现代数学译丛

局部类域论

岩泽健吉 著

科学出版社

现代数学译丛

局部类域论

岩泽健吉 著

冯克勤 译

科学出版社

1986

内 容 简 介

局部类域论是研究局部域 Abel 扩张的理论，是代数数论的一个重要组成部分．本书前三章介绍了完备域特别是局部域的一般理论．第四章以最大不分歧扩张为中心叙述了局部域无限扩张的理论．第五、六章为本书的核心，介绍局部类域论的主要结果．第七章是形式群在局部类域论中的应用． 第八章考查了一个典型例子：局部分圆域． 在附录中扼要叙述了 Brauer 群和上同调方法． 本书以初等方法和不大的篇幅叙述了局部类域论的基本内容，成为学习这一理论的一本极好的入门书．本书的英、俄译本均已出版．

本书可作为代数专业研究生的教材，是从事代数学（特别是代数数论）的研究人员和教学人员的有益参考书．

岩澤健吉
局 所 類 体 論
岩波書店， 1980

现代数学译丛
局部类域论
岩泽健吉 著
冯克勤 译
责任编辑 杜小杨
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1986年8月第一版 开本：850×1168 1/32
1986年8月第一次印刷 印张：5 1/2
印数：0001—3,000 字数：142,000

统一书号：13031·3256
本社书号：4942·13—1
定价：1.60 元

前　　言

大家知道，Hilbert-高木-Artin 所发展的类域论（Klassenkörpertheorie）是关于代数数域和代数函数域的代数扩张、特别是 Abel 扩张的理论，而局部类域论则是关于局部域扩张的同样的理论。本书是从初等的观点讲述局部类域论的一般性入门书。

关于局部类域论，无论是以它的理论自身为主题，还是作为整体类域论的一部分，目前在日本和其他国家都有不少优秀的著作。对于前一种例如可以举出 Artin [1]和 Serre [11]，而后一种则有 Cassels-Fröhlich [3]，彌永[7]，河田[8]，Weil [14] 等。这一理论有许多基本定理。本书在讲述这一理论的时候，固然仍以证明这些定理作为主要目标，但是通往这一目标的途径，即在证明方法上却与以往著作有许多相异之处。现说明如下。

历史上，局部类域论是由原来的整体类域论派生出来的。所以起初前者的主要结果均可由后一理论推导出来。但是随后出现了独立地构造局部类域论自身的方法（十九世纪三十年代），从而将局部类域论应用到整体类域论的证明之中。后来从 1950 年前后，开始了以 Hochschild 和中山为先驱的研究工作，伴随着群的上同调理论的发展，从更加广泛而透彻的观点给出局部类域论的证明。前面所例举的著作几乎全是用了上同调方法（但是仔细说来，Weil [14]是建立在结合代数理论的基础上，然而从结合代数中也可以看到上同调理论的来源）。直到最近，荷兰数学家 M. Hazewinkel[6] 发表了不用上同调群构作局部类域论的新方法。概括地说，如果把上同调方法看作是代数的乃至是群论的方法，那末新的方法可以说成是数论的乃至是域论的方法。因此，采用这种新的方法，特别是对于初学这一理论的人来说，或许更易于理解局部类域论的数论内容。

本书主要是基于 Hazewinkel 的新构思来介绍局部类域论的概要．至于各章的内容，在每章开头都有一个概括的叙述，这里仅作一简单介绍．第一章至第三章对于完备域特别是局部域作了一般性的介绍，为后面几章作准备．第四章是局部域的基本理论，以最大不分歧扩张为主题讲述局部域的无限扩张．第五章和第六章是本书的核心与主要部分，在这里介绍 Hazewinkel 思想的一般化形式，由此证明局部类域论的主要结果．第七章介绍形式群在局部域上的应用，特别是用形式群给出存在定理的另一证明．最后在第八章，作为局部域的一个例子来考查局部分圆域，这一章的最后是证明关于范剩余符号的 Artin-Hasse 优美公式．

以上是本书的内容概要．作者在写作过程中以向读者传授知识作为主要目标，尽量避免运用对于局部类域论基本结果来说是多余的那些预备知识，虽然这样有时会走一些弯路． Hazewinkel 的方法正是以上述目的作为考虑的出发点．但是这样一来，本书中便没有机会接触到局部域上 Brauer 群理论． 所以另外又加了一个附录，对于 Brauer 群作一简单介绍，同时也介绍了一点上同调方法．即使对于同一个数学分支，为了对精密而深刻的理论本身有更好的理解，在许多场合都有必要研究各种不同的方法和观点．局部类域论与原来的整体类域论比较起来虽然简单一些，但是仍旧有上述的必要性．本书作为一本入门书，展示出局部类域论的一条通路．作者希望读者能以本书为出发点，然后从关于这一理论的其他著作中学习别的方法，进而把研究领域扩大到整体类域论中去．

如上所述，本书不需要很多预备知识．只需要代数学、拓扑空间理论和拓扑群论的一般性基础知识就可以理解本书的内容．此外，在叙述过程中还有一些引伸出来的话题，在这些地方读者可根据所列文献自行补足．引用的文献表附在书末．关于局部域和局部类域论的详细文献可见 Serre [11]．

著　者

1979 年 5 月

目　　录

第一章　完　备　域

作为准备，本章开始介绍关于完备正规赋值域的基本结果．但是对于一般的代数教科书（例如藤崎 [5]，van der Waerden [13] 等）中包含的一些事实，这里省略了证明．详情还请参考专门的赋值论书籍以及 Artin [1]，彌永[7]，Serre [11]等．

§1.1　赋　　值

定义在域 k 上的函数 $\nu(x)(x\in k)$，如果满足下列诸条件，便叫作 k 的(指数)赋值：

i) $\nu(0)=+\infty$；而当 $x\neq 0$ 时 $\nu(x)$ 是实数；

ii) 对于任意的 $x, y\in k$,

$$\min(\nu(x), \nu(y))\leqslant \nu(x+y);$$

iii) 对于任意的 $x, y\in k$,

$$\nu(x)+\nu(y)=\nu(xy).$$

由定义立即得出

$$\nu(\pm 1)=0;\ \nu(x)=\nu(-x);\ \nu(x)<\nu(y)\Rightarrow \nu(x+y)=\nu(x).$$

其中 $1=1_k$ 是 k 的单位元素．此外，如果令

$$\mathfrak{o}=\{x\in k\mid \nu(x)\geqslant 0\},$$

$$\mathfrak{p}=\{x\in k\mid \nu(x)>0\},$$

则 $\mathfrak{o}$ 是 k 的子环而 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{o}$ 的极大理想．从而

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$$

是域．$\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{f}$ 分别叫作 ν 的赋值环，极大理想和剩余类域．由定义中的 iii) 可知 ν 定义出从域 k 的乘法群 $k^\times$ 到实数加法群 $\boldsymbol{R}^+$ 中的同态

$$\nu: k^\times\to \boldsymbol{R}^+.$$

从而 $v(k^\times)$ 是 $\boldsymbol{R}^+$ 的子群,如果令

$$U = \mathrm{Ker}(v) = \{x \in k \mid v(x) = 0\},$$

则有自然同构

$$k^\times / U \cong v(k^\times),$$

我们把 U 叫作 v 的单位群.

设 v 为 k 的赋值. 对于任意正实数 $\alpha > 0$,定义

$$v'(x) = \alpha v(x), \quad x \in k,$$

则 v' 显然也是 k 的赋值. 当 k 的两个赋值 v 和 v' 满足这样的关系,即一个为另一个的正数倍时,我们写成

$$v \sim v',$$

并且称它们是等价的赋值. 等价的赋值具有相同的赋值环、极大理想和剩余类域,还有许多其他共同的性质.

设 k 和 v 如上所述,给了一个固定的实数 β, $0 < \beta < 1$,对于 k 中任意元素 x 和 y,令

$$\rho(x, y) = \beta^{v(x,y)},$$

ρ 定义出 k 上一个距离,由此 k 是距离空间, 从而也是 Hausdorff 拓扑空间. 取不同的 β 值,则对应的距离 ρ 是彼此等价的,所以 k 上由 ρ 给出的拓扑是不变的. 也就是说, 该拓扑由赋值 v 所唯一决定. 不难看出, k 对于这一拓扑是拓扑域. 如果 k 对于上述的距离 ρ 是完备距离空间的时候, 我们称 v 是 k 的完备赋值. 注意当 β 改变从而 ρ 改变时,其完备性是不变的. 此外,如果 $v \sim v'$, 则 v 和 v' 在 k 上定义出等价的距离,特别地,如果 v 是完备的, 则 v' 也是完备的.

继续设 v 是 k 的赋值. 如果 $\boldsymbol{R}^+$ 的子群 $v(k^\times)$ 是有理整数加法群,即

$$v(k^\times) = \boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\},$$

则将 v 叫作 k 的正规赋值. 这时取 k 中元素 π 使得

$$v(\pi) = 1,$$

这样的 π 叫作正规赋值 v 的素元. 对于一个确定的素元 π, 由于 $\mathfrak{p} = \{x \in k \mid v(x) \geq 1\}$, 从而得到

$$\mathfrak{p} = (\pi) = \mathfrak{o}\pi.$$

于是 $\mathfrak{p}$ 的方幂为

$$\mathfrak{p}^n = (\pi^n) = \mathfrak{o}\pi^n = \{x \in k \mid \nu(x) \geqslant n\}, \ n \geqslant 0.$$

由于 $\nu(x) \geqslant n$ 和 $\nu(x) > n - 1$ 是一回事，所以 $\mathfrak{p}^n (n \geqslant 0)$ 均是 k 的开(加法)子群．并且不难看出，对于由上述的 ν 所定义的 k 的拓扑，$\{\mathfrak{p}^n\}_{n\geqslant 0}$ 形成 0 的基本邻域系．也就是说，由 ν 决定的 k 的拓扑是 $\mathfrak{p}$-adic 拓扑．注意 $\mathfrak{p}^n$ 是 k 的开子群，从而也是闭子群．由于 $\mathfrak{p}^n = (\pi^n) \neq \{0\}$，所以拓扑域 k 是全不连通的，但不是离散的．

仍令 ν 为 k 的正规赋值，但是这次考虑 k 的乘法群 $k^\times$．由前述的同构 $k^\times/U \simeq \nu(k^\times) = \boldsymbol{Z}$ 可得

$$k^\times = \langle\pi\rangle \times U, \ \langle\pi\rangle \simeq \boldsymbol{Z}.$$

其中 $\langle\pi\rangle$ 是由素元 π 生成的 $k^\times$ 的子群．此外，若令

$$U_0 = U, \ U_n = 1 + \mathfrak{p}^n = 1 + \mathfrak{o}\pi^n, \ n \geqslant 1,$$

不难看出它们均是 $k^\times$ 的子群，并且

$$\cdots \subseteq U_{n+1} \subseteq U_n \subseteq \cdots \subseteq U_1 \subseteq U_0 = U \subseteq k^\times.$$

$k^\times$ 对于由 k 的 $\mathfrak{p}$-adic 拓扑所诱导的拓扑是 Abel 拓扑群，并且 U_n 均是它的开子群，而且由上述的内容可知 $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ 形成 $k^\times$ 中 1 的基本邻域系．进而，如果以 $\mathfrak{f}^+$ 和 $\mathfrak{f}^\times$ 分别表示剩余类域 $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的加法群和乘法群，则有

$$U_0/U_1 \simeq \mathfrak{f}^\times, \ U_n/U_{n-1} \simeq \mathfrak{f}^+, \ n \geqslant 1.$$

实际上不难看出，自然满同态 $\mathfrak{o} \to \mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 给出乘法群的满同态 $U = U_0 \to \mathfrak{f}^\times$，然后由此即得到 $U_0/U_1 \simeq \mathfrak{f}^\times$．而当 $n \geqslant 1$ 的时候，$U_n = 1 + \mathfrak{o}\pi^n$ 中的元素均可写成 $1 + x\pi^n$，$x \in \mathfrak{o}$，则由 $1 + x\pi^n \bmod U_{n+1} \longmapsto x \bmod \mathfrak{p}$ 即得出 $U_n/U_{n+1} \simeq \mathfrak{f}^+$．

§1.2 赋值的限制、扩充和完备化

设 k' 是 k 的任意扩域而 μ 为 k' 的赋值，函数 μ 在子域 k 上的限制记成 $\mu|k$，它显然是 k 的赋值，叫作 μ 在子域 k 上的**限制**．另

一方面，对于 k 的赋值 ν 如果存在 k' 上的赋值 μ 使得

$$\mu|k=\nu,$$

则 μ 叫作 ν 到扩域 k' 的扩充. 对于 k' 上的赋值 μ，它的限制 $\mu|k$ 是唯一确定的. 反过来，给了 k 的赋值 ν，是否存在 ν 到 k' 上的扩充 μ，并且若存在是否唯一，这是赋值论的一个重要问题.

如上令 $\mu|k=\nu$. 由 ν 给出的 k 的拓扑显然是由 μ 所给出的 k' 的拓扑所诱导出来的. 也就是说，作为拓扑域，k 是 k' 的子域. 设 μ 的赋值环、极大理想和剩余类域分别为

$$\mathfrak{o}'=\{x'\in k'|\mu(x')\geqslant 0\},$$
$$\mathfrak{p}'=\{x'\in k'|\mu(x')>0\},$$
$$\mathfrak{f}'=\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}',$$

则由定义立刻知道

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{o}\cap\mathfrak{p}'.$$

因而

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}=\mathfrak{o}/\mathfrak{o}\cap\mathfrak{p}'=(\mathfrak{o}+\mathfrak{p}')/\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'=\mathfrak{f}'.$$

也就是说，可以把 k 的剩余类域 $\mathfrak{f}$ 自然地看成是 k' 的剩余类域 $\mathfrak{f}'$ 的子域. 另一方面，由 $\mu|k=\nu$ 知道

$$\nu(k^\times)\subseteq\mu(k'^\times)\subseteq\boldsymbol{R}^+.$$

定义群指数和域的扩张次数分别为

$$e=[\mu(k'^\times):\nu(k^\times)],\ f=[\mathfrak{f}':\mathfrak{f}].$$

其中 e,f 为自然数 1, 2, 3, …, 或者是 $+\infty$. 我们将

$$e=e(\mu/\nu),\ f=f(\mu/\nu)$$

叫作 μ/ν 的分歧指数和剩余类次数.

作为赋值扩充的一个例子，我们来叙述关于完备化的熟知结果[1]. 设给了域 k 的赋值 ν，则存在 k 的扩域 k' 以及 ν 到 k' 上的扩充 μ 满足如下两个条件：1) μ 是 k' 的完备赋值；2)对于由 μ 决定的 k' 的拓扑，k 是 k' 的稠子集. 这样的 k'，或者更确切地说，由

1) 关于完备化的一般理论可参见藤崎[5]第六章，或者 v. d. Waerden [13]，第十章.

k' 和 μ 组成的 (k', μ) 叫作 k 的赋值 ν 的**完备化**. 如果 (k',μ)和 (k'', ω)均是 ν 的完备化,则存在 k-同构 $\sigma: k' \xrightarrow{\sim} k''$ 使得 $\mu = \omega\circ\sigma$. 因此,完备化本质上是唯一确定的. 此外,对于 k' 中任意元素 x', 由2)可知存在 $x_n \in k$, 使得 $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 从而

$$\mu(x') = \lim_{n\to\infty} \nu(x_n).$$

由此即知

$$e(\mu/\nu) = f(\mu/\nu) = 1.$$

也就是说

$$\nu(k^\times) = \mu(k'^\times),\ \mathfrak{f}' = \mathfrak{f}.$$

完备化的重要性在于,完备赋值具有许多(一般赋值不具备的)特别的性质. 例如下面所述的著名的 Hensel 引理成立[1].

引理 1 假设 ν 是域 k 的完备赋值, $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 是 k 的剩余类域. $f(X)$, $g_0(X)$ 和 $h_0(X)$ 均是多项式环 $\mathfrak{o}[X]$ 中的多项式, 并且满足

$$f(X) \equiv g_0(X)h_0(X) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}.$$

如果 $g_0(X) \bmod \mathfrak{p}$ 和 $h_0(X) \bmod \mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{f}[X]$ 中互素的多项式, 则存在 $\mathfrak{o}[X]$ 中的多项式 $g(X)$ 和 $h(X)$ 满足下列条件:

$f(X) = g(X)h(X)$, $g(X) \equiv g_0(X) \bmod \mathfrak{p}$, $h(X) \equiv h_0(X) \bmod \mathfrak{p}$, 并且 $g(X)$ 的次数等于 $g_0(X) \bmod \mathfrak{p}$ 的次数.

上面的 Hensel 引理是赋值论的基本工具,它有许多应用, 下面的引理便是其中之一.

引理 2 假设 k' 是 k 的代数扩域, 则 k 的完备赋值 ν 可以唯一地扩充成 k' 上的赋值. 又如果 k'/k 是有限扩张,则 μ 也是完备赋值. 又若 $n = [k':k]$, 并以 $N_{k'/k}$ 表示 k'/k 的范,则对 k'中任意元素 x' 均有

$$\mu(x') = \frac{1}{n}\, \nu(N_{k'/k}(x')).$$

引理 3 设 k'/k, ν 和 μ 如引理 2 所述, 又设 σ 是 k' 的 k-自

1) 关于引理 1 和 2 的证明参见第 4 页脚注1)中的文献.

同构，则 $\mu\circ\sigma=\mu$，即

$$\mu(\sigma(x'))=\mu(x'),\ \ x'\in k'.$$

从而 $\sigma: k'\simeq k'$ 对于由 μ 定义的拓扑是 k' 的拓扑自同构. 此外，若以 $\mathfrak{k}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{k}'=\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ 分别表示 ν 和 μ 的剩余类域，则

$$\sigma(\mathfrak{o}')=\mathfrak{o}',\ \ \sigma(\mathfrak{p}')=\mathfrak{p}'.$$

从而 σ 诱导出 $\mathfrak{k}'$ 的 $\mathfrak{k}$-自同构

$$\sigma':\mathfrak{k}'\simeq\mathfrak{k}'.$$

证明 令 $\mu'=\mu\circ\sigma$，易知 μ' 是 k' 的赋值. 对于 $x\in k$，则 $\mu'(x)=\mu(\sigma(x))=\mu(x)=\nu(x)$，即 μ' 也是 ν 到 k'上的扩充. 由引理 2 关于扩充的唯一性可知 $\mu'=\mu$，即 $\mu\circ\sigma=\mu$. 后一部分的论断是显然的.

引理 4 设 k'/k，ν，μ，$\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{o}'$ 如引理 3 所示，则 $\mathfrak{o}'$ 是 $\mathfrak{o}$ 在 $k_{\prime\prime}$ 中的整闭包. 又若 k'/k 是有限扩张，则迹映射和范映射

$$T_{k'/k},\ N_{k'/k}:\ k'\to k$$

对于由 ν 和 μ 所定义的拓扑均是连续映射.

证明 设 x' 为 k' 中任意元素，则 $k(x')/k$ 为有限扩张，从而对于前半部分的推断只需对 k'/k 是有限扩张的情形加以证明即可. 令 $[k':k]=n$ 而 Ω 是 k' 的代数闭包，则恰好存在 n 个 k-单同态 $k'\to\Omega$(重复的考虑在内)，设它们是 $\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n$，而对于 k' 中任意元素 x'，令

$$\prod_{i=1}^{n}(X-\sigma_i(x'))=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n,\ \ a_i\in k.$$

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 均是 $\sigma_1(x'),\cdots,\sigma_n(x')$的对称多项式. 特别地，

$$a_1=-\sum_{i=0}^{n}\sigma_i(x')=-T_{k'/k}(x'),$$

$$a_n=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(x')=(-1)^nN_{k'/k}(x').$$

每个 σ_i 都可以扩充成 Ω 的 k-自同构，又由引理 2 知道 μ 可以扩充成 Ω的赋值 μ'，而由引理 3 知道 σ_i 对于由 μ' 决定的拓扑是 Ω 的

拓扑自同构，从而由上面等式可知 $T_{k'/k}$ 和 $N_{k'/k}$ 均是连续映射．其次设 $x'\in\mathfrak{o}'$，即 $\mu(x')\geqslant 0$，则由引理 3 可知

$$\mu'(\sigma_i(x'))=\mu'(x')=\mu(x')\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

从而 $\nu(a_i)=\mu'(a_i)\geqslant 0$，即 $a_i\in\mathfrak{o}$，$1\leqslant i\leqslant n$．因此 x' 对于 $\mathfrak{o}$ 是整元，反之，假设 x' 对于 $\mathfrak{o}$ 是整元，则有

$$x'^m+b_1x'^{m-1}+\cdots+b_m=0,\ b_i\in\mathfrak{o},$$

于是 $\mu(b_i)=\nu(b_i)\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant m)$，从而 $\mu(x')\geqslant 0$，即得到 $x'\in\mathfrak{o}$．

从上面的引理 4 可知，赋值环 $\mathfrak{o}$ 在 k 中是整闭的．此外根据上面的证明知道，如果 $x'\in\mathfrak{p}'$，则 $\mu'(\sigma_i(x'))=\mu'(x')>0$，从而得到

$$\nu(a_i)=\mu'(a_i)>0,\ 即\ a_i\in\mathfrak{p}\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

特别地，

$$T_{k'/k}(\mathfrak{p}'),\ N_{k'/k}(\mathfrak{p}')\subseteq\mathfrak{p}.$$

§1.3 完 备 域

通常在习惯上把具有完备赋值 ν 的域 k 叫作完备域．而在本书中为方便起见，今后则只限于对 ν 是完备正规赋值的情形，称域 k 是(具有赋值 ν 的)完备域．更确切地，对于一个完备域，应当将域 k 和其上的完备正规赋值 ν 放在一起而表示成 (k,ν)．在 §1.1 中对于赋值 ν 所定义的 $\mathfrak{o}$，$\mathfrak{p}$，$\mathfrak{f}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$，$U$ 等分别叫作完备域 (k,ν) 的或者简称作 k 的赋值环，极大理想，剩余类域和单位群．此外，正规赋值 ν 的素元 π 也叫作 k 的素元．

设 ν 是域 k 的任意正规赋值，(k',ν') 是 k 中赋值 ν 的完备化，则由上节可知 $\nu'(k'^{\times})=\nu(k^{\times})=\boldsymbol{Z}$，从而 ν' 是完备的正规赋值，因而 (k',ν') 是完备域．由此可以得到许多完备域的自然例子．

例 1 设 p 为任意素数，ν 是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上熟知的 p-adic 赋值，则 $\boldsymbol{Q}$ 对于 ν 的完备化即是 p-adic 数域 $\boldsymbol{Q}_p$．由于 ν 是正规赋

值，从上面的注记可知 $\boldsymbol{Q}_p$ 是完备域. $\boldsymbol{Q}_p$ 的赋值环为 p-adic 整数环 $\boldsymbol{Z}_p$，极大理想是 $p\boldsymbol{Z}_p$，从而剩余类域为 $\boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$，即是由 p 个元素组成的有限域 $\boldsymbol{F}_p$.

例2 设 F 是任意域. 令 $F((X))$ 为所有系数属于 F 并且至多有有限个负幂项的形式幂级数

$$\sum_{-\infty\ll n} a_nX^n,\quad a_n\in F$$

所组成的集合，则 $F((X))$ 是 F 的扩域. 设 a_{n_0} 是上面幂级数中第一个不是 0 的系数，定义

$$\nu\left(\sum_{-\infty\ll n} a_nX^n\right)=n_0$$

(而令 $\nu(0)=+\infty$)，则 ν 是 $F((X))$ 的完备正规赋值. (读者自行证明 ν 实际上是完备的.) 从而 $(F((X)),\nu)$ 是完备域. $F((X))$ 的赋值环为整幂级数全体 $F[[X]]$，极大理想是 $(X)=XF[[X]]$，从而剩余类域为 $F[[X]]/XF[[X]]=F$. $F((X))$ 包含有理函数域 $F(X)$. ν 的限制 $\nu|F(X)$ 是 $F(X)$ 的正规赋值，它是由多项式环 $F[X]$ 的素理想 $XF(X)$ 所定义的(就象 $\boldsymbol{Q}$ 上的 p-adic 赋值一样). 从而 $(F((X)),\nu)$ 不过是 $F(X)$ 对于 $\nu|F(X)$ 的完备化.

设 (k,ν) 是任意完备域，取 A 为它的剩余类域 $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{o}$ 中的完全代表系，即 A 是 $\mathfrak{o}$ 的一个子集合，使得 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 中每个剩余类在 A 中恰好有一个代表元. 并且取 k 中零元素 0 作为 $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 中零元素即 $\mathfrak{p}$ 的代表元. 令 π 为 k 中素元，由于 ν 是完备的，从而形如

$$\sum_{-\infty\ll n} a_n\pi^n,\quad a_n\in A$$

的每个级数对于 p-adic 拓扑在 k 内都是收敛的，即给出 k 中一个元素 x. 如果令 a_{n_0} 是上面级数中第一个不为 0 的系数，则 $a_{n_0}\in\mathfrak{o}$, $a_{n_0}\notin\mathfrak{p}$，于是 $\nu(a_{n_0})=0$，由此不难得到

$$\nu(x)=n_0.$$

定理 1（展开定理） 设 A 和 π 如上所述，则 k 中每个元素 x 均可以唯一地表示成以下形式：

$$x = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^n, \quad a_n \in A.$$

特别地，

$$\mathfrak{o} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \,\middle|\, a_n \in A \right\}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi^n \,\middle|\, a_n \in A \right\}.$$

证明 设 $x \neq 0$，$\nu(x) = n_0$，则 $\nu(\pi^{-n_0} x) = 0$，因此只需对于 $\nu(x) = 0$ 的情形证明定理即可。假设 $x \in \mathfrak{o}$，则存在 $a_0 \in A$ 使得 $x \equiv a_0 \bmod \mathfrak{p}$。由于 $x \notin \mathfrak{p}$ 从而 $a_0 \neq 0$。由 $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\pi$ 可知 $x = a_0 + x'\pi$，$x' \in \mathfrak{o}$。于是 $x' \equiv a_1 \bmod \mathfrak{p}$，$a_1 \in A$，从而 $x \equiv a_0 + a_1\pi \bmod \mathfrak{p}^2$。同样由 $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{o}\pi^2$ 可知 $x = a_0 + a_1\pi + x''\pi^2, x'' \in \mathfrak{o}$，从而 $x = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 \bmod \mathfrak{p}^3$。由此决定出 A 中元素 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，显然 $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$。从上面的证明过程不难看出 a_n 的唯一性（参见下面系的证明）。此外由上面的公式 $\nu(x) = n_0$ 即给出关于 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{p}$ 的等式。

系 集合 A 赋以离散拓扑，并且将可数个 A 的积集合

$$A^\infty = \{(a_0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_n \in A\}$$

赋以积拓扑，则映射

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$$

定义出从拓扑空间 A^∞ 到 $\mathfrak{o}$ 的一个同胚。

证明 设 $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$，$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \pi^n$，$a_n, b_n \in A$，则对于任意的 $i \geqslant 1$，用数学归纳法不难证明

$$x \equiv y \bmod \mathfrak{p}^i \Longleftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \cdots,\ a_{i-1} = b_{i-1}.$$

从而由积拓扑的定义即可证明该系的论断。

注记 一般地对于每个整数 n，均确定 k 中一个元素 π_n 满足

$\nu(\pi_n) = n$，则可以象定理 1 一样地证明，k 中任意元素 x 均可以唯一地表示成如下形式

$$x = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi_n, \quad a_n \in A.$$

而定理 1 则是 $\pi_n = \pi^n$ 这一特殊情形.

现在考查完备域的有限扩域.

定理 2 设 (k, ν) 是完备域而 k' 是 k 的任意有限扩域，则 k' 上存在唯一的正规赋值 ν' 使得

$$\nu' | k \sim \nu.$$

并且 ν' 是完备的，从而 (k', ν') 也是完备域.

证明 由 § 1.2 中的引理 2 可知 ν 可以唯一地扩充成 k' 的完备赋值 μ，如果 $n = [k':k]$，则

$$n\mu(k'^{\times}) \subseteq \nu(k^{\times}) = \boldsymbol{Z},$$

$$e = e(\mu/\nu) = [\mu(k'^{\times}) : \nu(k^{\times})] < +\infty.$$

因此，若令

$$\nu' = e\mu,$$

则

$$\nu'(k'^{\times}) = \boldsymbol{Z}, \ \nu' | k = e\nu \sim \nu.$$

从 ν' 的扩充 μ 的唯一性可知 ν' 的唯一性.

今后，完备域 k 的有限扩域 k' 均看成是上述意义下(对于定理 2 中的赋值 ν')的完备域. 令 $e = e(\mu/\nu)$，则

$$\nu' | k = e\nu,$$

从而 $e = e(\mu/\nu)$ 是由 (k, ν) 和 (k', ν') 所唯一决定的，称作扩张 k'/k 的**分歧指数**，并且表示成

$$e(k'/k).$$

另一方面，设 $\mathfrak{k}' = \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ 是 (k', ν') 的剩余类域，则由 $\nu' \sim \mu$ 可知 $\mathfrak{k}'$ 也是 μ 的剩余类域. 由 §1.2 可知 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$，$f(\mu/\nu) = [\mathfrak{k}':\mathfrak{k}]$，这里 $[\mathfrak{k}':\mathfrak{k}]$ 也是由完备域扩张 k'/k 所唯一决定的，叫作 k'/k 的**剩余类次数**，并且表示成

$$f(k'/k).$$