组合设计理论

沈灏 编著

ZUHESHEJI LILUN

上海交通大学出版社

组合设计理论

沈 灏 编著

上海交通大学出版社

内容提要

本书对组合设计的基本概念、方法和理论作了比较系统的介绍，并力求体现自己的特色，全书共分八章。第一章是全书的引论，从关联结构的角度引出组合设计理论中最重要的基本概念。第二章介绍对称设计的一般理论。第三、四、五章分别介绍和对称设计密切相关的几类设计——有限几何、Hadamard 矩阵和差集以及有关问题。第六章讨论正交拉丁方。第七章介绍构作 BIB 的几个方法。第八章研究 BIB 设计和 PBD 设计的渐近存在性并给出存在性猜想的完整证明。

本书可供数学专业、信息论及计算机科学专业用作研究生和本科高年级学生的教材。本书也可供有关专业的教师和科研工作者参考。

组合设计理论

沈灏 编著

上海交通大学出版社·出版

（上海市番禺路 875 号　邮政编码 200030）

新华书店上海发行所·发行

常熟市印刷二厂·印刷

开本：850×1168（毫米）1/32　印张：8.875　字数：226000

版次：1996 年 10 月　第 1 版　印次：1996 年 10 月　第 1 次

印数：1—1500

ISBN 7—313—01666—2/O·101　定价：12.40元

序

组合设计是离散数学的一个重要分支，是一门研究将事物按特定要求进行安排配置并讨论其性质的学问．它的历史可以追溯到很远。我国四千多年以前有关于“河图洛书”的美丽传说，其中的“洛书”就是一个简单的组合设计——3阶幻方．历史上许多著名的有关组合设计的难题，如Euler的36个军官问题和Kirkman女生问题等，以其特有的魅力，吸引了一代又一代青年学子，把他们领进数学研究的殿堂．

然而组合设计又是一个年轻的数学分支．对于组合设计的系统研究，是从20世纪30年代R.C.Bose等人的工作开始的，而从60年代起，随着关于正交拉丁方的Euler猜想等重要问题的解决，特别是由于组合设计的理论与方法在数理统计、运筹学、信息论和计算机科学中的重要应用，组合设计的研究进入了一个飞速发展的时期，在最近30多年取得了令人瞩目的巨大进展．组合设计的一些基本问题及历史上久悬未决的难题一个接一个解决，新的理论与方法不断创立与引入，组合设计的面貌发生了带根本性的变化．它在理论上已渐趋成熟．

组合设计理论是一个既有古老的历史渊源而又相当年轻的数学分支，是一个生气勃勃、广有前途的研究领域．它既有很强的理论性，又有广泛的应用价值，并且饶有趣味，引人入胜．这是一座充满珍花异草的美好园林，足以使观赏者流连，更能激发起青年人创造的欲望与热情．

本书是在作者多年来为研究生开设组合设计理论课程的基础上写成的．本书对组合设计的基本概念、方法和理论作了比较系统的介绍，并力求体现自己的特色．第一章是全书的引论，从关联结构的角度引出组合设计理论中最重要的基本概念，为以后各章的讨论作必要准备．第二章介绍对称设计的一般理论．第三、四、五章分别介绍和对称设计密切相关的几类设计——有限几何、

Hadamard 矩阵和差集以及有关问题．第六章讨论正交拉丁方．第七章介绍构作 BIB 设计的几个方法并给出 $k=3,4$ 时 BIB 设计存在的充分必要条件．第八章研究 BIB 设计和 PBD 设计的渐近存在性并给出存在性猜想的完整证明．为了便于在教学中使用本书，我们尽量使各章在内容安排叙述上自然流畅，正文中的定理与结论都给出了完整的证明．对一些经典的重要定理，也尽可能采用新的观点与方法给出比较简短的证明．本书包括了组合设计理论研究的不少新进展与新成果．同时在各章末的注记中，或给出有关的历史背景，或介绍在正文中不便系统叙述的重要结果，或提出可供进一步研究的课题，以使读者尽早接触组合设计理论研究的前沿，同时也希望专家们在阅读本书后能有所获．

本书可供数学专业、信息论及计算机科学专业用作研究生和本科高年级学生的教材．若课时较紧，书中打星号的内容可以不讲．本书也可供有关专业的教师和科研工作者参考．

在本书撰写过程中，朱烈教授和邵嘉裕教授与作者进行过多次富有启发性的讨论并提出很多有益的建议，谨致深切的谢意．朱烈教授、丘维声教授、C.J.Colbourn 教授、A.D.Keedwell 教授、E.Mendelsohn 教授、A.Rosa 教授和 J.Seberry 教授为本书的写作提供了丰富的文献资料，谨对他们的热心支持表示衷心的感谢．本书第六章是作者在意大利罗马大学访问期间完成的，谨对罗马大学和 P.V.Ceccherini 教授为写作本书所提供的便利条件表示感谢．邵嘉裕教授十分细致地审阅全书并提出宝贵的修改意见，对他的真诚友情与无私的帮助，作者将铭感于心．

近十年来，作者关于组合设计理论的研究都是在国家自然科学基金的资助下进行的，对此谨表衷心的谢意

限于作者的学术水平与文字表达能力，书中必有不少错误与不足之处，尤其是第三章与第五章，总觉不够成熟．恳望读者批评指正．

沈　灝

1996 年 2 月

目　录

第一章　引　论

这一章作为全书的引论，将概要地介绍组合设计理论的基本概念和主要研究内容．组合设计理论的主要研究对象是各种类型的有限关联结构．在引入关联结构的概念之后，对一些重要的关联结构，包括平衡不完全区组设计，成对平衡设计，可分组设计与横截设计，以及 t-设计等都作了介绍，并讨论了它们之间的相互联系，以使读者能对组合设计理论的内容、方法与特点有一个初步的了解．

§1.1　有限关联结构

组合设计理论的主要研究对象是各种有限关联结构．

定义 1.1.1　设 V 与 $\boldsymbol{B}$ 为两个不相交集合，I 为 V 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的一个二元关系，即 $I\subseteq V\times\boldsymbol{B}$，则称 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为一个关联结构．V 的元素叫作点，$\boldsymbol{B}$ 的元素叫作区组，I 叫作关联关系．设 $p\in V$，$B\in\boldsymbol{B}$，若 $(p,B)\in I$，则称点 p 与区组 B 关联并记作 pIB．若 p 不与 B 关联，则记作 $p\not{I}B$．

有时为了强调关联结构的几何意义，也把区组叫作直线．此时，"pIB"也可叫作"点 p 在直线 B 上"或"直线 B 经过点 p"．

本书只讨论有限关联结构，即 V 与 $\boldsymbol{B}$ 都是有限集的关联结构．当 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为有限关联结构时，常以 v 表示集合 V 的基数，以 b 表 $\boldsymbol{B}$ 的基数，即 $v=|V|$，$b=|\boldsymbol{B}|$，并称 v 为 $\mathscr{D}$ 的阶．

定义 1.1.2　设 $\mathscr{D}_1=(V_1,\boldsymbol{B}_1,I_1)$ 与 $\mathscr{D}_2=(V_2,\boldsymbol{B}_2,I_2)$ 为两个有限关联结构．设 $\sigma: V_1\cup\boldsymbol{B}_1\longrightarrow V_2\cup\boldsymbol{B}_2$ 为满足下述条件的一个双射：

(i) $\sigma(V_1)=V_2$，$\sigma(\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{B}_2$；

(ii) 对任意 $p\in V_1$ 与任意 $B\in\boldsymbol{B}_1$，当且仅当 pI_1B 时才有

$\sigma(p)I_2\sigma(B)$，

则称 σ 为 $\mathscr{D}_1$ 到 $\mathscr{D}_2$ 上的一个同构，此时称 $\mathscr{D}_1$ 与 $\mathscr{D}_2$ 为两个同构的关联结构．特别，当 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2=\mathscr{D}$ 时，$\mathscr{D}$ 到它自身上的同构叫自同构．$\mathscr{D}$ 的全体自同构关于映射的乘法组成一个群，叫作 $\mathscr{D}$ 的全自同构群，记作 $\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$．$\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$ 的任一子群都叫作 $\mathscr{D}$ 的自同构群．

有限关联结构可以用它的关联矩阵来刻划．

定义 1.1.3 设 $V=\{p_1,p_2,\cdots,p_v\}$，$\boldsymbol{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$，$\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为有限关联结构．对 $1\leqslant i\leqslant v$，$1\leqslant j\leqslant b$，令

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ p_i\ I\ B_j,\\ 0, & 若\ p_i\ I\ B_j,\end{cases} \tag{1.1.1}$$

则 $v\times b$ $(0,1)$-矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1b}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b}\\ & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vb}\end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

叫作 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵．

对 $1\leqslant i\leqslant v$，令 r_i 表示 $\boldsymbol{B}$ 中与 p_i 关联的区组数；对 $1\leqslant j\leqslant b$，令 k_j 表示 V 中与 B_j 相关联的点的个数；对 $1\leqslant i,j\leqslant v$，$i\neq j$，令 λ_{ij} 表示 $\boldsymbol{B}$ 中同时与点 p_i 及 p_j 关联的区组数．r_i 叫作点 p_i 的重复度，k_j 叫作区组 B_j 的容量(或长度)，λ_{ij} 叫作点 p_i 与 p_j 的相遇数．则 r_i 等于关联矩阵 A 的第 i 行的行和即第 i 行中 1 的个数，k_j 等于 A 的第 j 列的列和，而 λ_{ij} 则是 A 的第 i 行与第 j 行的内积．因此，用两种方法计算 A 中 1 的个数，可以得到下面等式：

$$\sum_{i=1}^{v} r_i=\sum_{j=1}^{b} k_j. \tag{1.1.3}$$

令 w_v 表示元素全为 1 的 v 维行向量，A^T 表示 A 的转置矩阵，则

$$AA^T=\begin{pmatrix} r_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1v}\\ \lambda_{21} & r_2 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2v}\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ \lambda_{v1} & \lambda_{v2} & \lambda_{v3} & \cdots & r_v\end{pmatrix}, \tag{1.1.4}$$

$$w_v A = (k_1, k_2, \cdots, k_b). \tag{1.1.5}$$

有限关联结构 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$的关联矩阵与 V 及 $\boldsymbol{B}$ 中元素的排列顺序有关．为了讨论 $\mathscr{D}$ 的对应于 V 与 $\boldsymbol{B}$ 中元素不同排列的关联矩阵之间的关系，引入下述定义。

定义 1.1.4　各行各列都恰好只有一个 1 的 $n\times n$ (0, 1)-矩阵叫 n 阶**置换矩阵**．设 A 与 B 为两个 $m\times n$ (0,1)-矩阵，若存在 m 阶置换矩阵 P 和 n 阶置换矩阵 Q，使 $B=PAQ$，则称 A 与 B **置换相抵**．

设 $V=\{p_1,p_2,\cdots,p_v\}$ 与 $\boldsymbol{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$ 时，$\mathscr{D}$ 的关联矩阵为 A．将 V 中的点重新排列，对应于将 A 的各行作相应的重新排列亦即在 A 的左边乘以一个适当的 v 阶置换矩阵 P；将 $\boldsymbol{B}$ 中区组重新排列，对应于将 A 的各列作相应的重新排列亦即在 A 的右边乘以一个适当的 b 阶置换矩阵 Q．因此 $\mathscr{D}$ 的对应于 V 与 $\boldsymbol{B}$ 中元素不同排列的关联矩阵必定置换相抵．又由于具有相同关联矩阵的两个关联结构显然是同构的，因此证明了下述结论．

定理 1.1.1　设 A 与 B 分别是有限关联结构 $\mathscr{D}_1$ 与 $\mathscr{D}_2$ 的关联矩阵，则 $\mathscr{D}_1$ 与 $\mathscr{D}_2$ 同构的充分必要条件是 A 与 B 置换相抵．

定义 1.1.5　设 $\mathscr{D}=(V, \boldsymbol{B}, I)$ 为有限关联结构．令 $\mathscr{D}^*=(V^*,B^*,I^*)$，此处 $V^*=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^*=V$，并且对任意 $p^*\in V^*$，$B^*\in \boldsymbol{B}^*$，当且仅当 $B^*\ I\ v^*$ 时有 $v^*\ I^*\ B^*$．则称 $\mathscr{D}^*$ 为 $\mathscr{D}$ 的**对偶结构**．若 $\mathscr{D}^*$ 与 $\mathscr{D}$ 同构，则称 $\mathscr{D}$ 为**自对偶结构**．

若 A 为 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵，则 A^T 是 $\mathscr{D}^*$ 的关联矩阵．显然 $(\mathscr{D}^*)^*=\mathscr{D}$．

对偶原理　设 Φ 为由一些关联结构组成的类，使得 Φ 在包含某个关联结构 $\mathscr{D}$ 时也包含了它的对偶结构 $\mathscr{D}^*$．若命题 P 对 Φ 中所有关联结构都成立，则其对偶命题（即将 P 中的点与区组互换所得的命题）P^* 也对 Φ 中所有的关联结构都成立．

定义 1.1.6　设 $\mathscr{D}=(V, \boldsymbol{B}, I)$ 为有限关联结构．令 $\overline{I}=(V\times \boldsymbol{B})\setminus I$，则称 $\overline{\mathscr{D}}=(V,\boldsymbol{B},\overline{I})$为 $\mathscr{D}$ 的**补结构**或简称**补**，亦即对任意 $p\in V$ 与任意 $B\in \boldsymbol{B}$，当且仅当 $p \not\mathrel{I} B$ 时有 $p\ \overline{I}\ B$．

设 $v=|V|$，$b=|B|$，A 为 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵．令 J_{vb} 表示全部元素都是 1 的 $v\times b$ 矩阵，则 $J_{vb}-A$ 是 $\overline{\mathscr{D}}$ 的关联矩阵．

我们常将集合论中的包含关系"$\in$"用作关联关系，并把关联结构 $(V,\boldsymbol{B},\in)$ 简单地记作 $(V,\boldsymbol{B})$，此时 $\boldsymbol{B}$ 的元素其实就是 V 的子集．需要指出的是，V 的一个子集在 $\boldsymbol{B}$ 中可能出现不止一次，设为 s 次．此时这个子集所代表的 s 个区组仍应看作不同．因此，将 $\boldsymbol{B}$ 的元素看作区组时，$\boldsymbol{B}$ 是一个集合．而若将 $\boldsymbol{B}$ 的元素看作 V 的子集，则同一个子集可以重复出现，因此应把 $\boldsymbol{B}$ 看作 V 上的一个子集族，即不但要看它包含 V 的哪些子集，还要考虑各个子集在 $\boldsymbol{B}$ 中出现的重数．

例 1.1.1 令 $V=Z_7$ 为以 7 为模的全体剩余类的集合，令

$$\boldsymbol{B}=\{(0,1,3),(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),\\(4,5,0),(5,6,1),(6,0,2)\}.$$

若将区组看作直线，则 $\mathscr{D}=(Z_7,\boldsymbol{B})$ 是一个由 7 个点和 7 条直线组成的关联结构，它的关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\\1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{pmatrix},\qquad(1.1.6)$$

这个关联结构可由图 1.1.1 给出的 Fano 模型直观表示．

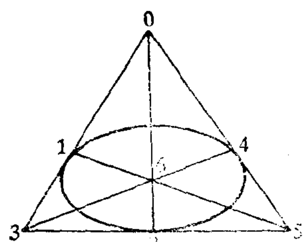

图 1.1.1

$\mathscr{D}$ 的 7 个点分别由图中三角形的重心、三个顶点及三边中点表示，7 条直线则分别由三角形的三条边、三条中线以及过三边中点的圆周表示．下面将会看到，如此简单的 Fano 模型，却有着多种有趣的几何学与组合论的解释：可以把它看作一个7阶 Steiner 三元系，也可看作一个循环区组设计，还可看作一个 2 阶射影平面．

例 1.1.2 令 $V=Z_6$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\{&\{2,4,5\},\{2,4,5\},\{0,1,5\},\{0,3,5\},\{0,1,4\},\\&\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{0,1,2,4\},\{0,1,2,5\},\\&\{0,2,3,4\},\{0,3,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,3,4,5\}\}\end{aligned}$$

$\mathscr{D}=(Z_6,\boldsymbol{B})$是一个 6 阶关联结构，它共包含 14 个区组. $\mathscr{D}$ 的关联矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1\\1&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}, \tag{1.1.7}$$

由于用作区组 B_1 与 B_2 的是同一子集$\{2,4,5\}$，因此 A 的第 1 列与第 2 列相同.

下面再举一个不以"$\in$"作为关联关系的有限关联结构的例子. 用 $GF(q)$ 表示 q 阶有限域.

例 1.1.3 设 V 由 $GF(2)$ 上如下 7 个 2×3 矩阵组成:

$$V=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

$\boldsymbol{B}$ 由 $GF(2)$ 上全体 3 维非零向量组成，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\{&(1\ 0\ 0),\ (0\ 1\ 0),\ (0\ 0\ 1),\ (1\ 1\ 0),\ (1\ 0\ 1),\\&(0\ 1\ 1),\ (1\ 1\ 1)\}.\end{aligned}$$

关联关系 I 规定如下:对 $p\in V,B\in\boldsymbol{B}$,当且仅当

$$p\times B^T=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

时 pIB,则 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$是一个 7 阶关联结构，它与例 1.1.1 中的关联结构同构.

定理 1.1.2 任一有限关联结构 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 都与某个以"$\in$"为关联关系的关联结构 $\mathscr{D}'=(V,\boldsymbol{B}')$同构.

证 设 $\boldsymbol{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$，令

$$B_j'=\{p\in V\mid pIB_j\},\quad 1\leqslant j\leqslant b,$$

则 B_j' 是 V 的子集．令 $\boldsymbol{B}'=\{B_1',B_2',\cdots,B_b'\}$，则对任一点 $p\in V$ 与任一 $j=1,2,\cdots,b$，当且仅当 pIB_j 时 $p\in B_j'$．从而 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}'=(V,\boldsymbol{B}')$ 有相同的关联矩阵．由定理 1.1.1，$\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}'$ 同构．

因此，在大多数情形，我们讨论的都是以"$\in$"为关联关系的关联结构．不过，在某些场合，采用一般意义下的关联关系，将使我们在研究有关的设计问题时具有较大的自由度和灵活性．

关于关联结构的定义过于宽泛，以致任何一个 $(0,1)$-矩阵都可以作为某个有限关联结构的关联矩阵．因此对于一般的关联结构，很难指望能得到比较深刻的结果．然而，当所讨论的有限关联结构满足某些特定的条件和约束时，它们就有可能变得既有深刻的理论意义，又有广泛的应用价值，而且饶有趣味，引人入胜．

设 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为有限关联结构．对 $p\in V$，令 r_p 表示点 p 的重复度；对 $B\in\boldsymbol{B}$，令 k_B 表示区组 B 的容量；对 V 的任一 t 元子集 S，令 λ_S 表示与 S 中每一点都关联的区组个数．在设计理论的研究中，以下条件是最常用的：

(1) 正则性：存在常数 $r>0$，使对所有 $p\in V$ 都有 $r_p=r$．

(2) 均匀性：存在常数 $k>0$，使对所有 $B\in\boldsymbol{B}$ 都有 $k_B=k$．

(3) t-平衡性：对给定的正整数 t，存在常数 $\lambda>0$，使对 V 的任一 t 元子集 S 都有 $\lambda_S=\lambda$．

1-平衡性即正则性，2-平衡性通常就叫作平衡性．在本章以后各节中，将简要介绍几类重要的有限关联结构，以期读者能对组合设计理论的内容、方法与特点有初步的了解．

§1.2 平衡不完全区组设计

同时满足正则性、均匀性和平衡性三个条件的有限关联结构叫平衡不完全区组设计，切实言之，有以下定义．

定义 1.2.1 设 v,k,λ 为给定的正整数，$\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为有限关联结构．若以下条件满足：

(i) $|V|=v$；

(ii) 对任意 $B\in\boldsymbol{B}$，都有 $k_B=k$；

(iii) 对任意 $p,q\in V$，$p\neq q$，都有 $\lambda_{\{p,q\}}=\lambda$，
则称 $\mathscr{D}$ 是一个平衡不完全区组设计，简称区组设计或 BIB 设计，记作 $B(k,\lambda;v)$. v 叫做 $\mathscr{D}$ 的阶，k 叫作 $\mathscr{D}$ 的区组容量（或区组长度），λ 叫作相遇数.

由于历史上的原因，$\lambda=1$ 时的 BIB 设计通常叫作 Steiner 系或 Steiner 2-设计，并且 $B(k,1;v)$ 也常记作 $S(2,k;v)$. 随之，对一般的 λ，$B(k,\lambda;v)$ 也记作 $S_\lambda(2,k;v)$.

引理 1.2.1 设 $k\geqslant 2$，$\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B})$ 为一个 $B(k,\lambda;v)$，则

(i) V 中任意一点 p 的重复度为

$$r_p=\lambda(v-1)/(k-1), \tag{1.2.1}$$

(ii) $\boldsymbol{B}$ 中所包含的区组个数为

$$b=|\boldsymbol{B}|=\lambda v(v-1)/k(k-1). \tag{1.2.2}$$

证 设 A 为 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵. 适当排列 V 与 $\boldsymbol{B}$ 中元素的顺序，不妨设 p 为 V 中第一个点且 $\boldsymbol{B}$ 的前 r_p 个区组与 p 关联. 于是 A 具有下列形状：

$$A=\begin{pmatrix} 1\ 1\ \cdots\ 1 & 0\ \cdots\ 0 \\ A_1 & * \end{pmatrix}, \tag{1.2.3}$$

其中 A_1 为由 A 的后 $v-1$ 行与前 r_p 列组成的 $(v-1)\times r_p$ 子矩阵. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的前 r_p 个区组中的每一个都恰与 V 中除 p 之外的 $k-1$ 个点关联，故 A_1 的每一列的列和都是 $k-1$. 又因 p 与 V 中其余各点的相遇数为 λ，故 A_1 各行的行和都是 λ. 用两种方法计算 A_1 中 1 的个数便得 $\lambda(v-1)=r_p(k-1)$，从而

$$r_p=\lambda(v-1)/(k-1)=r,$$

即得 (i). 因此 A 的各行的行和都是 r. 又因 A 的各列的列和都是 k，从而用两种方法计算 A 中 1 的个数便得 $bk=vr$，由 (i) 即得(ii).

由上述引理可知，若 $\mathscr{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ 为一个 $B(k,\lambda;v)$，则 V 中每一点的重复度都等于常数 r，r 叫作此设计的重复数. v,b,r,k 与 λ 叫作此设计的参数，它们满足下述参数关系：

$$bk = vr, \tag{1.2.4}$$

$$\lambda(v-1) = r(k-1). \tag{1.2.5}$$

由此得到关于 BIB 设计存在性的下述基本必要条件.

定理 1.2.1 若 $B(k,\lambda;v)$ 存在，则

$$\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{(k-1)}, \tag{1.2.6}$$

$$\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}. \tag{1.2.7}$$

设 $\mathscr{D}$ 为一个 $B(k,\lambda;v)$，A 为 $\mathscr{D}$的关联矩阵，则由式(1.1.4)、(1.1.5)及引理 1.2.1 得

$$AA^T = \begin{bmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \cdots & & \cdots\cdots & \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix} = (r-\lambda)I_v + \lambda J_v, \tag{1.2.8}$$

$$w_v A = k w_b. \tag{1.2.9}$$

此处 J_v 是元素全为 1 的 $v\times v$ 矩阵，w_v 与 w_b 分别是元素全为 1 的 v 维与 b 维行向量. 反之，若 A 为满足条件(1.2.8)与(1.2.9)的 $v\times b$ (0,1)-矩阵，则 A 必可看作某个 $B(k,\lambda;v)$ 的关联矩阵. 在同构意义下，一个 $B(k,\lambda;v)$由它的关联矩阵唯一确定.

关联矩阵的引入，使我们把有关的设计问题转化为一类特殊的(0,1)-矩阵问题，从而有可能用线性代数的理论、方法与技巧来进行研究. 作为一个例子，下面用矩阵方法来证明著名的 Fisher 不等式.

定理 1.2.2(Fisher 1940) 若 $B(k,\lambda;v)$存在且 $v>k$，则

$$b \geqslant v. \tag{1.2.10}$$

证 设 A 为某个 $B(k,\lambda;v)$的关联矩阵. 由式(1.2.8)，经简单计算可知矩阵 $B=AA^T$ 的行列式为

$$\det(B) = \begin{vmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \cdots & & \cdots\cdots & \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix} = (r-\lambda)^{v-1}(\lambda v - \lambda + r). \tag{1.2.11}$$

由于 $v>k$，由式(1.2.5)得 $r>\lambda$，因此 $\det(B)\neq 0$，从而

$$b \geqslant \operatorname{rank}(A) \geqslant \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(B) = v,$$

即得结论.

利用 Fisher 不等式可知 $B(6,1;16)$ 与 $B(10,3;25)$ 都不存在，尽管它们都满足条件(1.2.6)与(1.2.7).

Fisher 不等式(1.2.10)中等号成立的情形特别有趣. $b=v$ 时的 $B(k,\lambda;v)$ 叫对称区组设计. 对称区组设计有许多重要而又深刻的性质，将在第二章中讨论.

关于一个 BIB 设计与它的补之间的关系，有下述定理.

定理 1.2.3 设 $\mathscr{D}$ 为一个 $B(k,\lambda;v)$，则 $\mathscr{D}$ 的补 $\overline{\mathscr{D}}$ 是一个 $B(v-k,b-2r+\lambda;v)$.

证 设 A 为 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵，则 $\overline{A}=J_{vb}-A$ 是 $\overline{\mathscr{D}}$ 的关联矩阵. 此处 J_{vb} 是元素全为 1 的 $v\times b$ 矩阵.

由于 A 的各行的行和为 r，故

$$w_bA^T=rw_v, \tag{1.2.12}$$

从而由式(1.2.8)得

$$\begin{aligned}\overline{A}\cdot(\overline{A})^T&=(J_{vb}-A)(J_{vb}-A)^T\\&=J_{vb}\cdot J_{vb}{}^T-(J_{vb}\cdot A^T+A\cdot J_{bv})+AA^T\\&=bJ_v-2rJ_v+(r-\lambda)I_v+\lambda J_v\\&=(r-\lambda)I_v+(b-2r+\lambda)J_v\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

及

$$w_v\cdot\overline{A}=w_v(J_{vb}-A)=v\cdot w_b-kw_b=(v-k)w_b, \tag{1.2.14}$$

即 $\overline{A}$ 满足式(1.2.8)与(1.2.9)，从而 $\overline{\mathscr{D}}$ 是一个 BIB 设计，且有 $\overline{k}=v-k$，$\overline{\lambda}=b-2r+\lambda$，即 $\overline{\mathscr{D}}$是一个 $B(v-k,b-2r+\lambda;v)$.

基于上述定理，为了研究 $B(k,\lambda;v)$的存在性，可以假定 $k\leqslant v/2$. 当 $k>v/2$ 时，可以研究其补设计的存在性.

关于 BIB 设计的研究是从 $k=3$ 的情形开始的. 我们把一个 $B(3,\lambda;v)$叫作 v 阶 λ 重三元系并记作 $TS(v,\ \lambda)$. $\lambda=1$ 时的三元系，经 M.Reiss(1859)首创，被叫作 Steiner 三元系. v 阶 Steiner 三元系也记作 $STS(v)$. 例 1.1.1 给出的是一个 $STS(7)$，由定理 1.2.3，它的补设计是一个 $B(4,2;7)$. 在历史上，下述 Kirkman 15 名女生问题给出了三元系的最著名的例子.

例 1.2.1(Kirkman 1850) 一位女教师每天带领她的 15 名