最佳过程的数学理论

〔苏联〕Л. С. 庞特里雅金等著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

最佳过程的数学理論

〔苏联〕Л. С. 龐特里雅金等 著

譯　者

陈祖浩　賀建勛　黄光远　汪超群

校　者

張学銘　李訓經　陈美廉

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是阐述最佳控制过程数学理论的一部专著. 全书共分七章. 前二章系统地提出了最佳控制问题的数学模型; 严谨地叙述并论证了庞特里雅金“最大原则”. 第三章详细讨论线性最佳快速作用过程. 第四、六、七各章应用“最大原则”对最佳控制理论中不同类型的问题给予了解答. 在第五章中指出了“最大原则”和古典变分学之间的联系.

本书可供综合大学数学系教师、研究生及高年级学生作为学习和研究最佳控制过程中数学理论的入门, 也可供力学、无线电技术、自动调节及自动控制技术的研究工作者、工程师、技术人员, 以及工科学校有关专业的师生参考.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский,
Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко

Физматгиз, 1961

最佳过程的数学理论

陈祖浩 贺建勋 黄光远 汪超群 译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.5 字数 280,000
1965 年 12 月第 1 版 1981 年 6 月第 2 次印刷
印数 2,401—6,900

书号: 13119·677 定价: (科四) 1.20 元

目　录

再版前言

在技术中发生的物理过程，通常是可控制的，亦卽它們能依人們的意愿而用不同的方法来予以实現．因此，就产生了寻找在某种意义下最好的，或所謂最佳的控制过程的問題．例如，所指的可能是快速作用意义下的最佳性，卽要在最短的时間內达到过程的目的，也可能是以最少的能量消耗达到这个目的等等．这些問題在数学上表述为变分学問題，而其实，变分学本身也是淵源于这些問題的．但是，古典的变分学并不能解决近代技术中一系列重要的变分問題．在这里所闡明的相当数量的非古典变分問題的解法是本书作者們得出的．这种解法的主要特点是一个統一的数学法則，我們称之为最大原則．以后将指出，从最大原則可以推出（带常微商的）古典变分学的全部基本的必要条件（参看第五章）．

我們在这里考虑这样一些受控过程，它們可以由常微分方程組

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,\ \cdots,\ x^n,\ u^1,\ \cdots,\ u^r),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1}$$

来描述，这里 $x^1, \cdots, x^n$ 是刻划过程的量，也就是确定受控对象在每一时刻 t 的状态的相坐标；$u^1, \cdots, u^r$ 是确定过程进程的控制参数；而 t 是时間．为了使受控过程(1)的进程在时間的某一閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上确定，只要在这个时間的閉区間上給出（作为时間 t 之函数的）控制参数 $u^1, \cdots, u^r$:

$$u^j=u^j(t),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ r. \tag{2}$$

这时，当給定初始值

$$x^i(t_0)=x_0^i,\quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{3}$$

时，就唯一地确定出方程組(1)的解．所需求解的与受控过程(1)相联系的变分問題如下：考虑积分形泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)\,dt, \tag{4}$$

这里 $f^0(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)$ 是給定的函数. 对于每一个在某一閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上給定的控制(2), 唯一确定了一个受控过程的进程, 并且使积分(4)取确定的值. 假定存在着一个把受控对象从給定初相状态(3)轉移到指定終相状态

$$x^i(t_1)=x_1^i, \quad i=1, \cdots, n \tag{5}$$

的控制(2), 要寻找控制

$$\bar{u}^j(t), \ j=1, \cdots, r, \tag{6}$$

使受控对象从状态(3)到状态(5)的轉移得以实现, 而且使泛函(4)取最小值. 在所考慮的問題的提法中, 时間 t_0 和 t_1 是沒有加以固定的, 我們只要求对象在初始时刻处于状态(3), 而在終止时刻处于状态(5), 并使泛函达到最小值. (时刻 t_0, t_1 固定的情形, 同样也是有意义的, 但容易把它化为这里所叙述的問題, 参看 §8.) 特别地, 当定义泛函(4)的函数 $f^0(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)$ 恒等于1时, 泛函(4)就取值 t_1-t_0, 而我們的变分問題也就变为快速作用的最佳問題了.

在技术問題中, 当控制参数 $u^1, \cdots, u^r$ 是确定机器操纵器的位置时, 这些参数就不能任意取値, 而必須受到某些限制. 按照由系統(1)所描述的机械本身的結构, 譬如說, 参数 u^1 可能只取满足条件

$$|u^1| \leqslant 1 \tag{7}$$

的値, 或者, 若参数 u^1, u^2 表示平面上模不超过1而方向任意的向量, 則这些参数应满足条件

$$(u^1)^2+(u^2)^2 \leqslant 1. \tag{8}$$

由此, 一般地应认为, 点 $(u^1, \cdots, u^r)$ 是属于具有坐标 $u^1, \cdots, u^r$ 的空間的某个集 U, 而这个集的选擇应反映出对象(1)的特点. 在問題的数学提法上, 可认为集 U (“控制域”) 是任意的, 但是对技术問題来說, 集 U 为閉的情形(参照不等式(7), (8)) 却是特别重要和有代表性的. 这个条件意味着, 可允許操纵器达到它的边界位

置(在不等式(7)中是取 $u^1=\pm 1$ 的值,或者,是圓域(8)的边界点),在特殊情形下,边界位置还能給出最佳控制. 正是这种情形,使所研究的变分問題成为非古典的,因为在古典变分学中,可变的参数不能滿足包含有等号的形如(7)或(8)的不等式.

特别清楚地显示出我們的变分問題之非古典特征的,是系統(1)的快速作用最佳問題,即,系統(1)的右端是变量 $x^1, \cdots, x^n$, $u^1, \cdots, u^r$ 的常系数綫性函数,而集 U 是閉凸多面体,例如,由不等式

$$|u^j| \leqslant 1, \quad j=1, \cdots, r,$$

所定义的方体. 在这种情形下,最佳控制(6)是由点 $(u^1(t), \cdots, u^r(t))$ 依次地位于多面体 U 之不同頂点来实現的. 受控点从一个頂点跳跃到另一个頂点的法則給出了最佳控制的規律. 在第三章中,我們根据一般的方法解出了这种有重要技术应用的綫性变分問題. 但是古典方法对于这样的問題却是完全无能为力的.

从上述关于最佳控制的点由多面体 U 的一个頂点跳跃到另一个頂点的事实可知,不能认为容許控制(2)的类是由連續函数所組成的. 我們通常假定,它是由逐段連續的函数所組成,而相坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 是时間 t 的連續且逐段可微的函数. 在这些假定之下,最佳性的必要条件表述为**最大原則**(参看第一章),在第二章給出了它的証明.

如果所考虑的对象是力学系統,则相坐标的一部分 $x^1, \cdots, x^k$ 描述它的几何位置,而另一部分 $x^{k+1}, \cdots, x^{2k}(2k=n)$ 描述它的速度. 这时在某些問題中,受控过程的目的可以不是使对象到达相空間的一个确定的点 $(x_1^1, \cdots, x_1^n)$,而是使力学系統以任意有限的速度达到某个确定的空間位置 $(x_1^1, \cdots, x_1^k)$. 因此,这里又出現了一个变分問題:对象从相空間的一个确定的初始点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 到达由方程

$$x^1=x_1^1, \cdots, x^k=x_1^k$$

所确定的 k 維平面上任意一点的最佳轉移的变分問題. 可以看到,原先所叙述的最佳問題还不能包括一系列重要的問題. 由于

这个緣故，在第一章§6里討論了对象从相空間的点的某个初始流形 M_0 到某个終止流形 M_1 的最佳轉移問題，而流形 M_0 和 M_1 的維数是任意的(特别地，当它們都等于零时，就得到了原来的問題)．

显然，由于技术問題本身的特征，不仅对象的控制参数，而且对象的相坐标有时也应受到某些限制．譬如，如果我們討論飞机的飞行，x^1 表示它离开地面的高度，則应成立不等式 $x^1 \geqslant h > 0$，这里 h 是飞行的最低容許高度．不等式 $x^1 \geqslant h$ 既不能从方程組(1)的性质，也不能从加在控制参数上的不等式推出，而是完全独立的．描述对象的相空間的点必須在整个时間內都停留在相空間的某一閉域 G 內的这种最佳控制問題，将在第六章中解出．这时，假定域 G 有着分片光滑的边界．在这些条件下，对象的运动，一部分是在域 G 的內部进行，这时它服从通常的最大原則；一部分是沿着域 G 的边界进行，这时它服从复杂的最大原則．对象从 G 內部的軌綫段轉移到 G 边界上的軌綫段时，服从于特殊的法則，它类似于光的折射律，而且在某种意义上讲，它还是折射律的推广．

迄今为止，所讲的是关于使对象到达相空間內給定点或者給定子流形上的最佳控制問題．但也可以有最佳地到达相空間內某一动点的最佳控制問題．設在相空間內有一动点

$$x^i = \theta^i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

于是产生了将对象(1)最佳地引导到与动点(9)相重合的問題．只要引进新的变量

$$y^i = x^i - \theta^i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

就容易把这一問題归結为已考虑过的情形．在这一变换下，受控系統(1)变成新的非自治系統，而控制过程的目的变为使新的对象 $(y^1, \cdots, y^n)$ 达到相空間內不动点 $(0, \cdots, 0)$．因为容易把前述的基本結果推广到非自治的控制过程上去(参看§7)，所以問題也就获得了解决．

在这里，我們假定了被追踪的点(9)的运动在所考虑的整个时

间区间上是事先确定的. 但当被追踪对象的运动事先并不知道，而只能逐渐地接收到它运动的信息时，就产生了一个完全新的而且在实践上很重要的问题. 为了解这样一个问题，必须掌握有关被追踪对象性状的某些资料. 极其重要的是这样一种情形：被追踪对象本身也是受控的，它的运动由方程组

$$\frac{dz^i}{dt}=g^i(z^1, \cdots, z^n, v', \cdots, v^s), \ i=1, \cdots, n \tag{10}$$

描述. 问题是：知道了被追踪对象的技术能力(亦即，知道了方程组(10))和它在给定时刻的位置，要求确定追踪对象在同一时刻上的控制，使追踪以最佳方式实现. 这样提出的问题在本书未涉及的微分对策理论中讨论. 在第七章中解决了另一个追踪问题，那就是假定被追踪对象在初始时刻的位置已知，而它随后的性状是用概率形式来描述的，即假定它的运动是马尔可夫过程. 在这些假设下，我们要寻找追踪对象(1)的一个控制，使得在这个控制下，对象(1)的某个小邻域与被追踪对象相遇的概率最大.

本书第一版出版七年来，最大原则因找到了大量的应用而被证明是有效的. 因此，现在值得对它的特征、起源和证明说几句话 .为确定起见，我们仅限于讨论快速作用问题. 正是针对这种情况，最大原则作为猜想而被 Л. С. 庞特里雅金提出来的.

它的实质如下. 对于在闭区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上给定的每一容许控制 $u^1(t), \cdots, u^r(t)$ 和相空间中的任一常向量 ψ，以一定的方式确定变量 t, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$，和容许控制参数的一个函数

$$H(t, u^1, \cdots, u^r).$$

我们将会知道，如果所取的控制是最佳的，就存在这样的向量 $\psi\neq 0$，使得对每个固定的值 t, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$，作为容许控制参数的函数 H，将在 $u^j=u^j(t)$, $j=1, \cdots, r$，处达到最大值. 由此可见，最大原则中不仅是对邻近的控制来比较 H 的值. 这就是最大原则区别于变分学古典定理的所在，也是它强有力和较难证明的所在.

最大原则的第一个证明，是 Р. В. 加姆克来列采

(Р. В. Гамкрелидзе) 就线性系统给出的. 他建立了这类系统的完整理论. 他的证明思想如下：我们认为所考虑的最佳控制把点 x_0 转移到点 x_1. 如果用在上述闭区间上给定的任一容许控制来代替最佳控制，那末它把点 x_0 转移到点 $x(t_1)$. 由于线性性，所得到的点 $x(t_1)$ 的全体组成凸体 P. 由原控制的最佳性推出，点 x_1 位于凸体 P 的边界上. 因此，过点 x_1 存在凸体 P 的支持超平面. 而垂直于该平面且指向凸体 P 外侧的向量 ψ，就是在构造函数 H 时所用的向量.

对于非线性控制系统，用所有可能的容许控制所得到的点 $x(t_1)$ 所成的集，是非凸的且是无界的. 为使问题线性化，利用与最佳控制差别较小的控制是不适应于最大原则特点的. 关于一般的非线性情形的最大原则是巴尔强斯基(В. Г. Болтянский)证明的，于是建立了最佳控制非线性理论的基础. 正是，为了选取与最佳控制相比较的控制，他利用了马克申(E. J. Mcshane)变分，即把那些在有限个小的时间区间与最佳控制有任意偏离的控制考虑为容许控制. 利用这样一种方法就可把问题线性化：相应于上面所给控制的点 $x(t_1)$ 所成的集，虽然不是凸的，却近乎凸的，这样就有建立支持超平面和垂直于它的向量 ψ 之可能性.

Л. С. 庞特里雅金

1968 年 11 月

第一章 最大原則

§1 容許控制

我們将研究这样一种对象的性态，这种对象在每一瞬刻的状态是用 n 个实数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$（例如，可以是坐标和速度）来刻划的．向量变量 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的向量空間 X 是所研究对象的相空間．从数学观点来看，对象的性态（运动）就是变量 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 随时間的变化．假設对象的运动是可控制的，也就是在对象上安装着某一种“操纵器”，对象的运动依賴于这“操纵器”的位置．“操纵器”的位置用某一**控制域** U 中的点来表征，而 U 可以是某一 r 維欧氏空間 E_r 内的任一集合；給定了点 $u=(u^1, u^2, \cdots, u^r)\in U$，就相当于給定了一組数值参数 $u^1, u^2, \cdots, u^r$．在应用中，重要的是 U 为空間 E_r 内的一个閉域的情形．特别地，控制域 U 可以是变量 $u^1, u^2, \cdots, u^r$ 的 r 維空間内的一个方体：

$$|u^j|\leqslant 1, \quad j=1, 2, \cdots, r, \tag{1}$$

或者是这个 r 維空間内的任何其他的有界閉集．考虑（在变量 $u^1, u^2, \cdots, u^r$ 空間内）有界的和閉的控制域 U 的物理意义是十分清楚的：因为供給发动机的燃料的数量，温度，电流强度，电压等等都可以作为控制参数 $u^1, u^2, \cdots, u^r$，而这些量都不能取任意大的值．此外，由于对象可控制部分的机械結构方面的原因，控制参数 $u^1, u^2, \cdots, u^r$ 之間可能存在着用一个或数个方程 $\varphi(u^1, u^2, \cdots, u^r)=0$ 来表示的关系．在这种場合下，控制域 U 在几何上可能有着一定程度的复杂性．例如，假若是两个控制参数 u^1, u^2，而由于对象的結构，它們具有 $u^1=\cos\varphi$, $u^2=\sin\varphi$ 的形式，其中 φ 是某一个（任意給定的）角度，那末控制域就是圓周

$$(u^1)^2+(u^2)^2=1. \tag{2}$$

今后,我們将簡单地說控制域 U 和它的点 $u\in U$, 这就是說, U 是变量 $u^1, u^2, \cdots, u^r$ 的空間內某一集合,而它的“点” u 就是 U 內任意一組控制参数$(u^1, u^2, \cdots, u^r)$(例如,参看(1)或(2))

我們称定义在时間 t 的某一閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上, 并在控制域 U 內取值的每一个函数 $u=u(t)$ 为一个**控制**. 因为 U 是控制参数 $u^1, u^2, \cdots, u^r$ 空間內的一个集合,故每一个控制

$$u(t)=(u^1(t), u^2(t), \cdots, u^r(t))$$

都是一个向量函数(給定在閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上), 它的值在控制域 U 內. 今后,根据所提問題的特征,我們要对控制 $u(t)$加上不同的限制(逐段連續, 逐段可微等等). 满足这些条件的控制称为**容許控制**. 在这一章里,我們假定容許控制是任何逐段連續的控制(在控制域內取值),即这样的控制 $u=u(t)$, 它們除有限个时刻外,对所考慮的全部时間 t 都是連續的,而在这些例外的时刻上, $u(t)$可有第一类間断. 为避免誤解起見,我們指出,按第一类間断点的定义,在間断点 τ 处假定存在着有限的极限

$$u(\tau-0)=\lim_{\substack{t\to\tau\\ t<\tau}} u(t), \quad u(\tau+0)=\lim_{\substack{t\to\tau\\ t>\tau}} u(t).$$

特别,由此可知每一个控制 $u(t)$都是有界的(即使区域 U 不是有界的).

逐段連續的控制 $u(t)$ 在間断点上的值, 在以后并不起任何重要的作用; 但是为了确定起見, 我們不妨假定, 在每一个間断点 τ 上控制 $u(t)$的值等于左极限:

$$u(\tau)=u(\tau-0), \tag{3}$$

并設所考慮的每一个控制 $u(t)$, 在它有定义的閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 的端点处是連續的.

总之,在这一章里,我們約定称这样的控制为**容許控制**: 它是在控制域 U 內取值的任一逐段連續函数 $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$,在間断点上满足条件 (3), 并在其有定义的閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 的端点处是連續的. 逐段連續的控制相当于假定了操纵器是“无慣性”的, 因为函数 $u(t)$ 的值(在間断时刻)能够从控制域的一个点立即跳到另一

点. 这类容許控制对本书所述理論的技术应用来讲，或許是最为重要的.

§ 2 基本問題的提法

我們假定对象运动的規律(及“操纵器”对这对象运动的作用規律)由如下形式的微分方程組描述:

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ u^1,\ \cdots,\ u^r)=f^i(x,\ u),$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{4}$$

它的向量形式是

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ u), \tag{5}$$

这里 $f(x,\ u)$ 是具有坐标

$$f^1(x,\ u),\ f^2(x,\ u),\ \cdots,\ f^n(x,\ u)$$

的一个向量. 对向量变量 $x\in X$ 的任何一个值和属于控制域 U 的值 u,函数 f^i 是有定义的. 假設它們对于变量 $x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ u$ 的总体是連續的,对于变量 $x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n$ 是連續可微的. 換句話說,函数

$$f^i(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ u)\ \text{和}\ \frac{\partial f^i(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ u)}{\partial x^j};$$
$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

在直积 $X\times U$ 上有定义且是連續的.

注意，方程(4)是**自治的**，即它的右端不明显地依賴于时間 t. 在右端依賴于 t 的情形,我們将在以后討論(参看 § 7).

如果已給定了控制規律，也即已选定了某一个容許控制 $u=u(t)$,那末方程(5)取形式:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ u(t)), \tag{6}$$

从而（在任意的初始条件 $x(t_0)=x_0$ 下）唯一地确定了对象的运动規律 $x=x(t)$，即方程(6)的解，它在时間的某个閉区間上有定义. 就是說，如果在閉区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上給定了控制 $u(t)$，而

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 是它的間断点（第一类），并且 $t_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_k<t_1$，我們首先在閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ 上考察方程(6)，这时它的右端是連續的．用 $x(t)$ 表示这方程具初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解．如果这个解在整个閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ 上是确定的，且在点 θ_1 上的值为 $x(\theta_1)$，則我們可在閉区間 $\theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2$ 上用 $x(\theta_1)$ 为初始值来考察方程(6)，这个解仍用 $x(t)$ 来表示．如此，所作出的解在它有定义的所有点上，包括在"联結点" θ_1 上，是連續的．現在，如果解 $x(t)$ 已在整个閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_2$ 上有定义，且在点 θ_2 之值为 $x(\theta_2)$，則可在閉区間 $\theta_2 \leqslant t \leqslant \theta_3$ 上以 $x(\theta_2)$ 为初始值来考察方程(6)，如此继續下去．用这种方法所得到的方程(6)的解 $x(t)$ 是連續的和逐段可微的，也就是，在除去 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 以外的所有点上，解 $x(t)$（在它有定义的地方）是連續可微的．我們称所作出的解 $x(t)$ 为方程組(4)（或方程(5)）在初始条件 $x(t_0)=x_0$ 下，对应于控制 $u(t)$ 的解．这个解可能并不在給定控制 $u(t)$ 的整个閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上有定义（它可能趋向于无穷）．

如果对应于容許控制 $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，方程(5)（或即(6)）满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$，在整个閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上有定义，且在时刻 t_1 通过点 x_1，也即满足終值条件 $x(t_1)=x_1$，則我們就說，容許控制 $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，把相点从位置 x_0 轉移到位置 x_1．

現在假設还給定了一个函数 $f^0(x^1, x^2, \cdots, x^n, u)=f^0(x, u)$，$f^0$ 及其偏导数 $\dfrac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i=1, 2, \cdots, n$，在整个空間 $X \times U$ 上有定义且是連續的．这时，寻求最佳控制的基本問題可表述如下：

在相空間 X 內給定了两个点 x_0 和 x_1．在所有能把相点从位置 x_0 轉移到位置 x_1 的容許控制中（如果这样的控制存在的話），寻找这样一个容許控制，它使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt \tag{7}$$

取最小的可能值．这里 $x(t)$ 是方程(5)对应于控制 $u(t)$ 的具初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，而 t_1 是这个解通过点 x_1 的时刻．

应注意，(当固定 x_0, x_1 时)积分 (7) 中的下限 t_0 和上限 t_1 并不是固定的数，而是依赖于把相点从位置 x_0 轉移到位置 x_1 的控制 $u(t)$ 的选擇的 (这两积分限由关系式 $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ 确定). 至于在积分限固定时問題的解法，我們将在以后讲到(参看§8).

給出上面所提問題的解的控制 $u(t)$ 称为对应于把相点从位置 x_0 轉移到位置 x_1 的**最佳控制**，而称对应的軌綫 $x(t)$ 是**最佳軌綫**. 因此基本問題是寻找最佳控制(和对应的最佳軌綫)的問題.

上面所提最佳問題的重要特例是 $f^0(x, u)\equiv 1$ 的情形，这时泛函(7)取形式:

$$J=t_1-t_0, \tag{8}$$

而控制 $u(t)$ 的最佳性就意味着，从位置 x_0 到位置 x_1 的轉移时間最小. 在这种情形下，我們称寻找最佳控制(和最佳軌綫)的問題为最佳快速作用問題.

为了便于表述和証明最佳性的必要条件，我們将上面的問題改用另一种提法. 这就是，在依規律(4)变化的相坐标 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 之外再增加一个新的坐标 x^0，它的变化規律是

$$\frac{dx^0}{dt}=f^0(x^1, x^2, \cdots, x^n, u),$$

这里 f^0 是泛函 J 的定义中出現的函数(参看(7)). 换句話說，我們要討論微分方程組

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)=f^i(x, u),$$
$$i=0, 1, 2, \cdots, n, \tag{9}$$

它的右端不依賴于变量 x^0. 引进 $n+1$ 維向量空間 $\boldsymbol{X}$ 内的向量

$$\boldsymbol{x}=(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n)=(x^0, x),$$

我們可把方程組(9)改写为向量形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(x, u), \tag{10}$$

这里 $\boldsymbol{f}(x, u)$ 是空間 $\boldsymbol{X}$ 内坐标为 $f^0(x, u), \cdots, f^n(x, u)$ 的向量. 应注意 $\boldsymbol{f}(x, u)$ 并不依賴于向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 x^0.

現設 $u(t)$ 是把 x_0 轉移到 x_1 的一个容許控制，而 $x=x(t)$ 是对应的方程 (5) 具初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解．用 $\boldsymbol{x}_0$ 表示点 $(0, x_0)$，也即空間 $\boldsymbol{X}$ 中坐标为 $0, x_0^1, \cdots, x_0^n$ 的点，其中 $x_0^1, \cdots, x_0^n$ 是空間 X 中点 x_0 的坐标．这时很明显，方程(10)的对应于控制 $u(t)$ 具有初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解在整个閉区間 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上有定义，并具有形式

$$x^0=\int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t))\, dt,$$

$$x=x(t).$$

特別，当 $t=t_1$ 时得到

$$x^0=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt=J, \quad x=x_1,$$

也即，方程(10)具初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$，当 $t=t_1$ 时通过点 $\boldsymbol{x}=(J, x_1)$．換句話說，如用 Π 表示空間 $\boldsymbol{X}$ 中过点 $\boldsymbol{x}=(0,x_1)$ 且平行于 x^0 軸的一条直綫(这条直綫 Π 由点 (ξ, x_1) 的全体組成，其中 ξ 是任意的；图 1)，我們就可以說解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在时刻 $t=t_1$ 通过直綫 Π 上坐标为 $x^0=J$ 的点．反之，如果 $u(t)$ 是这样一个容許控制，使对应的方程(10)具初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0=(0, x_0)$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在某一时刻 t_1 通过坐标为 $x^0=J$ 的点 $\boldsymbol{x}_1 \in \Pi$，則控制 $u(t)$ 把相点从位置 x_0 轉移到位置 x_1 (在相空間 X 內)，而且泛函(7)取值 J.

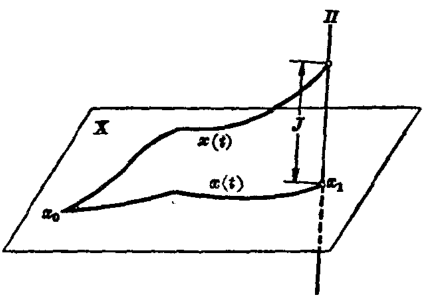

图 1

因此，我們可把前面所提的最佳問題表述成下面的等价形式．

在 $n+1$ 維相空間 $\boldsymbol{X}$ 中給定了点 $\boldsymbol{x}_0=(0, x_0)$ 和通过点 $(0, x_1)$ 且平行于 x^0 軸的直綫 Π．設容許控制 $u=u(t)$ 具有性质：对应于它的方程(10)具初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 与直綫 Π 相