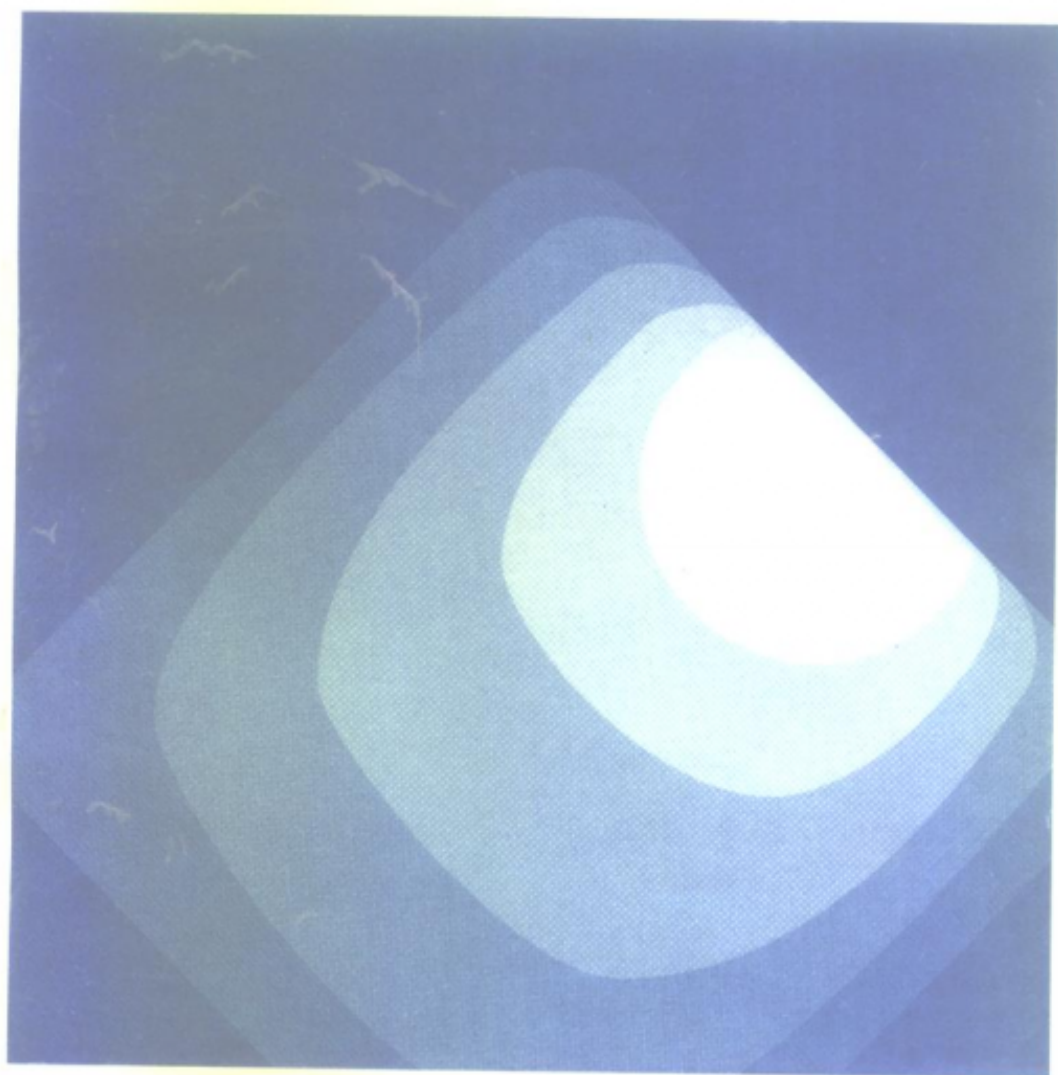


计算机控制 及在导航系统中的应用

谈振藩 乐慧康 吴简彤 编著



哈尔滨工程大学出版社

计算机控制及在导航系统中的应用

谈振藩 乐慧康 吴简彤 编著

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书共分八章,前五章阐述线性离散系统的基本理论,包括绪论、线性离散系统的数学描述、计算机控制系统的常规设计方法、状态空间设计方法、最优控制。后三章结合船舶导航中的应用实例介绍计算机控制系统的实现。包括计算机控制系统的实现、计算机的基本接口原理及应用、捷联式惯性导航系统中的计算机控制。

本书系全国高等学校船舶类统编教材,可供船舶导航、自动检测及其它有关专业学生使用。也适于有关工程技术人员自学与参考。

计算机控制及在导航系统中的应用

谈振藩 乐慧康 吴简彤 编著

责任编辑 张笑冰

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新华书店经销

哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版

东北农业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 322 千字

1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册

ISBN 7-81007-637-X

TP·36 定价: 10.70 元

出版说明

根据国务院国发(1978)23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”,中国船舶工业总公司负责全国高等学校船舶类专业教材编审、出版的组织工作。

为了做好这一工作,中国船舶工业总公司相应地成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”、“水中兵器”五个教材小组,聘请了有关院校的教授、专家60余人参加工作。船舶类专业教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的专家组织,其任务是做好高等学校船舶类专业教材的编审工作,为提高教材质量而努力。

在总结前三轮教材编审、出版工作的基础上,根据国家教委对“八五”规划教材要“抓好重点教材,全面提高质量,适当发展品种,力争系统配套,完善管理体制,加强组织领导”的要求,船舶总公司于1991年又制定了《1991~1995年全国高等学校船舶类专业规划教材选题》。列入规划的选题共107种。

这批教材由各有关院校推荐,同行专家评阅,教材委员会(小组)评议,完稿后又经主审人审阅,教材委员会(小组)复审,然后分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及有关高等学校的出版社出版。

为了不断地提高教材质量,希望使用教材的单位和广大师生提出宝贵意见。

中国船舶工业总公司教材编审室
1992年5月

前 言

本书是根据 1991 年 6 月全国造船院校陀螺导航专业统编教材会议通过的“计算机控制及在导航系统中的应用”教材大纲编写的,供高等院校陀螺导航、检测技术及其它相关专业使用,参考学时为 54 小时。

随着计算机技术的迅速发展,特别是源于 VLSI 技术的微型计算机的出现,使计算机控制技术渗透到了各个工业领域。由于计算机控制具有控制灵活、功能强、体积小和精度高等特点,因而在船舶导航仪器中,特别是象平台罗经及惯性导航系统这样复杂而精度高的导航系统中,已经无一例外地采用微型计算机作为信息处理和控制部件。即使在一般导航仪器中,计算机控制技术也正在得到越来越广泛的应用。为了适应这一趋势,我们在导航专业本科生的高年级开设了“计算机控制”这一课程。它是在“自控原理”,“微机原理及应用”等课程之后开设的。

本书从工程应用的角度出发介绍了计算机控制的基本原理,并以捷联式惯性导航系统中的陀螺及加速度计的数字式再平衡回路作为实例介绍了计算机控制的应用。因此,本书既可作为导航专业高年级学生的教材,也可供从事导航系统研究和设计的工程技术人员参考。

全书共分八章。第一章是绪论;第二章介绍了线性离散系统研究中常用的 z 变换;第三、四、五章介绍了计算机控制系统的各种设计方法;第六章介绍了计算机控制系统实现中出现的几个问题;第七章介绍了设计计算机控制系统必要的接口技术及常用接口芯片;第八章是计算机控制在捷联式惯性导航系统中的应用实例。

本书由谈振藩、乐慧康、吴简彤三同志共同编写。第一、二、六章由乐慧康副教授编写,第三、四章由谈振藩副教授编写,第五、七、八章由吴简彤副教授编写。全书由谈振藩副教授统稿。本书由哈尔滨工业大学徐丽娜教授主审,她对书稿作了认真仔细的审阅,对书稿提出了许多宝贵的意见和建议。在此,对她表示衷心的感谢。在出书过程中得到了哈尔滨工程大学自动控制系黄德鸣教授和张树侠教授的热心帮助和指导,在此一并表示感谢。由于编者的水平有限,书中不足及错误之处在所难免,谨请读者批评指正。

编 者

目 录

1 绪论	1
1.1 计算机控制系统	1
1.2 模拟信号的采样和量化	4
1.3 保持器	6
2 线性离散系统的数学描述	10
2.1 线性常系数差分方程	10
2.2 z 变换	12
2.3 z 传递函数	19
2.4 线性离散系统的稳定性	22
习题	24
3 计算机控制系统的常规设计方法	25
3.1 系统的性能指标	25
3.2 连续与离散传递函数的转换	30
3.3 连续系统设计方法的推广	38
3.4 数字 PID 控制	43
3.5 直接离散化设计	51
习题	67
4 计算机控制系统的状态空间设计法	69
4.1 计算机控制系统的状态空间描述	69
4.2 计算机控制系统的可控性和可观性	85
4.3 状态反馈与极点配置	93
4.4 状态观测器的设计	96
4.5 调节系统的设计	101
习题	102
5 计算机最优控制系统	103
5.1 最优控制的基本概念	103
5.2 离散二次型性能指标的最优控制	104
5.3 最小调节时间控制	107
5.4 代数黎卡提方程的解	111
习题	113
6 计算机控制系统的实现	115
6.1 控制计算机的硬件组成	115
6.2 计算机的输入、输出转换装置	118
6.3 控制计算机的软件	123

6.4 实现中的几个问题	127
7 计算机的基本接口原理及应用	135
7.1 总线和总线结构	135
7.2 接口的基本概念	138
7.3 IBM-PC 机的接口部件	142
7.4 IBM-PC 机的输入输出系统及内存分配	144
7.5 可编程并行接口芯片8255A	146
7.6 串行通讯接口电路8251A	154
7.7 可编程定时控制器8253	165
7.8 可编程中断控制器8259A	174
习题	186
8 捷联式惯性导航系统中的计算机控制	187
8.1 系统的工作原理和组成	187
8.2 加速度计再平衡控制系统	189
8.3 陀螺再平衡控制系统	196
8.4 数字脉冲调宽电流产生器	200
8.5 捷联式惯性导航系统中的计算机	203
参考文献	205

1 绪 论

计算机控制,是指用数字计算机对一个动态系统进行检测、监督和控制。由于计算机控制系统与连续控制系统相比有一些不同的地方,因此这类系统的结构、分析和设计方法也与连续系统不同。随着计算机在控制系统中的广泛应用,人们迫切需要掌握计算机控制技术,掌握分析、设计和构成一个计算机控制系统的理论和方法。本书的目的在于介绍与计算机控制系统的分析和设计有关的基本方法和理论,并结合导航设备中计算机应用的实例讨论计算机控制系统的实现。

1.1 计算机控制系统

1.1.1 计算机控制

数字计算机是 20 世纪 40 年代出现的,现在越来越受到人们的广泛重视,发展十分迅速。把数字计算机作为控制系统部件的思想出现在 1950 年左右。当时,人们研究了它在导弹和飞机控制方面的应用。研究结果表明,把当时的通用计算机用于控制系统是不合适的,因为它的体积太大,耗能太多,而且可靠性也差。那时计算机控制的研究主要集中在工业过程的控制中。50 年代中,美国汤姆森·拉莫·伍尔里奇航空公司与得克萨斯柯公司联合对德克萨斯州的阿瑟港炼油厂的一台聚合装置设计了一个采用 RW-300 计算机的控制系统。

随着微电子技术和计算机技术的发展,计算机除了在过程控制方面得到广泛应用之外,在仪器仪表、机电设备、航天技术及各种军事装备中,计算机控制的应用也日益广泛。特别是 70 年代以来,出现了微型计算机。由于它体积小、功耗低、成本低、可靠性高,可以代替常规的连续控制器直接安装在控制设备内,使得计算机控制的应用更加广泛。

在计算机控制系统发展的同时,计算机控制理论也在逐步地发展和完善。计算机只能根据离散时间点上的变量值进行控制,那么,在什么条件下才能根据这些离散点上的值重现原来的连续信号?这个问题的关键是奈奎斯特发现的。他指出,从采样值恢复一个正弦信号,一个周期至少要采样两次。完整的证明是由香农在 1949 年的重要论文中给出的,这就是著名的香农定理。

采样系统理论起源于对某些控制系统的分析。1948 年对落弓式检流计特性所作的研究表明,可以用一个线性时不变差分方程来描述一个采样系统,即用差分方程代替微分方程来描述采样系统。

第二次世界大战期间及战后,许多人致力于雷达系统的研究。由于当时变换理论已成功地应用于连续时间系统中,人们很自然地试图为采样系统也建立一种变换理论。霍尔维茨于 1947 年对序列 $[f(kh)]$ 引进了一个变换,定义为

$$\mathcal{Z}[f(kh)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(kh)$$

后来,这种变换由拉格兹尼和扎德于 1952 年发展并定义为 z 变换。到了 50 年代末, z 变

换理论已臻成熟,它为采样系统的分析和综合提供了良好的工具。

状态空间理论是50年代后期发展起来的。发展这种理论的动力主要来自于数学家对常微分方程理论的研究。他们把状态空间法用于控制系统,提出了系统能控性和能观性等重要概念,发展了基于状态空间法的系统分析和设计方法,并使人们的研究能力扩展到多变量系统和大系统。

最优控制和随机控制也是在50年代里发展起来的。贝尔曼和庞特里亚金指出,许多设计问题可以表述成最优问题。贝尔曼于1958年对线性系统二次损失函数给出了一个显式解。卡尔曼于1960年在一篇著名的论文中指出,经典的维纳滤波问题如果用状态空间来描述,可以得出一个迭代方程形式的解,它非常适用于用计算机求解。随机控制问题是由系统扰动为随机过程的假设产生的。线性系统最优控制问题可以用二次型损失函数来描述并求解,从而推动了随机控制理论的发展,结果出现了线性二次型高斯理论(LQG)。这一理论现在已成了多变量线性系统的主要设计方法。

控制系统的各种分析和设计方法是建立在过程的动态模型已知的基础上的。以拉氏变换为基础的经典理论之所以如此成功,主要是因为过程的传递函数可以用频率响应实验来确定。计算机控制的发展则伴随着系统辨识方法的同步发展。系统辨识法使得有可能用实验确定脉冲传递函数或差分方程,它们是计算机控制系统分析和设计的基础。

自适应控制的研究始于50年代中期,但直到70年代,由于计算机控制的发展,才有了明显的发展。这是因为只有用计算机作为控制器才可以实现参数估计和较复杂的控制算法。微计算机的出现使得算法更经济、更合理。80年代初开始出现了商业化的自适应调节器。自整定系统是一种近似的自适应系统,该系统内部具有自动调整控制器参数的功能。这种功能也只有计算机控制系统中才能实现。

1.1.2 计算机控制系统的分类

数字计算机已经在各个领域得到了广泛应用。按计算机的应用特点和参与控制的方式,计算机控制系统可以分为下面四种类型:

(1) 过程的巡回检测和数据处理

在这类系统中,计算机控制数据采集装置,定时采集、检测对象的有关参数,并对采集数据进行必要的处理。处理结果通过显示或打印输出,输出结果供操作人员参考,由操作人员调节被控对象。

数据处理系统的组成框图如图1-1所示。计算机

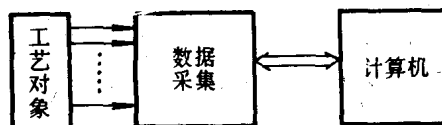


图 1-1 数据采集处理系统

在系统中不直接对被控对象输出控制量,这类系统只适用于对象参数变化缓慢的情况。

(2) 计算机操作指导和监督控制系统

监督控制系统的结构如图1-2所示。

在系统中,计算机根据现场测得的各有关变量,按一定的算法计算给定值。控制作用是由常规调节装置来完成的。计算机仅起监视系统工作情况,修正设定值的作用。对计算机回路来说,它是一种开环控制方式。在这类系统中,即使计算机发生了故障,在人的

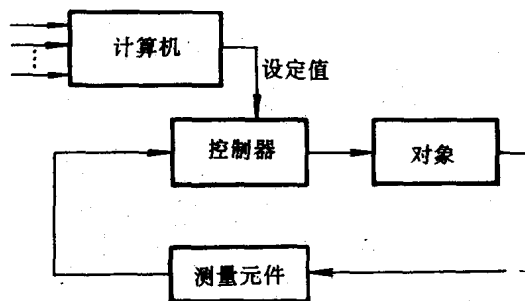


图 1-2 计算机监督控制系统

参与下,系统仍能正常工作。

(3) 直接数字控制系统(DDC)

在直接数字控制系统中,计算机作为控制部件对被控对象直接进行控制,计算机完全取代了常规控制器。

直接数字控制系统结构如图 1-3 所示。由于被控制量一般都是模拟量,而被控对象一般也只能接受模拟形式的控制量,所以被控制量通过 A/D 转换器被采样和量化,变成计算机能接受的数字量输入计算机。计算机输出的控制量经 D/A 转换并经保持后转化为模拟量输给被控对象。

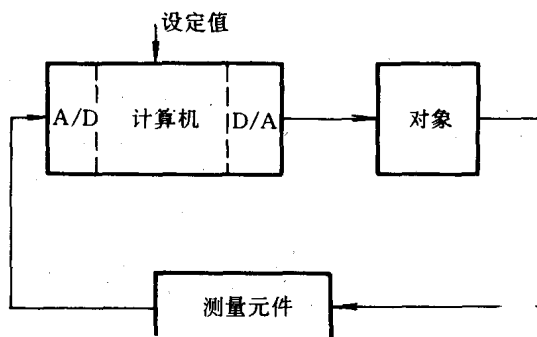


图 1-3 直接数字控制系统

(4) 计算机分级控制系统

对于大系统的控制和管理,可以采用分级控制的方法,这对提高整个系统的可靠性是有利的。分级控制系统结构如图 1-4 所示。

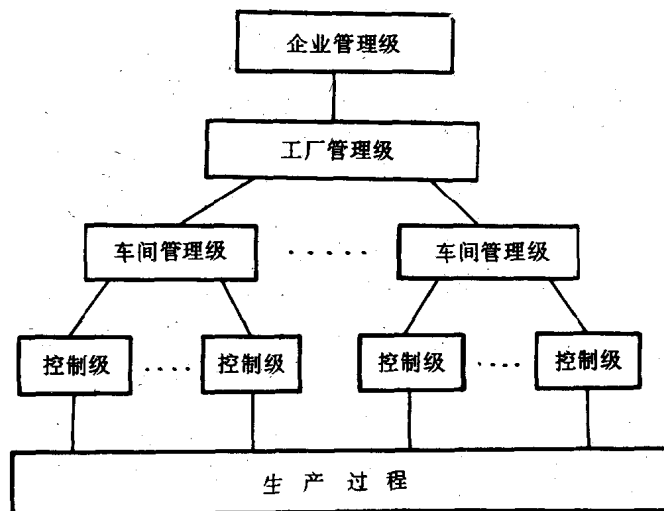


图 1-4 计算机分级控制系统

在该系统中,用小型计算机或微型计算机构成直接控制级,对生产过程的各阶段进行直接数字控制,同时把生产过程的信息逐级向上传递,分别由车间管理级、工厂管理级和企业管理级的计算机进行生产过程信息汇总、统计。各级计算机按生产任务调度、计划安排及现场生产状况进行生产指挥决策,逐级下达指令。

1.1.3 计算机控制在船舶导航系统中的应用

近年来,计算机广泛应用于船舶导航系统中,使导航设备的性能得到很大改进。从使用情况来分类,有用作数据采集和处理的,如全球定位系统(GPS)接收机中的微处理器,它用于导航信息的接收和处理;有用作直接数字控制的,如电罗经中的单片机控制系统,平台罗经和惯性导航系统中的微计算机控制系统。而组合导航系统是用一台中央处理计算机把各台导航设备连接起来的分级计算机系统。从上述情况可以看出,计算机控制几乎

已经应用到每一台导航设备直到整个导航系统中。

惯性导航系统是船舶精密导航设备,它为船上其他设备提供航向、纵摇、横摇等姿态信息。惯性导航系统的组成如图 1-5 所示。从图中可以看出,这是一个采用计算机的直接数字控制系统。其中的计算机一般采用微型计算机,惯性导航系统中的控制规律在计算机中由软件实现。

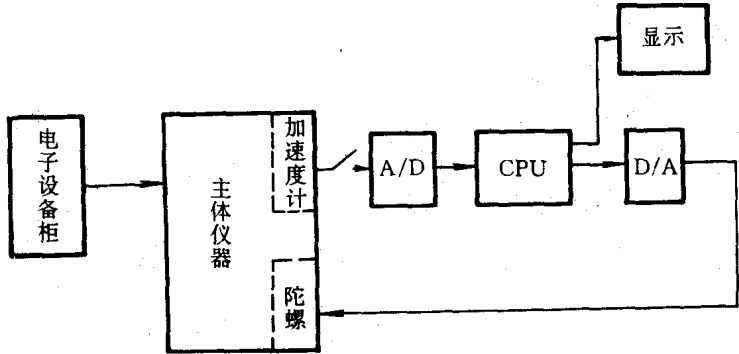


图 1-5 惯性导航系统结构简图

组合导航系统是船舶导航设备中应用计算机控制的另一种类型的例子。其结构图如图 1-6 所示。图中的 GPS、计程仪、罗经等导航设备都是由计算机控制的。这些设备的输出信息除了在本设备的显示装置上显示外,还通过通讯接口输出到组合导航计算机中。组合导航系统对这些信息进行采集、综合处理,最后得到一个精确合理的结果输出。

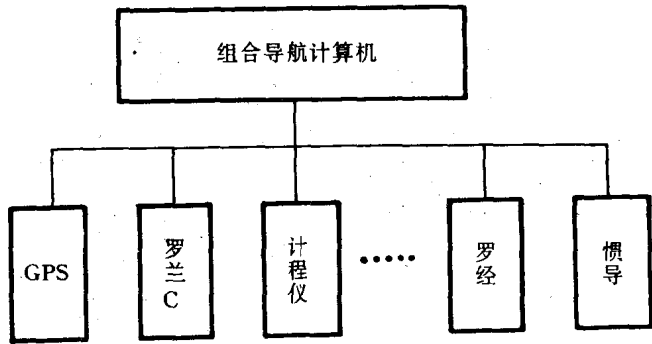


图 1-6 组合导航系统结构图

本书的目的是提供与计算机控制系统分析和设计有关的控制理论,重点是基本概念和主要设计方法。在此基础上以导航设备中的计算机控制系统为例讨论计算机控制系统的实现,包括硬件设计和软件设计等。

1.2 模拟信号的采样和量化

1.2.1 采样和量化

数字计算机只能接受和处理离散的数码,但自然界中大量的物理量都是连续的模拟量,如环境温度、大气压力等。这些量的特点是在时间上和幅值上都是连续的,如图 1-7

(b)所示。因此,数字计算机要处理这样的信号必须进行采样和量化,将其转换成数字信号。

采样是把模拟信号按一定的时间间隔抽样成时间上离散而幅值连续的信号的过程。如图 1-7(c)所示,经采样处理得到的信号可以称为离散模拟信号。用一组数码来逼近一个离散模拟信号的过程称为量化,如图 1-7(d)所示。量化后得到的信号称为数字信号。换句话说,数字信号在时间上和幅值上都是离散的。

模拟信号的采样和量化是由计算机中的 A/D 转换器完成的。

1.2.2 采样定理

采样可以看作是一脉冲序列

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1-1)$$

与被采样的模拟信号相互作用。 $\delta_T(t)$ 是一个周期为 T ,重量为 1 的单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的序列。经过采样以后,脉冲序列的幅度被模拟信号所调制,调制后的脉冲序列幅度的包络线形状与模拟信号的形状一致,如图 1-7(c)所示。

记 $x(t)$ 为模拟信号, $x^*(t)$ 为采样后的离散模拟信号,则

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) \quad (1-2)$$

$\delta_T(t)$ 是周期信号,可以展开成傅里叶级数:

$$\delta_T(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (1-3)$$

把式(1-3)代入式(1-2)得

$$x^*(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jn\omega_s t} \quad (1-4)$$

对上式两边取傅里叶变换得

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_s}{2\pi} x(t)e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - n\omega_s)t} dt \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (1-5)$$

画出式(1-5)的图形如图 1-8 所示。图中所示的 $X(\omega)$ 是被采样的有限带宽信号 $x(t)$ 的频谱,其频率范围为 $0 < \omega < \omega_h$ 。从图中可见,经采样后的信号 $x^*(t)$ 的频谱具有周期性,它包含有原信号的频谱和无限个经过平移的原信号的频谱。平移的频率等于采样频率的整数倍。

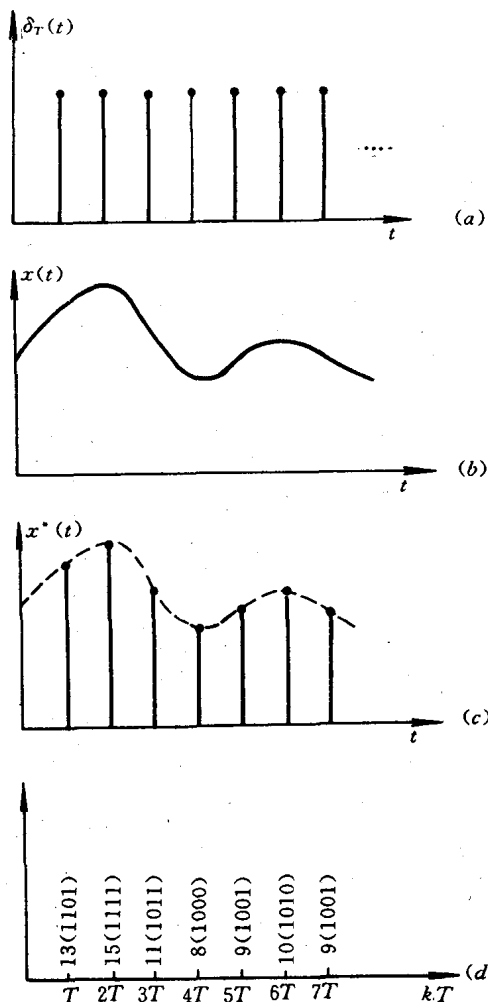


图 1-7 采样及量化过程

(a) 采样脉冲; (b) 模拟信号;
(c) 离散模拟信号; (d) 数字信号

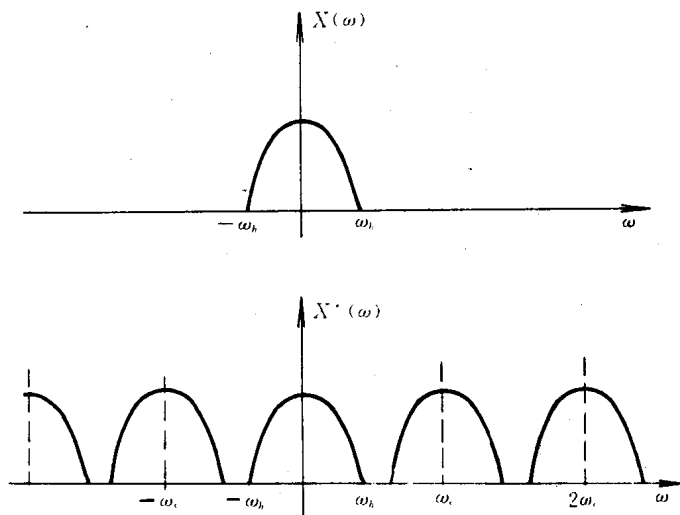


图 1-8 被采样信号 $x(t)$ 和采样后信号 $x^*(t)$ 的频谱

为了能用 $x^*(t)$ 信号恢复出原来的信号 $x(t)$, 要求平移的频谱之间不互相重叠。如果出现这种重叠, 就说明有些频率部分的幅值与原信号不同。这种频谱重叠称为“混叠现象”。当信号频带过宽或采样频率太低时就会出现混叠现象。

绝大多数实际信号都是有限带宽的, 而且在很多采样系统中, 采样之前已对模拟信号进行了滤波, 所以被采样的信号一般都满足有限带宽的条件。

从图 1-8 中可以看出, 如采样频率满足

$$\omega_s \geq 2\omega_h \quad (1-6)$$

则可以避免混叠现象, 也就是可以通过采样后的信号不失真地恢复出原始信号。这就是香农采样定理。

量化过程中, 用有限定长的数码逼近实际信号的幅值而引入的误差就是量化误差。为了减小量化误差, 就要将数码字长选得足够大。但是, 这样就必然要增加计算机硬件的开销和程序运行时间。因此, 选择合适的字长, 使量化误差限制在满足系统要求的范围, 又不致过多增加计算机软、硬件开销是十分重要的。

1.3 保持器

在计算机控制系统中, 被控对象往往只能接受模拟信号, 这样就需要把数字信号转换成模拟信号。这一过程恰好是采样过程的逆过程。保持器的作用就是把时间上离散的信号重构成连续信号, 其原理如图 1-9 所示。

保持器的输入在 kT 时刻为 $x^*(kT)$, 在 $(k+1)T$ 时刻为 $x^*[(k+1)T]$ 。保持器的作用就是根据 kT 及 kT 以前的输入值确定 kT 到 $(k+1)T$ 时刻之间的输出。这个问题在数学上称为插值问题。工程上常用的方法是采样多项式外推公式

$$y(kT + \Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2\Delta t^2 + \cdots + a_m\Delta t^m \quad (1-7)$$

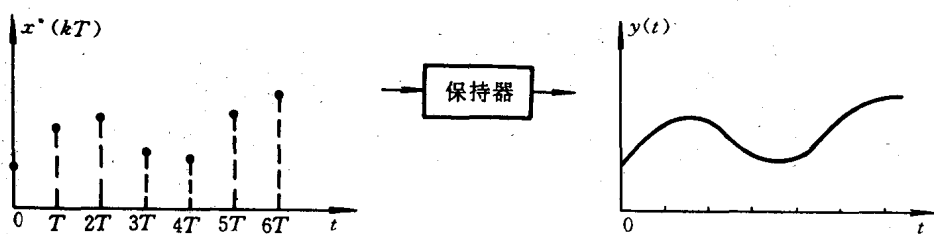


图 1-9 保持器的作用

式中, $0 \leq \Delta t < T$, 系数 $a_0, a_1, \dots, a_m$ 是由过去时刻的输入值 $x^*(kT), x^*(kT-T), \dots, x^*(kT-mT)$ 所确定的。

1.3.1 零阶保持器

零阶保持器的外推公式为

$$y(kT + \Delta t) = a_0 \quad (1-8)$$

显然, 当 $\Delta t=0$ 时, 保持器输出等于输入, 故

$$y(kT + \Delta t) = x^*(kT) \quad 0 \leq \Delta t < T \quad (1-9)$$

从上式可见, 零阶保持器的作用是把 kT 时刻的值保持到下一采样时刻到来之前。或者说, 它是按恒值外推。其输入输出关系见图 1-10。

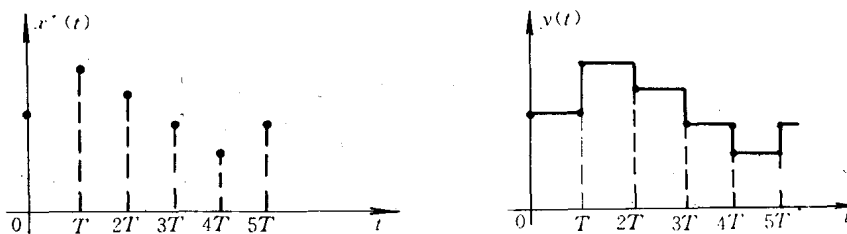


图 1-10 零阶保持器

为了分析保持器的动态特性, 我们推导保持器的传递函数。在这里, 通过求保持器的脉冲响应函数来求它的传递函数。

当零阶保持器输入一个单位脉冲 $\delta(t)$ 时, 它的输出根据式 (1-9) 应为一宽为 T , 幅值为 1 的脉冲, 如图 1-11 所示。该脉冲可以看作如下两个单位阶跃函数的叠加

$$y(t) = u(t) - u(t - T) \quad (1-10)$$

对上式两边取拉氏变换

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) \quad (1-11)$$

而输入的拉氏变换为

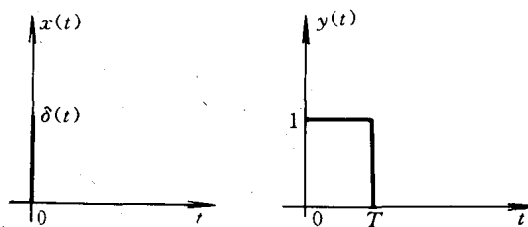


图 1-11 零阶保持器的单位脉冲响应

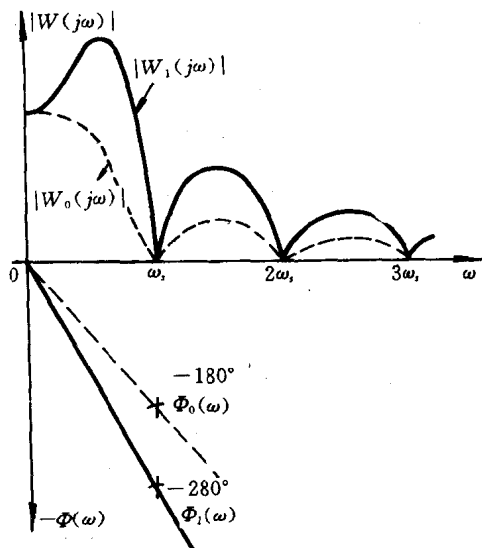
$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (1-12)$$

所以,零阶保持器的传递函数为

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (1-13)$$

其频率特性为

$$W_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \angle -\frac{\omega T}{2} \quad (1-14)$$



根据上式可以画出零阶保持器的幅频特性和相频特性,见图 1-12。

1.3.2 一阶保持器

一阶保持器的外推公式为

$$y(kT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t \quad (1-15)$$

当 $\Delta t=0$ 和 $\Delta t=-T$ 时,保持器的输出分别为

$$y(kT) = x^*(kT) = a_0 \quad (1-16)$$

$$y(kT - T) = a_0 - a_1 T \quad (1-17)$$

同时,使 $\Delta t=-T$ 时,

$$y(kT - T) = x^*(kT - T) \quad (1-18)$$

解上述三式可得

$$a_0 = x^*(kT) \quad (1-19)$$

$$a_1 = \frac{1}{T} [x^*(kT) - x^*(kT - T)] \quad (1-20)$$

所以

$$y(kT + \Delta t) = x^*(kT) + \frac{x^*(kT) - x^*(kT - T)}{T} \cdot \Delta t \quad (1-21)$$

式(1-21)就是一阶保持器的输出信号表达式。

其输入输出关系见图 1-13。从图中可以看出,一阶保持器是利用过去两个采样时刻的序列值进行线性外推,其斜率为

$$\frac{x^*(kT) - x^*(kT - T)}{T} \quad (1-22)$$

和零阶保持器一样,可以通过求其单位脉冲响应来求它的传递函数。令输入 $x(t) = \delta(t)$, 可以求得

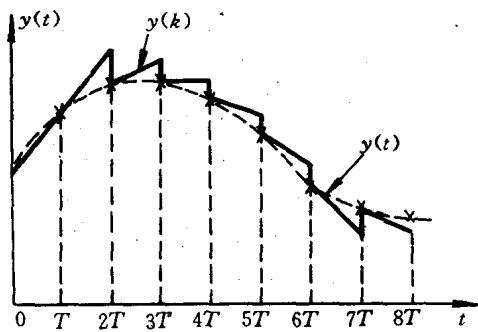


图 1-13 一阶保持器输入输出关系

$$\begin{aligned}
 y_0(t) &= x^*(0) + \frac{x^*(0) - x^*(-T)}{T}t \\
 &= 1 + \frac{1-0}{T}t = 1 + \frac{t}{T} \quad 0 \leq t < T
 \end{aligned} \tag{1-23}$$

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= x^*(T) + \frac{x^*(T) - x^*(0)}{T}(t-T) \\
 &= 0 + \frac{0-1}{T}(t-T) = 1 - \frac{t}{T} \quad T \leq t < 2T
 \end{aligned} \tag{1-24}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= x^*(2T) + \frac{x^*(2T) - x^*(T)}{T}(t-2T) \\
 &= 0 \quad 2T \leq t < 3T
 \end{aligned} \tag{1-25}$$

当 $k > 2$ 时, $y_k(t) = 0$ 。归纳上述三个时刻的关系, 可以写出一阶保持器的脉冲响应表达式

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (1 + \frac{t}{T})u(t) - (1 + \frac{t}{T})u(t-T) + (1 - \frac{t}{T})u(t-T) \\
 &\quad - (1 - \frac{t}{T})u(t-2T)
 \end{aligned} \tag{1-26}$$

式中, $u(t-kT)$ 是 kT 时刻输入到保持器的单位阶跃函数, 即

$$u(t-kT) = \begin{cases} 1 & t \geq kT \\ 0 & t < kT \end{cases} \tag{1-27}$$

式(1-26)可以进一步简化为

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (1 + \frac{t}{T})u(t) - \frac{2t}{T}u(t-T) - (1 - \frac{t}{T})u(t-2T) \\
 &= (1 + \frac{t}{T})u(t) - 2(1 + \frac{t-T}{T})u(t-T) + (\frac{t-2T}{T})u(t-2T)
 \end{aligned} \tag{1-28}$$

对上式两边取拉氏变换, 得

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2T} - \frac{2}{s}e^{-Ts} - \frac{2}{s^2T}e^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-2Ts} + \frac{1}{s^2T}e^{-2Ts} \tag{1-29}$$

因为

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \tag{1-30}$$

所以, 一阶保持器的传递函数为

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= Y(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2T} \right) (1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts}) \\
 &= \frac{1+Ts}{Ts} \cdot \frac{(1-e^{-Ts})^2}{s}
 \end{aligned} \tag{1-31}$$

其频率特性为

$$W_1(j\omega) = T \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right]^2 \angle -\omega T + \arctg \omega T \tag{1-32}$$

一阶保持器与零阶保持器相比, 相位滞后较大, 对系统稳定性不利, 加上硬件实现比较困难, 所以工程上一般采用零阶保持器较多。

2 线性离散系统的数学描述

线性连续系统在时域上可以用微分方程或状态方程来描述,通过变换可以把时域描述变换为复数域的数学描述,即用传递函数表示系统的动力学特性。类似地,线性离散系统的数学描述也可以分为时域描述和复数域描述。本章将介绍线性离散系统的差分方程和离散状态方程这两种时域描述方法,并介绍用于离散系统的重要数学工具—— z 变换法。通过 z 变换可导出线性离散系统的复数域描述 z 传递函数。

2.1 线性常系数差分方程

2.1.1 数字信号的描述

在离散时间系统中所涉及的数字信号总是以序列形式出现的

$$\{x_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\} \quad (2-1)$$

每个元素 a_k 表示在采样时刻 kT (T 为采样间隔)对一个信号进行采样所得到的值。因此,对于固定周期 T 的采样值可以表示如下

$$\{a_k\} = \{a(0), a(T), a(2T), \dots, a(kT), \dots\} \quad (2-2)$$

在连续系统的研究中,常常用到 δ 函数,其定义是

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

它表示一个位于 $t=0$ 时刻的单位脉冲^①。在 $t=kT$ 时刻的单位脉冲,则可以用下式表示

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases} \quad (2-3)$$

引入这个函数后,数列在时间上的特性可以用下述数学方法描述

对于一个在 kT 时刻的数列的值,可以用该时刻的数列元素乘以 $\delta(t - kT)$ 来表示

$$a(kT) = a(kT)\delta(t - kT) \quad (2-4)$$

因为 $\delta(t - kT)$ 只在 $t = kT$ 时为1,其余时刻均为零,这就反映函数列的时序性。那么,整个数列 $\{a_k\}$ 在不同时刻的值就可以用一个和式来表示

$$\begin{aligned} \{a_k\} &= a_0\delta(t) + a_1\delta(t - T) + a_2\delta(t - 2T) + \dots \\ &\quad + a_k\delta(t - kT) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (2-5)$$

2.1.2 线性时不变系统

离散系统的输入是离散序列 $u(k)$,输出是离散序列 $y(k)$,其中 k 是采样时刻 kT 的

^① 在有些书中,单位脉冲函数和单位冲激函数有不同的定义。前者指具有一定宽度,重量为1的方波脉冲,后者是前者在宽度趋于零,重量保持为1的极限,即此处定义的 δ 函数。实际上,前者是一个工程上可以实现的函数,后者是数学上的抽象。本书统称为脉冲函数。