

例1 由子系统(1.2)的渐近稳定性，得到复合系统(1.1)的渐近稳定性.

解 设 $a_{11}<0$，$a_{22}<0$，子系统(1.2)的零件是渐近稳定的. 令 $E_1=\max[|a_{12}|, |a_{21}|]$，当 $E_1<\nabla_1=\sqrt{a_{11}a_{22}}$时，$b>0$，已知 $a=-(a_{11}+a_{22})>0$，(1.3)的两个特征根都具有负实部，故当 $E_1<\nabla_1$时，复合系统(1.1)的零解是渐近稳定的.

例2 设 $a_{11}<0$，$a_{22}<0$，故子系统(1.2)的零解是渐近稳定的. 取 $E_2=\min[|a_{12}|, |a_{21}|]$，及 $a_{12}\cdot a_{21}>0$，当 $E_2>\nabla_1$时，$b<0$，已知 $a=-(a_{11}+a_{22})>0$ 故特征方程(1.3)有一个正实根. 故当 $E_2>\nabla_1$时，复合系统(1.1)的零解是不稳定的.

例3 由子系统(1.2)的不稳定性，得到复合系统(1.1)是渐近稳定的.

解 若 $a_{11}<0$，$a_{22}>0$(或 $a_{11}>0$，$a_{22}<0$)，子系统的零解是不稳定的. 若取 $a_{11}+a_{22}<0$，$a_{12}\cdot a_{21}<0$; 且当$E_2>\nabla_1=\sqrt{|a_{11}a_{22}|}$时，有 $b>0$ 已知 $a=-(a_{11}+a_{22})>0$. 得到特征方程(1.3)的两个特征根都具有负实部，故当 $E_2>\nabla_1$时，复合系统(1.1)的零解是渐近稳定的.

例4 由子系统(1.2)的不稳定性，得到复合系统(1.1)的不稳定性.

解 若 $a_{11}>0$，$a_{22}<0$(或 $a_{11}<0$，$a_{22}>0$)子系统(1.2)零解是不稳定的. 取 $a_{11}+a_{22}>0$，则 $a=-(a_{11}+a_{22})<0$，不论 a_{12}，a_{21} 取何值，特征方程(1.3)至少有一个实部为正的特征根，故复合系统(1.1)的零解是不稳定的.

例1—4说明了四种情况:

(Ⅰ)由子系统零解的渐近稳定性得到大系统零解的渐近稳定性(如例 1);

(Ⅱ)由子系统零解的渐近稳定性得到大系统零解是不稳定的(如例 2);

(Ⅲ)由子系统零解的不稳定性，得到大系统零解是渐近稳定的(如例 3);

(Ⅳ)由子系统零解的不稳定性，得到大系统零解的不稳定性(如例 4).

由以上四种情况，秦元勋首次提出了大型动力系统的稳定性分解概念为:

(1)由子系统零解的稳定性，代替等于大系统的稳定性(如(Ⅰ)、(Ⅳ));

(2)由部份子系统为稳定，部份为不稳定，如何通过选取参数推出整个大系统为稳定(如(Ⅲ)).

国际上在七年之后，Bailey[5] 于1966年提出了类似的稳定性分解概念.

如何将秦元勋提出的大型动力系统的稳定性分解概念运用于一般数学理论与解决工程实际的问题呢?

王慕秋于1959年首次从一般线性定常系统的特征根具有负实部的判定条件，路斯-霍维茨主子行列式入手，给出了线性微分方程组的稳定性分解[3][4].

在工程技术中常常需要确定非线系统的稳定域. 1959年结合三峡升船机的电力拖动控制系统科研任务，刘永清[6]提出从两个五阶(及两个二阶)的联立的非线性系统的稳定域的估计. 化为两个孤立的低维子系统的稳定性问题加以解决. 即分别作出了孤立

子系统的李雅普诺夫函数及其稳定性，并以子系统的李雅普诺夫函数和式，作为两个联立的五阶（及两个二阶）的非线性微分方程组的标量李雅普诺夫函数. 在限定子系统互相联接项的界限后，从而给出了两个联立五阶（及二阶）非线性系统的稳定性.

这种做法后来刘永清定义为李雅普诺夫函数的分解法，即标量和的李雅普诺夫函数法. 并在1962年将此法应用于疏松桂、范鸣世提出的同步随动控制系统中去[7][8]；而在1964年将此法应用到一般定常大系统的稳定性分解上来[9].

国外在1970年由 Thompson[10] 也提出了类似的标量李雅普诺夫函数法.

以下我们将以秦元勋提出的大型动力系统稳定性分解概念为基础，结合大系统分解的两个原则：物理分解和数学分解，分别以简单的例子说明李雅普诺夫函数分解法的意义与建立过程.

§2 李雅普诺夫函数分解法

今考虑最简单的二维复合线性定常系统

$$\dot{x}_1=-a_{11}x_1+a_{12}x_2 \qquad \dot{x}_2=a_{21}x_1-a_{22}x_2 \tag{1.4}$$

与它的两个孤立系统

$$\dot{x}_1=-a_{11}x_1 \qquad \dot{x}_2=-a_{22}x_2 \tag{1.5}$$

例 5 若 $a_{11}>0$，$a_{22}>0$，做子系统(1.5)的李雅普诺夫函数 $V_i=x_i^2\,(i=1,2)$. 由 V_i 沿(1.5)的轨线对 t 求导数有

$\dot{V}_i=2x_i\dot{x}_i=-2a_{ii}x_i^2<0\,(i=1,\ 2)$，即子系统(1.5)的零解是渐近稳定的，取 $E_1=\max[|a_{12}|,|a_{21}|]$.

以两个子系统(1.5)的李雅普诺夫函数和式

$$V=V_1+V_2=x_1^2+x_2^2 \tag{1.6}$$

作为复合系统(1.4)的李雅普诺夫函数，由 V 沿(1.4)的轨线对 t 求导数有：

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(1.4)}&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-a_{11}x_1+a_{12}x_2)+2x_2(a_{21}x_1-a_{22}x_2)\\&\leqq-2(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2)+2|a_{12}||x_1||x_2|+2|a_{21}||x_1||x_2|\\&\leqq-2(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2)+2E_1(x_1^2+x_2^2)\end{aligned}$$

当 $E_1<\Delta_1=\min[|a_{11}|,|a_{22}|]$

时，有 $\dot{V}_{(1.4)}<0$，

从而得到复合系统(1.4)的零解也是渐近稳定的.

例 6 若 $a_{11}<0$，$a_{22}<0$，子系统(1.5)的零解是不稳定的由 $V=x_1^2+x_2^2$，类似以上的计算得到

$$\dot{V}_{(1.4)}\geqq2(-a_{11}x_1^2-a_{22}x_2^2)-2E_1(x_1^2+x_2^2)$$

当 $E_1<\Delta_1=\min[|a_{11}|,|a_{22}|]$时，有 $\dot{V}_{(1.4)}>0$，从而得到复合系统(1.4)的零解是不稳定的.

总结以上李雅普诺夫函数分解法，对一般的大系统

$$\dot{x}=f(t,x)+g(t,x)=h(t,x) \tag{A}$$

假定它可分解为 m 个相互关联的子系统为

$$\dot{x}_i=f_i(t,x_i)+g_i(t,x) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag*{$(A)_1$}$$

及其孤立子系统

$$\dot{x}_i=f_i(t,x_i) \qquad (i=1,2,\ \cdots,m) \tag{B}$$

其中 $g_i(t,x)$ 为子系统相互联接项. 关于大系统(A)的稳定性分解问题，一般是按下述三个步骤进行:

步骤(Ⅰ) 分析孤立子系统. 由子系统(B)的一个李雅普诺夫函数 $V_i(t,\ x_i)$求得 $\dot{V}_{i(B)}$的一个表达式的界限;

如例 5， $V_i=x_i^2>0 \qquad \dot{V}_i=-2a_{ii}x_i^2<0 \qquad (i=1,2)$.

步骤(Ⅱ) 分析子系统的相互联接项，求得 $g_i(t,x)$的一个表达式的界限;

如例 5，子系统之间互相联接项界限为

$2|a_{12}||x_1||x_2|+2|a_{21}||x_1||x_2|\leq 2E_1(x_1^2+x_2^2)$

步骤(Ⅲ) 由子系统零解的稳定性，组合起来化归为整体大系统的稳定性. 这只要限制子系统之间相互联项的界限就可以做到的.

如例 5 中，子系统之间相互联接项之界限为 E_1，限制 $E_1<\Delta_1=\min(|a_{11}|,|a_{12}|)$时，可由子系统(1.5)零解的渐近稳定性得到复合系统(1.4)零解的渐近稳定性.

再如在四点拖动的生产机械中，只有四台电机系统的线性微分方程为[11][12]

$$\begin{cases}\dot{x}=u \qquad \dot{u}=-au+K_1x+K_2y\\ \dot{y}=v \qquad \dot{v}=-av+K_3x+K_4y\end{cases} \tag{1.7}$$

它的子系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=u \qquad \dot{u}=-au+K_1x\\ \dot{y}=v \qquad \dot{v}=-av+K_4y\end{cases} \tag{1.8}$$

其中 K_2, K_3 是相当小的常数，而 K_1, K_4 是负实数，a 是正实数，令 $E_2=\max(|K_2|,|K_3|)$.

步骤(Ⅰ) 取子系统(1.8)的李雅普诺夫函数为

$$V_1(x,u)=|K_1|(x^2+u^2)+K_1^2x^2(-ax-u)^2 \quad \dot{V}_{1(1.8)}=-2a|K_1|(x^2+u^2)<0 \tag{1.9}$$

$$V_2(y,v)=|K_4|(y^2+v^2)+K_4^2y^2+(-ay-v)^2 \quad \dot{V}_{2(1.8)}=-2a|K_4|(y^2+v^2)<0 \tag{1.10}$$

即两个子系统零解是渐近稳定的.

步骤(Ⅱ) 取两个子系统的李雅普诺夫函数和式 $V=V_1(x,u)+V_2(y,v)$ 作为复合系统(1.7)的李雅普诺夫函数，对(1.7)且有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(1.7)}\leq \dot{V}_{(1.8)}&+2|K_2|(1+|K_1|)|y||u|+2|K_3|(1+|K_4|)|x||v|+\\ &+2a(|K_2|+|K_3|)|x||y|\end{aligned}$$

找出两个子系统之间相互联接项的界限为

$2|K_2|(1+|K_1|)|y||u|+2|K_3|(1+|K_4|)|x||v|+2a(|K_2|+|K_3|)|x||y|$

$$\leq E_2(L+2a)(x^2+y^2)+LE_2(u^2+v^2)$$

步骤(Ⅲ) 将子系统(1.8)的零解的渐近稳定性组合起来，得到复合系统(1.7)零解的渐近稳定性. 这只要限定子系统之间相互联接项的界限 E_2 小于 Δ_2 即可，亦即

$$E_2<\Delta_2=\min\left\{\frac{2a|k_i|}{L+2a},\quad i=1,\ 4\right\}\text{时，}\quad \dot{V}_{(1.7)}<0$$

从而由子系统(1.8)的零解的渐近稳定性，得到复合系统(1.7)零解的渐近稳定性.

这三个步骤，刘永清定义为李雅普诺夫函数的分解法，即标量和的李雅普诺夫函数法.

从这里看到，我们为完成大型动力系统的稳定性分解，使子系统之间相互联接项的界限尽可能的小. 这是因为我们的方法是将子系统之间互相联接项作为扰动来进行估计的. 由此可知子系统之间相互联接的作用愈小，得到总体的大系统的稳定性的程度越高，而将大系统分解为易解的子系统时，也最小损害大系统的性质. 这种分解法完全适合于由相互弱联接的子系统组成的大系统.

李雅普诺夫函数分解法，不限于线性大系统的稳定性分解. 然而我们对如何分解非线性大系统的理解是肤浅的. 几乎所有有效的分解法都是针对线性大系统提出来的. 因而对非线性大系统的分解几乎全是根据大系统的外形和深入理解大系统的物理背景和物理结构而引入的. 以下为了说明李雅普诺夫函数分解法在非线性大系统的稳定性分解中是成功的和有效的. 为此我们引入由四台电机拖动的非线性控制系统[11][12]:

$$\begin{cases} \ddot{x}+a\dot{x}+2c[\sin x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}]-K_g x-K_h y+(f_1-f_4)=0 \\ \ddot{y}+a\dot{y}+2c[\sin y+2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}]-K'_g y-K'_h x+(f_2-f_3)=0 \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 a，c 为正常数，K_g，K_h，K'_g，K'_h 为较小的常数，f_1-f_4，f_2-f_3 是不同时为零的常数，由于常数项不为零，故 $x=\dot{x}=y=\dot{y}=0$ 不为奇点.

现在的问题是求过初值 $x(t_0)=\dot{x}(t_0)=\dot{y}(t_0)=y(t_0)=0$ 的运动稳定性. 由(1.11)可求得距初值最近之奇点 x_0，y_0，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$. 将(1.11)平移到奇点上去得到下列微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}=u \qquad \dot{u}=-au+K_1x+K_2y+F_1(x,y) \\ \dot{y}=v \qquad \dot{v}=-av+K_3x+K_4y+F_2(x,y) \end{cases} \tag{1.12}$$

它的线性方程是(1.7)式; $F_1(x,y)$，$F_2(x,y)$是 x，y 不低于 2 次的幂级数，详细表达式见第六章(6.5)(6.6)式.

设它的子系统为(1.8)式. 由(1.9)、(1.10)式表示的 $V_1(x,u)$，$V_2(y,v)$的和式:

$$V=V_1(x,u)+V_2(y,v)=|K_1|(x^2+u^2)+K_1^2x^2+(-ax-u)^2+|k_4|y^2$$
$$+(-ay-v)^2+|K_4|(y^2+v^2)$$

作为非线性复合系统(1.12)式的正定函数. 只要 $E_2<\Delta_3$ 时，可由子系统(1.8)的零解的渐近稳定性，得到非线性复合系统(1.12)零解的零解稳定性. 其稳定域为:

$$V(x,u,y.v)=V_1(x,u)+V_2(y,v)=M^2$$

其中 M 是适当选取的正数. 而

$$\Delta_3=\min\left\{\frac{2a|K_1|-2CMR(M)}{L+a},\ \frac{2a|K_1|}{L},\ \frac{2a|K_4|-2MR(M)}{L+a},\ \frac{2a|K_4|}{L}\right\}$$

$R=Hm(a+L)(3+\frac{5}{3}mM)$, 而 H,m 见第六章(6.12), (6.13)式.

对四点拖动, 四台电机的控制系统的一项工程设计, 若取参数为: $a=4.23$, $c=78$, $K_g=K'_g=0.24$, $K_h=K'_h=1.6$, $f_1-f_4=-34$, $f_2-f_3=0$. 得到距原点最近奇点为: $x_0=0.10$, $y_0\doteq5\times10^{-5}$, $u_0=v_0=0$, $\sin x_0=0.10$, $\cos x_0=0.99$, $\sin y_0\doteq0$, $\cos y_0\doteq1$, $K_1=K_4=-315$, $K_2=K_3=0.158$ 由格格朗日乘数法求得在域: $|x|\leq5$, $|y|\leq5$, $u,v\in(-\infty,\infty)$中闭曲面 $V=V_1(x,u)+V_2(y,v)=M^2$

上距原点之最大值为: $x_1=0.0023M$, $u_1=5\times10^{-5}M$, $y_1=0.0023M$, $v_1=5\times10^{-5}M$ 而 $E=0.158$. 只要选取 $M=500$, 就有

$$E<\Delta_4=\frac{2664.9-0.979M-0.0076M^2}{320}=0.85 \tag{1.13}$$

成立, 就有 $\dot{V}_{\substack{(1.12)\\ v=(500)^2}}<0$. 非线性复合系统(1.12)的零解是渐近稳定的.

(1.12)的分解系数参数稳定域为: $0<E<\Delta_4=0.85$ (1.14)

(1.12)的李雅普诺夫函数稳定域为:

$$V(x,u,y,v)=315(x^2+y^2)+(315)^2x^2+(-4.23-u)^2+315(y^2+v^2)+(315)^2y^2$$
$$+(-4.23y-v)^2=500^2$$

或
$$\frac{1}{315}(x^2+u^2)+x^2+\frac{1}{(315)^2}(-4.23x-u)^2+\frac{1}{315}(y^2+v^2)+y^2+\frac{1}{(315)^2}$$
$$(-4.23y-v)^2=2.54 \tag{1.15}$$

这个闭曲面完全被包含在域 G_1 中. 以 $u=v=0$ 之平面割去四维空间的三维闭曲面, 得到在 x, y 平面的上稳定域为一条近似于半径 $k=\sqrt{2.51}$ 的圆:

$$x^2+y^2=\frac{250000}{99558}=2.51 \tag{1.16}$$

显然过初值点 P: $x_0=0.1$, $y_0=5\times10^{-5}$, $u_0=v_0=0$ 之运动落在此稳定域中.

从这项工程设计中, 可以看到李雅普诺夫函数分解法对解决非线性大系统在稳定性分解中的有效性.

§3 李雅普诺夫函数分解法的进一步扩展——"分解等价法"[13][14]

今考虑由线性微分差分方程组描述的具有滞后的定常线性复合系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=c_{11}x_1(t)+b_{11}x_1(t-\tau_{11})+c_{12}x_2(t)+b_{12}x_2(t-\tau_{12})\\ \dot{x}_2(t)=c_{21}x_1(t)+b_{21}x_1(t-\tau_{21})+c_{22}x_2(t)+b_{22}x_2(t-\tau_{22})\end{cases} \tag{1.17}$$

与线性微分方程组描述的定常线性复合系统:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t)=(c_{11}+b_{11})x_1(t)+(c_{12}+b_{12})x_2(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t) \\
\dot{x}_2(t)=(c_{21}+b_{21})x_1(t)+(c_{22}+b_{22})x_2(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)
\end{cases}
\tag{1.18}
$$

(1.17)、(1.18)的两个孤立子系统:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t)=(c_{11}+b_{11})x_1(t)=a_{11}x_1(t) \\
\dot{x}_2(t)=(c_{22}+b_{22})x_2(t)=a_{22}x_2(t)
\end{cases}
\tag{1.19}
$$

(1.17)的特征方程为

$$
D(\lambda,\tau_{ij})=\begin{vmatrix} c_{11}+b_{11}e^{-\lambda\tau_{11}}-\lambda & c_{12}+b_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} \\ c_{21}+b_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & c_{22}+b_{22}e^{-\lambda\tau_{22}}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{1.20}
$$

(1.18)的特征方程为

$$
D(\lambda,0)=\begin{vmatrix} c_{11}+b_{11}-\lambda & c_{12}+b_{12} \\ c_{21}+b_{21} & c_{22}+b_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{1.21}
$$

$$
a=-(c_{11}+b_{11}+c_{22}+b_{22})=-(a_{11}+a_{22}),
$$

$$
b=\begin{vmatrix} c_{11}+b_{11} & c_{12}+b_{12} \\ c_{21}+b_{21} & c_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.22}
$$

其中 $a_{ij}=c_{ij}+b_{ij}$，$(i,j=1,2)$，$A=\max[|c_{ij}|,\ |b_{ij}|,\ i,j=1,2]$，

$\tau=\max[\tau_{ij}\geq 0,\ i,j=1,2]$.

早在1957年至1960年间秦元勋、刘永清、王联[12]就系统研究在稳定性理论中微分与微分差方程方程的等价性. 只要对滞后的界限有一定的限制就可以从微分方程组零解的稳定性代替等于相应的微分差分方程组零解的稳定性. 今以 $n=2$ 时，微分差分方程组(1.17)与微分方程组(1.18)来说明如下:

(Ⅰ)当 $a>0$，$b>0$时，线性常系数微分方程组(1.18)的特征方程都具负实部，存在$\Delta_5>0$

$$
\Delta_5=\frac{1}{7000}\sqrt{\min\left[\frac{b^2}{A^4},\ \frac{ba^2}{A^4}\right]}\cdot\frac{1}{A} \tag{1.23}
$$

当$0\leq\tau<\Delta_5$时，微分差分方程组(1.17)的特征超越方程(1.20)的特征根都具有负实部. 亦即设 $a>0$，$b>0$ 当$0\leq\tau<\Delta_5$时，由微分方程组(1.18)零解的渐近稳定性，得到线性微分差分方程组(1.17)零解的渐近稳定性.

(Ⅱ)若 $a>0$，$b<0$，线性微分方程组(1.18)的特征方程(1.21)有一个正实根. 存在$\Delta_6>0$

$$
\Delta_6=\frac{1}{23000}\sqrt{\min\left[\frac{a^4}{A^4},\ \frac{b^2}{A^4}\right]}\cdot\frac{1}{A} \tag{1.24}
$$

当 $0\leq\tau<\Delta_6$时，微分差分方程组的特征超越方程(1.20)至少存在一个正实部之根. 亦即设 $a>0$，$b>0$ 当 $0\leq\tau<\Delta_6$ 时，由微分方程组(1.18)零解的不稳定性，得到微分差分方程组(1.17)零解的不稳定性.

由例 1 —例 4 ，我们已知由微分方程(1.19)描述的线性定常子系统和曲线性微分方程组(1.18)描述的线性定常复合系统在稳定性之间存在四种关系.

若取(1.19)式为具有滞后的线性复合系统(1.17)的子系统. 如果我们把限制子系统(1.19)的相互联接项界限的李雅普诺夫函数法，与限制滞后界限的微分方程和微分差分方程在稳定性理论中等价性的方法结合起来，就可以同时由限制子系统之间相互联接项的界限与限制滞后界限，得到由线性子系统(1.19)零解的稳定性问题，进而得到具有滞后的复合系统(1.17)的零解的稳定性问题. 这种做法，我们称为李雅普诺夫函数分解法的扩展. 现结合(1.17)～(1.19)叙述如下:

(Ⅰ)若 $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, 线性定常子系统(1.19)的零解是渐近稳定的. 由例 1 及(1.23)式，存在$\nabla_1>0$, $\Delta_5>0$, 使当

$$E_1<\nabla_1 \qquad 0\leq\tau<\Delta_5 \tag{1.25}$$

时，则具滞后的线性定常复合系统(1.17)的零解也是渐近稳定的.

(Ⅱ)若 $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, 子系统(1.19)的零解是渐近稳定的. 由例 2 取 $a_{12}a_{21}>0$ 及(1.24)式存在$\nabla_1>0$, $\Delta_6>0$ 使当

$$E_2>\nabla_1 \qquad 0\leq\tau<\Delta_6 \tag{1.26}$$

时，则具有滞后的线性定常复合系统(1.17)的零解是不稳定的.

(Ⅲ)若 $a_{11}>0$, $a_{22}<0$(或 $a_{11}<0$, $a_{22}>0$), 子系统(1.19)的零解是不稳定的. 由例 3，若取 $a_{11}+a_{22}<0$, $a_{12}\cdot a_{21}<0$ 及(1.23)式，存在$\nabla_1>0$, $\Delta_5>0$, 使当

$$E_2>\nabla_1 \qquad 0\leq\tau<\Delta_5 \tag{1.27}$$

时，则具有滞后的线性定常复合系统(1.17)的零解是渐近稳定的.

(Ⅳ)若 $a_{11}>0$, $a_{22}<0$(或 $a_{11}<0$, $a_{22}>0$), 子系统(1.19)的零解是不稳定的. 由例 4，当 $a_{11}+a_{22}>0$及(1.24)式，存在$\Delta_6>0$, 使当

$$0\leq\tau<\Delta_6 \tag{1.24}$$

时，则具有滞后的线性定常复合系统(1.17)的零解也是不稳定的.

由以上四种情况，说明了由李雅普诺夫函数分解法与微分方程和微分差分方程在稳定性理论中等价性的方法相结合的“分解等价法”，就可以得到由线性常系数微分方程组(1.19)所描述的线性定常子系统，以及由微分差分方程组所描述的具有滞后的线性定常复合系统(1.17)，在稳定性之间的关系也有以下四种情况:

(Ⅰ)由线性定常子系统的渐近稳定性，得到具有滞后的大系统的渐近稳定性;

(Ⅱ)由线性定常子系统的渐近稳定性，得到具有滞后的大系统的不稳定性;

(Ⅲ)由线性定常子系统的不稳定性，得到具有滞后的大系统的渐近稳定性;

(Ⅳ)由线性定常子系统的不稳定性，得到具有滞后的大系统的不稳定性.

从而将秦元勋提出的大型动力系统的稳定性分解概念推广到具有滞后的大型动力系统的稳定性分解中来. 一般研究结果我们将在第三章、第四章中分别论述.

§4　李雅普诺夫函数分解法的参数稳定域与大系统参数稳定域的最优问题

在这节中，我们叙述李雅普诺夫函数分解法中分解参数的稳定域的几何解释[3][4]与大系统参数稳定域的最优问题.

仅就二维系统来说，$E=\max[|a_{12}|, |a_{21}|]$, $\Delta=\sqrt{a_{11}a_{22}}>0$. 当 $E<\Delta$时，由

线性定常子系统(1.2)零解的渐近稳定性得到线性定常复合系统(1.1)零解的渐近稳定性.

上述条件指出，在参数 a_{12}，a_{21} 的平面上，作出以原点为中心，边长为 $\Delta=\sqrt{a_{11}a_{22}}$ 的正方形，如图1-1.

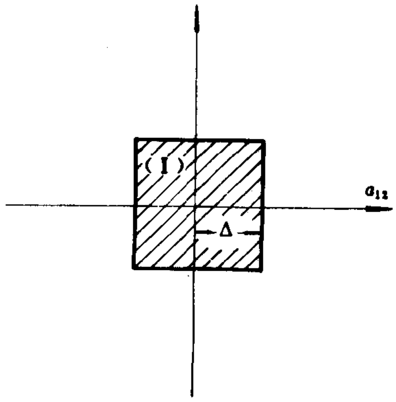

图1-1

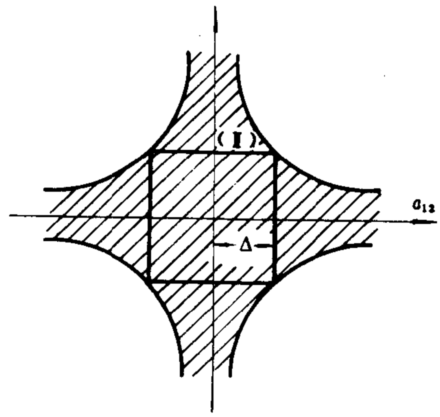

图1-2

只要线性定常复合系统(1.1)的参数 a_{12}，a_{21} 取在此正方形中，可由线性定常孤立子系统(1.2)的零解的渐近稳定性得到线性定常复合系统(1.1)零解的渐近稳定性. 我们称由 Δ定出的区域(Ⅰ)为复合系统互联分解系数的参数稳定域.

利用向量李雅普诺夫函数法可进一步扩大了大系统分解系数的参数稳定域，王慕秋[3][4]给出了详细的说明.

就 $n=2$来说，应用向量李雅普诺夫函数法给出线性定常复合系统(1.1)的分解系数的参数稳定域之扩大过程是这样的：首先做出它的二个孤立子系统(1.2)的李雅普诺夫函数，然后通过对孤立子系统(1.2)相互之间联接项的估计，得出李雅普诺夫函数分量 V_i 的二阶线性常系数辅助方程组；最后由辅助方程组零解的渐近稳定性，可以推出线性定常复合系统(1.1)零解的渐近稳定性. 由确定辅助方程组零解渐近稳定性的条件，也就给出了保证原线性定常复合系统(1.1)的渐近稳定时，复合系统(1.1)分解系数的参数稳定域. 由第二章(2.25)式知，只要满足

$$a_{12}^2a_{21}^2<a_{11}^2a_{22}^2$$

时，可由线性定常子系统(1.2)的零解的渐近稳定性，得到线性定常复合系统(1.1)的零解的渐近稳定性.

在 a_{12}，a_{21} 参数平面上，不等式 $a_{12}^2a_{21}^2<a_{11}^2a_{22}^2$ 表示由双曲线 $a_{12}a_{21}=\Delta$($\Delta=\sqrt{a_{11}\,a_{22}}$，当 $a_{12}a_{21}>0$时)及 $a_{12}a_{21}=-\Delta$(当 $a_{12}a_{21}<0$时)所限定的区域(Ⅱ)(如图1-2所示)，为复合系统(1.1)分解系数的参数稳定域. 如果复合系统(1.1)的参数 a_{12}，a_{12} 在域(Ⅱ)中取值，则可由子系统(1.2)的零解的渐近稳定性，得到复合系数(1.1)零解的渐近稳定性. 显然区域(Ⅱ)包含了区域(Ⅰ). 这说明向量李雅普诺夫函数法比标量李雅普诺夫法(李雅普诺夫函数分解法)扩大了分解系数的参数稳定域.

在王幕秋给出了稳定性参数域之扩大后[3]、[4]，许多作者利用向量李雅普诺夫函数法给出了有创见的工作[15]～[33]，并扩大了参数稳定域.

1985年钱正英[34]对滞后定常线性大系统的参数稳定域也得到了类似王幕秋的上述