# 計算方法

胡祖熾編

高等教育出版社

# 計算方法

胡祖熾編

高等教育出版社

本書是在1956－－1957学年北京大学数学力学系計算数学專业四年級同学学習的講义的基础上編写的。全書共分十一章，主要內容包括：方程的近似解法；綫性方程組，点插值，导数的近似計算，数值积分，一致、平方逼近，常、偏微分方程数值解法等。

本書可作为綜合性大学計算数学專业三、四年級的教材或參考書。

# 計 算 方 法

胡祖熾 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市書刊出版业營业許可証出字第054号）
京华印書局印装 新华書店發行

統一書号13010·617 开本850×1168 1/32 印張16 4/16 插頁2
字数388,000 印数00001—10000 定价（6）¥1.80
1959年5月第1版 1959年5月北京第1次印刷

# 序 言

为了准备为北京大学計算数学專业三、四年級学生开設“計算方法”課程，我們把过去的講稿加以删节、补充和整理，交付出版。因为我們实踐經驗不足，理論水平也低，所以它是一份不成熟的講稿。为了提高教学質量，使我們的培养計算数学干部的工作能够滿足祖国日益發展的計算数学事业的需要，我們迫切希望得到各方面同志的意見，以便改进我們的工作。正是因为这样，我們就把它出版了。

本書是为計算数学專业編写的教材，也可供計算工作者的参考。作为教材，我們只叙述了一些基本的概念和方法。本書中沒有叙述变分方法，但是我們認为計算数学工作者应該知道变分方法。关于变分方法，可参考 Л. В. Канторович 与 В. И. Крылов 合著的“高等分析的近似方法”第四版(1952 年)，第四章。

在这次整理講稿的过程中，除参考了書中各处指出的資料而外，我們学習了吉林大学苏联專家 И. П. Мысовский 的講义的前三章，并参考了中国科学院計算技术研究所編写的“計算方法講义”。

整理工作是在北京大学計算数学教研室全体同志的关心和帮助下完成的。

承高等教育出版社和印刷厂同志大力支持，使本書能在五月下旬出版，便利了我校学生的学習，为此深致感謝。

編 者

1959 年 4 月 12 日

# 目 录

# 第一章　用近似值进行計算

§1. 引言

人們在实际活动中所处理的数，往往是某一个物理量在一定“誤差范圍”以内的近似数值，例如量長度时的誤差范圍可以是 0.1 公分或 1 公尺，量溫度的誤差范圍可以是 0.1°C 等。另一方面，在实际計算工作中，特别是使用快速电子数字計算机进行計算时，总是用具有一定位数数字的有穷小数进行的。如果参予計算的数原本不是有穷小数，就要用它們的近似值进行計算。

一数的准确值 $x$ 与其近似值 $x^*$ 的差叫做近似值 $x^*$ 的**誤差**（更确切地說，应叫做 $x^*$ 的**絕对**誤差，見本章§3）。例如用 0.33 作为$\frac{1}{3}$的近似值时，誤差是

$$\frac{1}{3}-0.33(<0.005).$$

用近似值作計算，出来的結果也只能是近似的。因此我們的問題是：

1）怎样从原始数据的誤差估計出結果的誤差；

2）原始数据应当具有怎样的准确程度，結果的誤差才会不超过指定的范圍。

在本章§4中我們就一些簡單的运算討論这两个問題。

**§2. 誤差的来源**

使計算結果产生誤差的来源，可区分为下列四个方面。有时其中一个或几个方面的誤差可以忽略不計。但是一般来說，这四个方面的誤差都有，而且是相互影响着的。不能簡單地把計算結果的总誤差看作是这四方面誤差的簡單和数。

1）实际現象本身和它的数学描述之間的誤差。数学描述已經不是它所描述的对象的本身，而是一种理想化了的模型。这种誤差称做**描述誤差**。它屬于怎样更确切地建立有关的物理理論的問題。

2）在某一問題的数学描述中，总含有一些参量，例如長度、溫度等等。这些参量的值都由測量来测定。測量一个量的結果与該量本身的实际大小总是略有出入的。这个差别叫做該参量的**观測誤差**。如果微小的观測誤差使結果产生了巨大的誤差，那末我們用以求这个結果的計算方法（有时甚至原来問題的数学描述）就沒有意义了。我們希望当观測誤差控制在一定范圍以內时，計算結果的誤差也能控制在某个范圍之內。这就是这个問題的数学描述和其計算格式，是否能使其計算結果連續地依賴于这些参量的問題，这个問題可以叫做关于这些参量的稳定性問題。

3）許多数学問題中总含有一些超越运算，例如求正弦、求对数等等。有时問題的解答也是用无穷的步驟求得的。但是实际上我們不能完成无穷的步驟，我們只能用有穷的步驟去近似地完成它，从而获得解的近似值。这时产生的誤差叫做**截断誤差**。例如利用 $e^{-x}$ 的泰勒展开式

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\cdots$$

計算 $e^{-x}$ 时，若用

$$1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$$

作为近似值，其截断誤差就是

$$E(x)=\frac{1}{24}e^{-\xi}x^4,\ （\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之間}）.$$

4）在計算中，无穷小数总是用有穷小数代替的。有时一个有穷小数也要用位数較少的有穷小数代替。这里产生的誤差叫做**舍入誤差**。

通常有两种方法进行舍入。設

$$x = x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s} + \cdots$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_s, \cdots$，是 0, 1, 2, ⋯, 9 等十个整数之一。我們要把 $x$ 舍入成 $s$ 位小数的数。一种方法是把 $x$ 的第$(s+1)$位小数和以后的各位小数通通舍掉，得到

$$x^{**} = x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s},$$

用普通十进制小数的写法写出，就是 $x^{**} = 0.x_1 x_2 \cdots x_s$。这里誤差显然是

$$|x - x^{**}| < 10^{-s}.$$

另一种舍入的方法就是通常的四舍五入法。这就是說，我們把

$$x^* = \begin{cases} x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s}, & \text{当 } x_{s+1} < 5 \text{ 时}, \\ x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + (x_s + 1) \cdot 10^{-s}, & \text{当 } x_{s+1} \geqslant 5 \text{ 时}, \end{cases}$$

作为 $x$ 的近似值。同样，它的誤差是

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} 10^{-s}.$$

以后我們說到舍入时总指这种普通的四舍五入。

由于在計算过程中有舍入，計算結果的誤差要依賴于計算的程序。現在举一个簡單的例子来說明。我們規定两个两位小数的数的乘积都舍入成两位小数的数，記

$$a = 0.37,\ b = 0.26,\ c = 0.45.$$

并以$(ab)^*$記 $a$ 与 $b$ 的乘积 $ab$ 經舍入成两位小数的結果。于是

$$ab = 0.0962 \approx (ab)^* = 0.10,$$

$$(ab)^* c = 0.10 \times 0.45 = 0.0450 \approx ((ab)^* c)^* = 0.05;$$

而
$$bc = 0.1170 \approx (bc)^* = 0.12,$$

$$a(bc)^* = 0.37 \times 0.12 = 0.0444 \approx (a(bc)^*)^* = 0.04.$$

可見
$$((ab)^* c)^* \neq (a(bc)^*)^*,$$

就是說，計算結果依賴于計算的程序。

通常在計算一个問題时，首先原始数据就有观測誤差和舍入誤差。这些原始誤差要影响計算过程中每一步結果的准确程度。其次在每一步計算中，由于舍入或由于用有穷步驟代替超越运算，又产生了新的誤差。这些誤差和从上一步傳来的誤差联合在一起又傳播到下一步計算中去。最后，如果这問題的解是用无穷步驟表示出来的話，当計算結束时，还有截断誤差。

最后我們还指出，为明确計，我們不把抄写数据时和計算过程中由于不小心而产生的錯誤叫做誤差。进行計算和抄写时应仔細檢查，避免錯誤。

### §3. 絕对誤差与相对誤差·近似值的表示法·有效数字

为了說明近似值的准确程度，我們討論它的絕对誤差与相对誤差。

設 $x$ 是原来的数或是要測量的量的眞正大小，設 $x^*$ 是这数的近似值或測量出来的大小。我們定义

$$E(x^*)=x-x^* \tag{1}$$

为近似值 $x^*$ 的**絕对誤差**。通常我們无法准确地算出絕对誤差的眞值，我們只能去估計它的絕对值的范圍，也就是去估計 $|E(x^*)|$ 的上界（以后我們常簡称 $|E(x^*)|$ 的这个上界 $\Delta$ 为 $x^*$ 的最大絕对誤差，或更簡称为絕对誤差）。当然，我們总希望能把 $|E(x^*)|$ 的这个上界 $\Delta$ 尽可能定得小一些。

絕对誤差还不足以显示出近似值的准确程度。因为 1000 公斤重的物体的重量的絕对誤差是 200 公分与一个 10 公斤重的物体的重量的絕对誤差是 200 公分实在不能相提幷論。为了补救这个缺点，我們定义 $x$ 的近似值 $x^*$ 的**相对誤差**为

$$R(x^*)=\frac{E(x^*)}{x^*}=\frac{x-x^*}{x^*}=\frac{x}{x^*}-1. \tag{2}$$

相对誤差說明了 $x^*$ 的絕对誤差与 $x^*$ 本身比較起来所占到的比例，这使我們对 $x^*$ 的准确程度有了进一步的了解。

但是和絕对誤差一样，我們不能定出 $R(x^*)$ 的准确值，只能估計它的范圍，即估計

$$|R(x^*)| = \left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|$$

的上界 $\delta$。同样，我們总希望把这个上界 $\delta$ 定得尽可能小一些(以后常把这个上界称做 $x^*$ 的最大相对誤差，或更簡称为 $x^*$ 的相对誤差)。

注意，若写
$$x = x^* + dx^*,$$
即以 $dx^*$ 表示 $x^*$ 的絕对誤差，则 $x^*$ 的相对誤差是

$$R(x^*) = \frac{dx^*}{x^*} = d(\log x^*).$$

可見一近似量 $x^*$ 的相对誤差就是它的对数微分的值。

此外，我們还要注意絕对誤差常常是有量綱的量，而相对誤差則总是沒有量綱的。

**近似值的表示法与有效数字**　表示一个近似值时，当然希望能够同时指明它的准确程度。最直接的一种表示法就是同时写出近似值 $x^*$ 和它的絕对誤差的絕对值的上界 $\Delta$，表成

$$x = x^* \pm \Delta.$$

例如，$\pi = 3.14159265\cdots$，它的近似值 3.14159 的絕对誤差是 0.000003，因此，我們記

$$\pi = 3.14159 \pm 0.000003.$$

又如我們說一个圓杆的直徑 $r = 10.00 \pm 0.01$ 毫米，就是說，直徑的近似值 $r^*$ 是 10 毫米而誤差不超过 1% 毫米。

表示近似值的另一种方法是使用**有效数字**。通常近似值总是用有穷小数写出的。为了可以从近似值的有穷小数表示本身就能知道近似值的准确度，我們討論近似值的有效数字。

設有一数 $x$，經过四舍五入，得到它的近似值。

$$x^* = \pm(x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s}) \cdot 10^{\sigma}, \tag{3}$$

其中 $x_1 \neq 0$; $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 都是 0, 1, 2, $\cdots$, 9 这 10 个整数之一，$s$ 是正整数，$\sigma$ 是整数。用通常十进制小数写出就是

$$x^* = (\pm 0.\, x_1 x_2 \cdots x_s) \cdot 10^{\sigma}, \tag{4}$$

这里 $x^*$ 的絕对誤差是

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} 10^{\sigma - s}. \tag{5}$$

此时，我們說：$x^*$ 作为 $x$ 的近似值，具有 $s$ 位**有效数字**；而 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 就叫做 $x^*$ 的各位有效数字。

例如，圓周率 $\pi = 3.14159\cdots$ 的近似值 3.1416 具 5 位有效数字，而 3.14 具 3 位有效数字。

为簡便計，通常对于写出的具有旁位数字的数，从其最左面第一位不是 0 的数字起，到它最右面一位数字为止，都認为是有效数字。例如我們認为

0.0053, 0.123, 123.4

依次具有 2 位、3 位及 4 位有效数字；即認为它們的絕对誤差依次不超过 0.00005, 0.0005, 0.05。又当 0.0053 的絕对誤差不超过 0.000005 时，就把它記成 0.00530 以示区別。而 0.00530 又常記成 $5.30 \times 10^{-3}$，至于 0.0053 則記成 $5.3 \times 10^{-3}$。同样，如果只知道 300000 的絕对誤差不超过 500，就把它記作 $300 \times 10^3$ 或 $3.00 \times 10^5$ 以区別于絕对誤差不超过 0.5 的 300000。

例如，眞空中光速为

$$c = 299796 \pm 4 \text{ 公里/秒},$$

这就是說

$$299792 \text{ 公里/秒} \leqslant c \leqslant 299800 \text{ 公里/秒}. \tag{6}$$

若用 300000 公里/秒作为近似值，其絕对誤差 $c - 300000$ 滿足

$$-208\leqslant c-300000\leqslant -200,$$

所以不超过 500。于是应把这个近似值記作

$$300\times 10^3\text{ 公厘/秒, 或 }3.00\times 10^5\text{ 公里/秒}.$$

按定义，这个近似值具有三位有效数字。

这个例子也正好指出了用有效数字表示近似值的一个缺点：就是虽然已經知道光速 $c$ 与299796公里/秒的誤差上下不超过 4 公里/秒，我們却得不出 $c$ 的具 5 位有效数字表示的近似值。因为，若取 $c^*=29980\times 10$ 公里/秒，則表示眞值 $c$ 合于

$$299795\text{ 公里/秒}\leqslant c\leqslant 299805\text{ 公里/秒}.$$

但这不能完全包括眞值 $c$ 所在的范圍(6)；不符合原测定的結果同样，$c^*=29979\times 10$ 公里/秒也不能滿足这个要求。

我們可以得到 $c$ 的具 4 位有效数字的近似值 $c^*=2998\times 10^2$ 公里/秒。因为这表示

$$299750\text{ 公里/秒}\leqslant c\leqslant 299850\text{ 公里/秒}. \qquad (7)$$

这包含了眞值 $c$ 所在的范圍(6)。所以与测定結果符合，因而 $2998\times 10^2$ 公里/秒是 $c$ 的具 4 位有效数字的表示式。

但和測定結果 $299796\pm 4$ 公里/秒比較，近似值 $2998\times 10^2$ 公里/秒的誤差是太大了。因此，要表明測量出的結果的准确程度，对于这个例子就只能采用 $299796\pm 4$ 公里/秒这种表示法。

最后，为了方便，我們再引进一个名詞，在一个数的十进制表示中，除掉它最左面那些确定小数点的位置的 0 的各个数位都叫做**有效数位**，于是在

$$x=\pm 0.x_1x_2x_3\cdots\times 10^{\sigma}$$

中若 $x_1\neq 0$，我們就說，$x_1$ 所在的数位以及它右面的各个数位都是**有效数位**；至于这些数位上的数字是否是**有效数字**就必須按照前面有效数字的定义来确定。

一个近似值的有效数字表示，标明了这近似值的誤差是在它的第几个有效数位上的多少个單位，因此，它指出了該近似值的相对誤差。一个具 $s$ 位有效数字的近似值 $x^*$ 的相对誤差**最多**有多少呢？由(3)知

$$x_1\cdot 10^{\sigma-1}\leqslant|x^*|\leqslant(x_1+1)\cdot 10^{\sigma-1}, \tag{8}$$

所以 $x^*$ 的相对誤差

$$|R(x^*)|=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}10^{\sigma-s}}{x_1\cdot 10^{\sigma-1}}=\frac{1}{2x_1}\cdot 10^{-(s-1)}; \tag{9}$$

就是説，**具 $s$ 位有效数字的 $x^*$ 的相对誤差最多为 $\frac{1}{2x_1}\cdot 10^{-(s-1)}$。**

反过来我們再問，如果 $x$ 由(4)表示的近似値 $x^*$ 的相对誤差的一个上界是 $\delta$，能不能知道 $x^*$ **至少**具有多少位有效数字呢？已知

$$|R(x^*)|=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\delta,$$

故 $$|x-x^*|\leqslant|x^*|\delta,$$

由(8)可見 $$|x-x^*|\leqslant(x_1+1)\delta\cdot 10^{\sigma-1}. \tag{10}$$

因此，如果我們确定出一个尽可能最大的正整数 $s$ 使

$$(x_1+1)\delta\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{1-s} \tag{11}$$

成立，則由(10)有

$$|x-x^*|\leqslant 10^{\sigma}\times\frac{1}{2}10^{-s}, \tag{12}$$

就是説，**若 $s$ 是滿足(11)的最大的正整数，$x^*$ 的絕对誤差就不超过 $x^*$ 的第 $s$ 位有效数位上的半个單位；有时还能进一步把 $x^*$ 舍入成眞值 $x$ 的具 $s$ 位有效数字的近似値。**

例如，$A=\sqrt{\pi}=1.7725\cdots$ 的近似值 $A^*=1.78$ 的絕对誤差不超过 $A^*$ 的第 2 个有效数位上的半个單位，因 $|A-A^*|=0.0074\cdots<$ $<0.05$; 但是把 $A^*$ 舍入成 1.8 时，1.8 是 $A$ 的具 2 位有效数字的近似值，因 $|A-1.8|=0.0274\cdots<0.05$。

考查 $A$ 的近似值 $\tilde{A}^*=1.74$。$\tilde{A}^*$ 与 $A$ 的絕对誤差不超过 $\tilde{A}^*$ 的第 2 个有效数位上的半个單位，因为 $|A-\tilde{A}^*|=0.0325\cdots<$ $<0.05$。但是若把 $\tilde{A}^*$ 舍入成 1.7, 1.7 却不是 $A$ 的具 2 位有效数字的近似值，因为 $|A-1.7|=0.0725\cdots>0.05$。

还应該注意有效数字的另一个不利的情况。两个同样具有 $s$ 位有效数字的数的相对誤差可以相差 10 倍。例如，設

$$0.00101 \text{ 及 } 0.00999$$

都具有三位有效数字。前者相对誤差不超过 $\frac{0.5}{101}<0.5\%$，后者相对誤差却不超过 $\frac{0.5}{999}\approx0.05\%$。

## §4. 一些簡單运算的結果的誤差

### (一)加法与減法

設 $x_i$ 的近似值是 $x_i^*$, $i=1, 2, \cdots, N$。由于

$$\sum_{i=1}^{N} x_i-\sum_{i=1}^{N} x_i^*=\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_i^*) \tag{1}$$

及

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i-\sum_{i=1}^{N} x_i^*\right|\leqslant\sum_{i=1}^{N}|x_i-x_i^*|. \tag{2}$$

所以，**和的絕对誤差的絕对值不超过相加各項的絕对誤差的絕对值之和。**

又設 $x_i^*$ 都 $>0$, 和的相对誤差是

$$R\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^*\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-x_i^*)}{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^*}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^*}{\sum\limits_{k=1}^{N}x_k^*}\ \frac{x_i-x_i^*}{x_i^*}=\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^*}{\sum\limits_{k=1}^{N}x_k^*}R(x_i^*).$$

于是，由于 $x_i^*>0$, 所以

$$\left|R\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^*\right)\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}|R(x_i^*)|\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j^*}{\sum\limits_{k=1}^{N}x_k^*},$$

即
$$\left|R\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^*\right)\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}|R(x_i^*)|.\tag{3}$$

因此，**如果 $x_i^*$ 都 $>0$（都 $<0$ 时也一样），和的相对誤差的絕对值永不超过相加各項中最不准确的一項的相对誤差的絕对值。**

現在討論減法。設 $x$ 与 $y$ 的近似値为 $x^*$ 与 $y^*$，且 $x^*$ 与 $y^*$ 同号。由于

$$(x-y)-(x^*-y^*)=(x-x^*)-(y-y^*)\tag{4}$$

有
$$|(x-y)-(x^*-y^*)|\leqslant|x-x^*|+|y-y^*|.\tag{5}$$

所以，**兩数的差的絕对誤差的絕对値不超过这兩数的絕对誤差的絕对値之和。**

关于差的相对誤差就与和的情形大不相同。設

$$x^*>y^*>0.$$

$x^*-y^*$ 的相对誤差是