

計 算 方 法

胡 祖 熾 編

高 等 教 育 出 版 社

81
2



計 算 方 法

胡 祖 熾 編

高 等 教 育 出 版 社

本書是在 1956—1957 學年北京大學數學力學系計算數學專業四年級同學學習的講義的基礎上編寫的。全書共分十一章，主要內容包括：方程的近似解法；綫性方程組，點插值，導數的近似計算，數值積分，一致、平方逼近，常、偏微分方程數值解法等。

本書可作為綜合性大學計算數學專業三、四年級的教材或參考書。

計 算 方 法

胡祖熾編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

京華印書局印裝 新華書店發行

統一書號13.10·617 開本850×1168¹/₃₂ 印張164¹/₁₆ 插頁2

字數388,000 印數00001—10000 定價(6) 1.80

1959年5月第1版 1959年5月北京第1次印刷

序 言

为了准备为北京大学計算数学专业三、四年級学生开设“計算方法”課程，我們把过去的講稿加以删节、补充和整理，交付出版。因为我們实践經驗不足，理論水平也低，所以它是一份不成熟的講稿。为了提高教学質量，使我們的培养計算数学干部的工作能够滿足祖国日益發展的計算数学事业的需要，我們迫切希望得到各方面同志的意見，以便改进我們的工作。正是因为这样，我們就把它出版了。

本書是为計算数学专业編写的教材，也可供計算工作者的参考。作为教材，我們只叙述了一些基本的概念和方法。本書中沒有叙述变分方法，但是我們認為計算数学工作者應該知道变分方法。关于变分方法，可参考 Л. В. Канторович 与 В. И. Крылов 合著的“高等分析的近似方法”第四版(1952年)，第四章。

在这次整理講稿的过程中，除参考了書中各处指出的資料而外，我們學習了吉林大学苏联專家 И. П. Мысовский 的講义的前三章，并参考了中国科学院計算技术研究所編写的“計算方法講义”。

整理工作是在北京大学計算数学教研室全体同志的关心和帮助下完成的。

承高等教育出版社和印刷厂同志大力支持，使本書能在五月下旬出版，便利了我校学生的學習，为此深致感謝。

編 者

1959年4月12日

目 录

序.....	(1)
第一章 用近似值进行计算.....	(1)
§ 1. 引言(1) § 2. 误差的来源(1) § 3. 绝对误差与 相对误差·近似值的表示法·有效数字(4) § 4. 一些简单运算的 结果的误差(9)	
第二章 方程的近似解法	(21)
§ 1. 根的隔离(21) § 2. 比例求根法(或称线性插值法) (31) § 3. 叠代法(34) § 4. 牛顿方法及简化的牛顿方法(38) § 5. 方程组的近似解法(44) § 6. 牛顿方法和简化的牛顿方法的 收敛性(50) § 7. 秦九韶法(58) § 8. 罗巴切夫斯基方法(68) § 9. 林士謬法·赵訪熊法(72)	
第三章 线性方程组	(80)
§ 1. 高斯方法(80) § 2. 叠代法(93) § 3.* 张弛法(109) § 4. 克雷洛夫(А. Н. Крылов)的求矩阵的特征多项式的方法——一种 有限次叠代法(114) § 5. 达尼列夫斯基(Данилевский)方法(120) § 6. 雅可比(Jacobi)把实对称矩阵对角化的方法(126) § 7. 用叠代法 求矩阵的第一特征值(130) § 8. 叠代程序收敛性的改善(135)	
第四章 点插值.....	(139)
§ 1. 次数最多为插值点的个数少一的插值多项式的存在及 唯一性·拉格朗日(Lagrange)插值多项式·埃特金(Aitken) 逐步插值法(141) § 2. 均差及其性质·插值点任意分布时的 牛顿插值公式(146) § 3. 插值公式的余项(152) § 4. 有限差分与 差分表(155) § 5. 牛顿向前插值公式、牛顿向后插值公式、高斯公式、 司帝林公式、贝塞耳公式、埃弗瑞特公式(164) § 6. 函数表的加密、 埃弗瑞特公式的应用(180) § 7. 按函数及其导数进行插值· 耶尔密特(Hermite)公式(182) § 8. 反插值问题(186) § 9. 二元函数的插值问题(191) § 10. 三角插值(199) § 11. 插值过程的收敛性(214)	
第五章 导数的近似计算.....	(216)
§ 1. 用插值公式求通过函数表给出的函数的导数(216) § 2. 插值点等距离时的数值微分公式(219)	

第六章 数值积分.....(225)

- § 1. 梯形公式·切线公式·辛浦生公式·牛顿-柯特斯公式(225)
- § 2. 求积公式的余项(232) § 3. 机械求积公式准确度的提高(235)
- § 4. 高斯求积公式(242) § 5. 馬可夫(A. A. Марков)公式(249)
- § 6. 切比雪夫公式(251) § 7. 高斯型求积公式(252)
- § 8. 几种高斯型求积公式(258) § 9. 求积过程的收敛性(265)
- § 10. 伯努利数与伯努利多项式(268) § 11. 尤拉-麦克劳林求和公式·格雷哥里求和公式与高斯求和公式(278)
- § 12. 反常积分的计算(289) § 13. 重积分的近似计算(295)

第七章 一致逼近.....(299)

- § 1. 维尔斯特拉斯定理(299) § 2. 最佳逼近概念、切比雪夫定理(306)
- § 3. 几个例子、切比雪夫多项式(313) § 4. 切比雪夫多项式的一个应用——降低逼近多项式的次数(318)

第八章 平方逼近.....(321)

- § 1. 在一组分散的点上用最小二乘法(即最小二乘法)逼近函数(321)
- § 2. 在全区间上用最小二乘法逼近函数(327) § 3. 实用富利叶分析(332)

第九章 常微分方程数值解法.....(343)

- I. 初值问题(343)
 - § 1. 尤拉折线法(344) § 2. 改进的尤拉方法(349)
 - § 3. 龙盖-库塔法(355) § 4. 求一阶常微分方程初值问题的数值解的差分方法(363) § 5. 计算开始几点上的近似值的方法(374)
 - § 6. 用差分方法求高阶方程的数值解(382) § 7. 差分方程的稳定性问题(387)
- II. 常微分方程边值问题的数值解法(396)
 - § 8. 线性常微分方程边值问题(396) § 9. 特征值问题(412)
 - § 10. 关于非线性常微分方程的边值问题(414)

第十章 偏微分方程数值解法.....(415)

- I. 椭圆型方程(415)
 - § 1. 函数在网格的结点上的值与拉卜拉斯算子及双调和算子之间的关系(415)
 - § 2. 差分方程的边值条件(435) § 3. 差分方程第一边值问题的解的存在及唯一性证明,与差分方程边值问题的解法(439) § 4. 差分方法的误差估计与方法的收敛性(448) § 5. 张弛法(453) § 6. 李勃姆迭代方法(458) § 7. 误差估计(459)
- II. 线性抛物型方程与双曲型方程(460)
 - § 8. 关于热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的第一边值问题的几种差分格式

及其收敛性(460) § 9. 差分格式的稳定性(469)

§ 10. 波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的初值问题的差分格式的稳定性(475)

III. 拟线性双曲型一阶方程组(480)

§ 11. 特征线法(480) § 12. 矩型网格(488)

第十一章 积分方程的近似解法.....(491)

§ 1. 把积分方程换成含有限个未知数的代数方程的方程组(491)

§ 2. 逐次逼近法(498) § 3. 把任意核换成近似的退化核的方法(504)

第一章 用近似值进行計算

§ 1. 引言

人們在实际活动中所处理的数，往往是某一个物理量在一定“誤差范围”以内的近似数值，例如量長度时的誤差范围可以是 0.1 公分或 1 公尺，量溫度的誤差范围可以是 0.1°C 等。另一方面，在实际計算工作中，特别是使用快速电子数字计算机进行計算时，总是用具有定位数数字的有穷小数进行的。如果参予計算的数原本不是有穷小数，就要用它們的近似值进行計算。

一数的准确值 x 与其近似值 x^* 的差叫做近似值 x^* 的誤差（更确切地說，应叫做 x^* 的絕對誤差，見本章 § 3）。例如用 0.33 作为 $\frac{1}{3}$ 的近似值时，誤差是

$$\frac{1}{3} - 0.33 (< 0.005).$$

用近似值作計算，出来的結果也只能是近似的。因此我們的問題是：

- 1) 怎样从原始数据的誤差估計出結果的誤差；
- 2) 原始数据应当具有怎样的准确程度，結果的誤差才会不超过指定的范围。

在本章 § 4 中我們就一些簡單的运算討論这两个問題。

§ 2. 誤差的来源

使計算結果产生誤差的来源，可区分为下列四个方面。有时其中一个或几个方面的誤差可以忽略不計。但是一般來說，这四个方面的誤差都有，而且是相互影响着的。不能簡單地把計算結果的总誤差看作是这四方面誤差的簡單和数。

1) 实际現象本身和它的数学描述之間的誤差。数学描述已經不是它所描述的对象的本身，而是一种理想化了的模型。这种誤差称做**描述誤差**。它属于怎样更确切地建立有关的物理理論的問題。

2) 在某一問題的数学描述中，总含有一些参量，例如長度、溫度等等。这些参量的值都由測量来測定。測量一个量的結果与該量本身的实际大小总是略有出入的。这个差別叫做該参量的**观测誤差**。如果微小的观测誤差使結果产生了巨大的誤差，那末我們用以求这个結果的計算方法(有时甚至原来問題的数学描述)就沒有意义了。我們希望当观测誤差控制在一定范围以內时，計算結果的誤差也能控制在某个范围以內。这就是这个問題的数学描述和其計算格式，是否能使其計算結果連續地依赖于这些参量的問題，這個問題可以叫做关于这些参量的稳定性問題。

3) 許多数学問題中总含有一些超越运算，例如求正弦、求对数等等。有时問題的解答也是用无穷的步驟求得的。但是实际上我們不能完成无穷的步驟，我們只能用有穷的步驟去近似地完成它，从而获得解的近似值。这时产生的誤差叫做**截断誤差**。例如利用 e^{-x} 的泰勒展开式

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

計算 e^{-x} 时，若用

$$1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

作为近似值，其截断誤差就是

$$E(x) = \frac{1}{24}e^{-\xi}x^4, \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之間}).$$

4) 在計算中，无穷小数总是用有穷小数代替的。有时一个有穷小数也要用位数較少的有穷小数代替。这里产生的誤差叫做**舍入誤差**。

通常有两种方法进行舍入。設

$$x = x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s} + \cdots$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_s, \cdots$ 是 0, 1, 2, $\cdots$, 9 等十个整数之一。我們要把 x 舍入成 s 位小数的数。一种方法是把 x 的第 $(s+1)$ 位小数和以后的各位小数通通舍掉, 得到

$$x^{**} = x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s},$$

用普通十进制小数的写法写出, 就是 $x^{**} = 0.x_1x_2\cdots x_s$ 。这里誤差显然是

$$|x - x^{**}| < 10^{-s}.$$

另一种舍入的方法就是通常的四舍五入法。这就是說, 我們把

$$x^* = \begin{cases} x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s}, & \text{当 } x_{s+1} < 5 \text{ 时,} \\ x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + (x_s + 1) \cdot 10^{-s}, & \text{当 } x_{s+1} \geq 5 \text{ 时,} \end{cases}$$

作为 x 的近似值。同样, 它的誤差是

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} 10^{-s}.$$

以后我們說到舍入时总指这种普通的四舍五入。

由于在計算过程中有舍入, 計算結果的誤差要依赖于計算的程序。現在举一个簡單的例子來說明。我們規定两个两位小数的数的乘积都舍入成两位小数的数, 記

$$a = 0.37, b = 0.26, c = 0.45.$$

并以 $(ab)^*$ 記 a 与 b 的乘积 ab 經舍入成两位小数的結果。于是

$$ab = 0.0962 \approx (ab)^* = 0.10,$$

$$(ab)^*c = 0.10 \times 0.45 = 0.0450 \approx ((ab)^*c)^* = 0.05;$$

而

$$bc = 0.1170 \approx (bc)^* = 0.12,$$

$$a(bc)^* = 0.37 \times 0.12 = 0.0444 \approx (a(bc)^*)^* = 0.04.$$

可見

$$((ab)^*c)^* \neq (a(bc)^*)^*,$$

就是說，計算結果依賴于計算的程序。

通常在計算一個問題時，首先原始數據就有觀測誤差和舍入誤差。這些原始誤差要影響計算過程中每一步結果的準確程度。其次在每一步計算中，由于舍入或由于用有窮步驟代替超越運算，又產生了新的誤差。這些誤差和從上一步傳來的誤差聯合在一起又傳播到下一步計算中去。最後，如果這問題的解是用無窮步驟表示出來的話，當計算結束時，還有截斷誤差。

最後我們還指出，為明確計，我們不把抄寫數據時和計算過程中由于不小心而產生的錯誤叫做誤差。進行計算和抄寫時應仔細檢查，避免錯誤。

§3. 絕對誤差與相對誤差 · 近似值的表示法 · 有效數字

為了說明近似值的準確程度，我們討論它的絕對誤差與相對誤差。

設 x 是原來的數或是要測量的量的真正大小，設 x^* 是這數的近似值或測量出來的大小。我們定義

$$E(x^*) = x - x^* \quad (1)$$

為近似值 x^* 的絕對誤差。通常我們無法準確地算出絕對誤差的真值，我們只能去估計它的絕對值的範圍，也就是去估計 $|E(x^*)|$ 的上界（以後我們常簡稱 $|E(x^*)|$ 的這個上界 Δ 為 x^* 的最大絕對誤差，或更簡稱為絕對誤差）。當然，我們總希望能把 $|E(x^*)|$ 的這個上界 Δ 尽可能定得小一些。

絕對誤差還不足以顯示出近似值的準確程度。因為 1000 公斤重的物體的重量絕對誤差是 200 公分與一個 10 公斤重的物體的重量絕對誤差是 200 公分實在不能相提并論。為了補救這個缺點，我們定義 x 的近似值 x^* 的相對誤差為

$$R(x^*) = \frac{E(x^*)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} = \frac{x}{x^*} - 1. \quad (2)$$

相对誤差說明了 x^* 的絕對誤差与 x^* 本身比較起来所占到的比例,这使我們对 x^* 的准确程度有了进一步的了解。

但是和絕對誤差一样,我們不能定出 $R(x^*)$ 的准确值,只能估計它的范围,即估計

$$|R(x^*)| = \frac{x - x^*}{x^*}$$

的上界 δ 。同样,我們总希望把这个上界 δ 定得尽可能小一些(以后常把这个上界称做 x^* 的最大相对誤差,或更簡称为 x^* 的相对誤差)。

注意,若写 $x = x^* + dx^*$,
即以 dx^* 表示 x^* 的絕對誤差,則 x^* 的相对誤差是

$$R(x^*) = \frac{dx^*}{x^*} = d(\log x^*).$$

可見一近似量 x^* 的相对誤差就是它的对数微分的值。

此外,我們还要注意絕對誤差常常是有量綱的量,而相对誤差則总是沒有量綱的。

近似值的表示法与有效数字 表示一个近似值时,当然希望能够同时指明它的准确程度。最直接的一种表示法就是同时写出近似值 x^* 和它的絕對誤差的絕對值的上界 Δ , 表成

$$x = x^* \pm \Delta.$$

例如, $\pi = 3.14159265\cdots$, 它的近似值 3.14159 的絕對誤差是 0.000003 , 因此,我們記

$$\pi = 3.14159 \pm 0.000003.$$

又如我們說一个圓杆的直径 $r = 10.00 \pm 0.01$ 毫米,就是說,直径的近似值 r^* 是 10 毫米而誤差不超过 1% 毫米。

表示近似值的另一种方法是使用**有效数字**。通常近似值总是用有穷小数写出的。为了可以从近似值的有穷小数表示本身就能知道近似值的准确度,我們討論近似值的有效数字。

設有一數 x ，經過四舍五入，得到它的近似值。

$$x^* = \pm (x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_s \cdot 10^{-s}) \cdot 10^\sigma, \quad (3)$$

其中 $x_1 \neq 0$; $x_1, x_2, \dots, x_s$ 都是 $0, 1, 2, \dots, 9$ 這 10 個整數之一， s 是正整數， σ 是整數。用通常十進制小數寫出就是

$$x^* = (\pm 0. x_1 x_2 \cdots x_s) \cdot 10^\sigma, \quad (4)$$

這裡 x^* 的絕對誤差是

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} 10^{\sigma-s}. \quad (5)$$

此時，我們說： x^* 作為 x 的近似值，具有 s 位有效數字；而 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 就叫做 x^* 的各位有效數字。

例如，圓周率 $\pi = 3.14159 \cdots$ 的近似值 3.1416 具 5 位有效數字，而 3.14 具 3 位有效數字。

為簡便計，通常對於寫出的具有有效數字的數，從其最左面第一位不是 0 的數字起，到它最右面一位數字為止，都認為是有效數字。例如我們認為

$$0.0053, \quad 0.123, \quad 123.4$$

依次具有 2 位、3 位及 4 位有效數字；即認為它們的絕對誤差依次不超過 0.00005, 0.0005, 0.05。又當 0.0053 的絕對誤差不超過 0.000005 時，就把它記成 0.00530 以示區別。而 0.00530 又常記成 5.30×10^{-3} ，至於 0.0053 則記成 5.3×10^{-3} 。同樣，如果只知道 300000 的絕對誤差不超過 500，就把它記作 300×10^3 或 3.00×10^5 以區別於絕對誤差不超過 0.5 的 300000。

例如，真空中光速為

$$c = 299796 \pm 4 \text{ 公里/秒},$$

這就是說

$$299792 \text{ 公里/秒} \leq c \leq 299800 \text{ 公里/秒}. \quad (6)$$

若用 300000 公里/秒作為近似值，其絕對誤差 $c - 300000$ 滿足

$$-208 \leq c - 300000 \leq -200,$$

所以不超过 500。于是应把这个近似值記作

$$300 \times 10^3 \text{ 公厘/秒, 或 } 3.00 \times 10^5 \text{ 公里/秒.}$$

按定义, 这个近似值具有三位有效数字。

这个例子也正好指出了用有效数字表示近似值的一个缺点: 就是虽然已经知道光速 c 与 299796 公里/秒的誤差上下不超过 4 公里/秒, 我們却得不出 c 的具 5 位有效数字表示的近似值。因为, 若取 $c^* = 29980 \times 10$ 公里/秒, 則表示真值 c 合于

$$299795 \text{ 公里/秒} \leq c \leq 299805 \text{ 公里/秒.}$$

但这不能完全包括真值 c 所在的范围(6); 不符合原測定的結果。同样, $c^* = 29979 \times 10$ 公里/秒也不能滿足这个要求。

我們可以得到 c 的具 4 位有效数字的近似值 $c^* = 2998 \times 10^2$ 公里/秒。因为这表示

$$299750 \text{ 公里/秒} \leq c \leq 299850 \text{ 公里/秒.} \quad (7)$$

这包含了真值 c 所在的范围(6)。所以与測定結果符合, 因而 2998×10^2 公里/秒是 c 的具 4 位有效数字的表示式。

但和測定結果 299796 ± 4 公里/秒比較, 近似值 2998×10^2 公里/秒的誤差是太大了。因此, 要表明測量出的結果的准确程度, 对于这个例子就只能采用 299796 ± 4 公里/秒这种表示法。

最后, 为了方便, 我們再引进一个名詞, 在一个数的十进制表示中, 除掉它最左面那些确定小数点的位置的 0 的各个数位都叫做有效数位, 于是在

$$x = \pm 0. x_1 x_2 x_3 \cdots \times 10^n$$

中若 $x_1 \neq 0$, 我們就說, x_1 所在的数位以及它右面的各个数位都是有效数位; 至于这些数位上的数字是否是有效数字就必须按照前面有效数字的定义来确定。

一个近似值的有效数字表示,标明了这近似值的误差是在它的第几个有效数位上的多少个单位,因此,它指出了该近似值的相对误差。一个具 s 位有效数字的近似值 x^* 的相对误差最多有多少呢?由(3)知

$$x_1 \cdot 10^{s-1} \leq |x^*| \leq (x_1 + 1) \cdot 10^{s-1}, \quad (8)$$

所以 x^* 的相对误差

$$|R(x^*)| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \frac{\frac{1}{2} 10^{s-s}}{x_1 \cdot 10^{s-1}} = \frac{1}{2x_1} \cdot 10^{-(s-1)} \quad (9)$$

就是说,具 s 位有效数字的 x^* 的相对误差最多为 $\frac{1}{2x_1} \cdot 10^{-(s-1)}$ 。

反过来我们再问,如果 x 由(4)表示的近似值 x^* 的相对误差的一个上界是 δ , 能不能知道 x^* 至少具有多少位有效数字呢? 已知

$$|R(x^*)| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \delta,$$

故

$$|x - x^*| \leq |x^*| \delta,$$

由(8)可见

$$|x - x^*| \leq (x_1 + 1) \delta \cdot 10^{s-1}. \quad (10)$$

因此,如果我们确定出一个尽可能最大的正整数 s 使

$$(x_1 + 1) \delta \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-s} \quad (11)$$

成立,则由(10)有

$$|x - x^*| \leq 10^s \times \frac{1}{2} 10^{-s}, \quad (12)$$

就是说,若 s 是满足(11)的最大的正整数, x^* 的绝对误差就不超过 x^* 的第 s 位有效数位上的半个单位;有时还能进一步把 x^* 舍入成真值 x 的具 s 位有效数字的近似值。

例如, $A = \sqrt{\pi} = 1.7725\cdots$ 的近似值 $A^* = 1.78$ 的绝对误差不超过 A^* 的第 2 个有效数位上的半个单位, 因 $|A - A^*| = 0.0074\cdots < 0.05$; 但是把 A^* 舍入成 1.8 时, 1.8 是 A 的具 2 位有效数字的近似值, 因 $|A - 1.8| = 0.0274\cdots < 0.05$ 。

考查 A 的近似值 $\tilde{A}^* = 1.74$ 。 $\tilde{A}^*$ 与 A 的绝对误差不超过 $\tilde{A}^*$ 的第 2 个有效数位上的半个单位, 因为 $|A - \tilde{A}^*| = 0.0325\cdots < 0.05$ 。但是若把 $\tilde{A}^*$ 舍入成 1.7, 1.7 却不是 A 的具 2 位有效数字的近似值, 因为 $|A - 1.7| = 0.0725\cdots > 0.05$ 。

还应该注意有效数字的另一个不利情况。两个同样具有 s 位有效数字的数的相对误差可以相差 10 倍。例如, 设

$$0.00101 \text{ 及 } 0.00999$$

都具有三位有效数字。前者相对误差不超过 $\frac{0.5}{101} < 0.5\%$, 后者相对误差却不超过 $\frac{0.5}{999} \approx 0.05\%$ 。

§ 4. 一些简单运算的结果的误差

(一) 加法与减法

设 x_i 的近似值是 x_i^* , $i = 1, 2, \cdots, N$ 。由于

$$\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i^* = \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*) \quad (1)$$

及
$$\left| \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i^* \right| \leq \sum_{i=1}^N |x_i - x_i^*|. \quad (2)$$

所以, 和的绝对误差的绝对值不超过相加各项的绝对误差的绝对值之和。

又设 x_i^* 都 > 0 , 和的相对误差是

$$\begin{aligned}
 R\left(\sum_{i=1}^N x_i^*\right) &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*)}{\sum_{i=1}^N x_i^*} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^*}{\sum_{k=1}^N x_k^*} \cdot \frac{x_i - x_i^*}{x_i^*} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^*}{\sum_{k=1}^N x_k^*} R(x_i^*).
 \end{aligned}$$

于是, 由于 $x_i^* > 0$, 所以

$$\left| R\left(\sum_{i=1}^N x_i^*\right) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq N} |R(x_i^*)| \cdot \sum_{j=1}^N \frac{x_j^*}{\sum_{k=1}^N x_k^*},$$

$$\text{即} \quad \left| R\left(\sum_{i=1}^N x_i^*\right) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq N} |R(x_i^*)|. \quad (3)$$

因此, 如果 x_i^* 都 > 0 (都 < 0 时也一样), 和的相对误差的绝对值永不超过相加各项中最不准确的一项的相对误差的绝对值。

现在讨论减法。设 x 与 y 的近似值为 x^* 与 y^* , 且 x^* 与 y^* 同号。由于

$$(x - y) - (x^* - y^*) = (x - x^*) - (y - y^*) \quad (4)$$

$$\text{有} \quad |(x - y) - (x^* - y^*)| \leq |x - x^*| + |y - y^*|. \quad (5)$$

所以, 两数的差的绝对误差的绝对值不超过这两数的绝对误差的绝对值之和。

关于差的相对误差就与和的情形大不相同。设

$$x^* > y^* > 0.$$

$x^* - y^*$ 的相对误差是