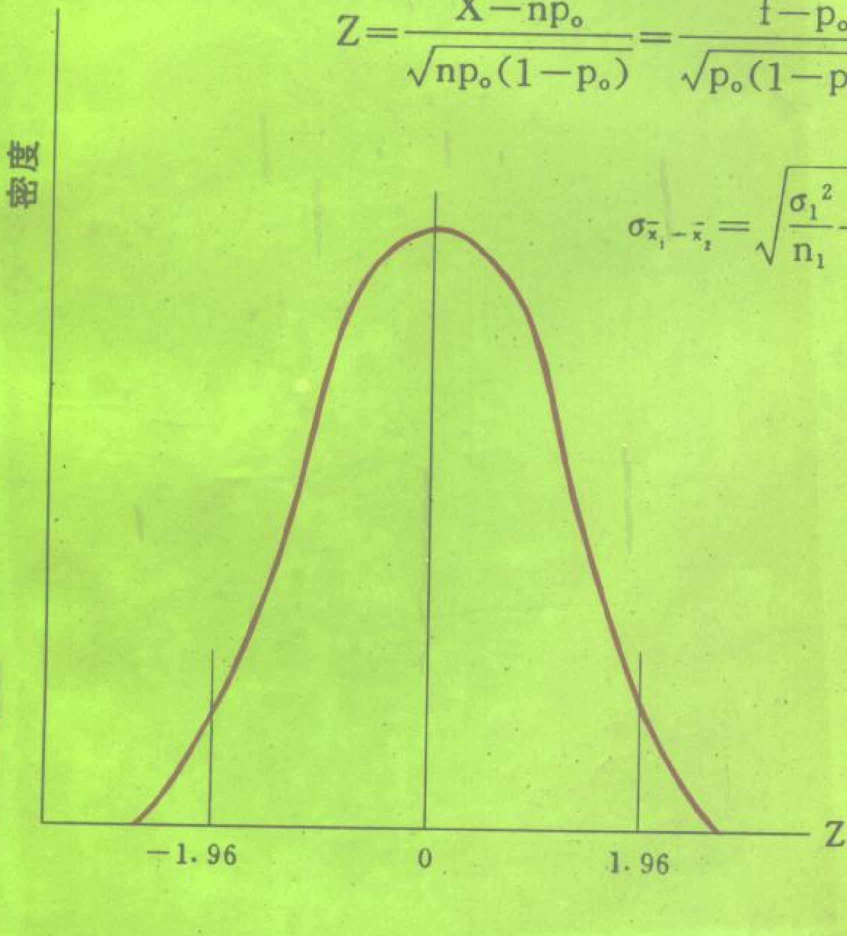
高等数学题解

（高教自考经济类）

陈力　编

$$Z=\frac{X-np_o}{\sqrt{np_o(1-p_o)}}=\frac{f-p_o}{\sqrt{p_o(1-p_o)/n}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}$$



四川科学技术出版社

高等数学题解

（高教自考经济类）

主编　陈　力

四川科学技术出版社

（川）新登字004号

书　　名/高等数学题解
编著者/陈　力

责任编辑　侯矾楠　谢增桓
封面设计　陈　文
版面设计　李　云
责任校对　文　扬

出　　版　四川科学技术出版社
　　　　　成都盐道街3号　邮编：610012
发　　行　四川科学技术出版社
　　　　　新华书店发行
印　　刷　成都军区炮兵军械大队印刷厂
版　　次　1996年1月成都第一版
　　　　　1996年1月第一次印刷
规　　格　850×1168毫米　1/32
印　　张　13　　2509千字
印　　数　1—10000册
定　　价　11.8元
ISBN7－5364－3216－X/C・678

前　言

《高等数学题解》(高教自考经济类)是为了配合经济类高教自考生学习经济管理类专业全国高等教育自学考试教材《高等数学》(一)(高汝熹主编，武汉大学出版社出版)而编写的，本书对教材中的所有习题作出了详细的解答。

本书的内容及章节安排与《高等数学》(一)相同。参照全国高等教育自学考试大纲的要求，本书对每章的主要内容作了简明扼要、提纲挈领的阐述，目的是使读者首先对每章的内容有个全面的了解。然后，我们对每一章的习题及复习题做了详尽的解答。

对于经济管理类的自学考生来说，做高等数学的习题是比较困难的，加之《高等数学》(一)中的习题答案并未给出解题步骤，只是仅仅给了一个结果，且有些结果是可以商榷的。这样，就迫切需要一本关于该书的详细的习题解答，本书正是为了这一需要而编写的。

对于本书的详细阅读将有助于读者在短期内迅速提高解题能力，帮助读者顺利通过高等数学的自学考试，相信本书将成为自学考生的必备书籍。

编　者

1995 年 11 月 22 日

目 录

第一章　函数及其图形

主要内容

1. 集合的概念及其定义

集合:具有共同性质的元素的全体。

主要要了解集合的表示方法,集合之间的并、交、补三种运算及其运算法则。

2. 实数与数轴

实数可分为有理数和无理数,可表示为两个互质整数之商的数称为有理数,不是有理数的实数称为无理数。

3. 区间邻域

区间:界于某两个实数之间的一切实数,而那两个实数称为区间的端点。

邻域:以 a 为中心,δ 为半径的邻域是:

$$\{x \mid \ |x-a| < \delta\}$$

4. 映射

从集合 X 到集合 Y 的一个映射 f,是指在集合 X 与集合 Y 之间建立了这样一种对应关系:

(1) 对于集合 X 中的每一个元素,都能按照某种对应规则同第二个集合 Y 中的某个元素相对应。

(2) 对于集合 X 中的每一个元素,集合 Y 中与它对应的

元素只有一个。

从 X 到 Y 的映射 f 记为　$f: X \longrightarrow Y$

5. 函数

函数：x、y 为两个变量。如果对于 x 的任意一个取值，通过对应法则 f，都有唯一的一个 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数。记为：$y = f(x)$。此时：x 称为自变量，y 称为因变量。

函数最重要的要素是：定义域和对应法则，两个函数要相等，必须定义域和对应法则都相同。

6. 函数的表示法：公式法、表格法、图示法。

7. 函数的几何特性

（1）单调性：对 $y = f(x)$，D_f 为其定义域。若任意 x_1、$x_2 \in D_f$，$x_1 < x_2$ 都有：$f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为严格单调增加；反之，为严格单调减少。

（2）有界性：若存在 $M < +\infty$，使得对任意 $x \in D_f$，均有：$|f(x)| < M$，则称 $f(x)$ 为有界函数。

（3）奇偶性：若对任意 $x \in D_f$，均有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若成立 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

（4）周期性：对于 $y = f(x)$，$x \in (-\infty, +\infty)$。若存在一个常数 $T \neq 0$，使得：对任意 x，有：$f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数。T 为 $f(x)$ 的一个周期。

8. 复合函数与反函数

（1）复合函数：两个函数的复合，实际上就是中间变量介入从自变量到因变量的变化过程。设有函数：$y = f(u)$，$u = g(x)$；$f(u)$ 的定义域为 D_f、$g(x)$ 的值域为 R_g。若 $R_g \subset D_f$，则

可以得到复合函数：$y=f(g(x)), x\in D_g$。D_g 为 $g(x)$ 的定义域。

$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 能否构成复合函数，关键在于：R_g 是否被 D_f 包含。

(2) 反函数：$y=f(u)$ 为一函数。若对 $f(x)$ 的定义域内的任意两点 $x_1\neq x_2$，都有：$f(x_1)\neq f(x_2)$，则可以通过 f 的逆对应：$f^{-1}: y\longrightarrow x$。定义反函数：$x=f^{-1}(y)$。习惯上，又把 $y=f(x)$ 的反函数记为：$y=f^{-1}(x)$。

$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数，其图形关于 $y=x$ 对称。

反函数存在定理：$y=f(x), x\in D_f$ 是严格单调增加（减少）的，则其反函数存在，且亦为严格单调增加（减少）的。

9. 基本初等函数。

$y=x^a$　$y=a^x(a>0,a\neq 1)$　$y=\log_a^x(a>0,a\neq 1)$

$y=\sin x$　$y=\cos x$　$y=\mathrm{tg}x$　$y=\mathrm{ctg}x$　$y=\sec x$

$y=\csc x$　$y=\arcsin x$　$y=\arccos x$　$y=\mathrm{arctg}x$

$y=\mathrm{arcctg}x$　$y=\mathrm{arcsec}x$　$y=\mathrm{arccsc}x$，

统称为基本初等函数。

10. 经济学中的常用函数

(1) 需求函数：需求量与价格之间的函数。

(2) 供给函数：供给量与价格之间的函数。

(3) 生产函数：生产量与劳动力和固定资产之间的函数。

习　题　1.1

1. 用集合符号写出下列集合：

1) 大于 30 的所有实数的集合；

2）圆 $x^2+y^2=25$ 上所有点组成的集合；

3）椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$外部一切点的集体合。

解：1）$S=\{x|x\in R, x>30\}$

2）$S=\{(x,y)|x^2+y^2=25, x\in R, y\in R\}$

3）$S=\{(x,y)|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1, x\in R, y\in R\}$

2. 按下列要求举例：

1）一个有限集合；

2）一个无限集合；

3）一个空集合；

4）一个集合是另一个集合的子集。

解：1）$S=\{A,B,C,D\}$

2）$S=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$

3）$S=\{x|x\in R, |x|<0\}$

（注：因为任意实数的绝对值大于等于0，所以S为空集。）

4）集合S为全体整数，集合A为全体自然数，则A是S的子集，且是真子集。

3. 下列集合哪个是空集 $\varnothing$？

$A=\{x|x+5=5\}$。

$B=\{x|x\in R$ 且 $x^2+5=0\}$。

$C=\{x|x>5$ 且 $x<5\}$

解：B 和 C 是 $\varnothing$，$A=\{0\}$ 不是 $\varnothing$。

4. 设 $A=\{a,b,c\}$，下列式子中哪些是正确的？

1）$\varnothing\in A$　　2）$a\overline{\in}A$　　3）$\{a\}<A$

4）$\varnothing<A$　　5）$a\subset A$　　6）$b\in A$

7）$b\subset A$

解：5)，6) 是正确的。

5. 如果 $A=\{x|3<x<5,x\in R\}$，$B=\{x|x>4,x\in R\}$，求：

1) $A\cup B$　　2) $A\cap B$

解：(1) $A\cup B=\{x|x\in R,3<x<5\text{ 或 }x>4\}=\{x|x\in R,x>3\}$

2) $A\cap B=\{x|x\in R,3<x<5\text{ 且 }x>4\}=\{x|x\in R,4<x<5\}$

6. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，$C=\{c,d\}$ 求：$A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$，$A\cup A$，$A\cap B$，$A\cap C$，$(A\cup B)\cap C$，$A\cap A$。

解：$A\cup B=\{a,b,c\}$

$B\cup C=\{b,c,d\}$

$A\cup C=\{a,b,c,d\}$

$A\cup A=\{a,b\}$

$A\cap B=\{b\}$

$A\cap C=\varnothing$

$A\cap A=\{a,b\}$

$(A\cup B)\cap C=\{a,b,c\}\cap\{c,d\}=\{c\}$

7. 试证：若 $A\subset B$，$B\subset C$ 则 $A\subset C$。

证明：若证 $A\subset C$，则只需证：$\forall x\in A$，有 $x\in C$ 成立。故证明如下：

$\forall x\in A$，$\because A\subset B$，$\therefore x\in B$，又 $\because B\subset C$，$\therefore x\in C$。结论成立。

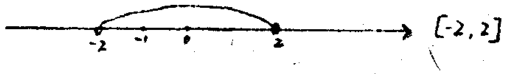
8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

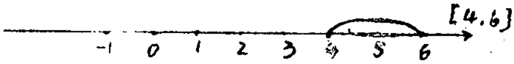
1) $|x|\leqslant 2$　　2) $|x-5|\leqslant 1$

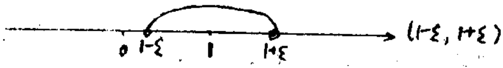
3) $|x-1|<\varepsilon(\varepsilon>0)$

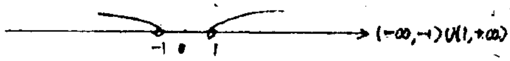
4) $|x|>1$　　　5) $|x+2|\geqslant 3$

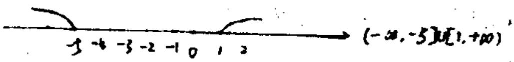
解:用区间表示如下:

1) 图 1—1 

2) 图 1—2 

3) 图 1—3 

4) 图 1—4 

5) 图 1—5 

注:1) $\{x||x|\leqslant 2\}=\{x|x\leqslant 2$ 且 $-x\leqslant 2\}=\{x|x\leqslant 2$ 且 $x\geqslant -2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant x2\}$

2) $\{x||x-5|\leqslant 1\}=\{x|-1\leqslant x-5\leqslant 1\}=\{x|4\leqslant x\leqslant 6\}$

3) $\{x||x-1|<\varepsilon,\varepsilon>0\}=\{x|-\varepsilon<x-1<\varepsilon,\varepsilon>0\}=\{x|1-\varepsilon<x<1+\varepsilon,\varepsilon>0\}$

4) $\{x||x|>1\}=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$

5) $\{x||x+2|\geqslant 3\}=\{x|x+2\geqslant 3$ 或 $x+2\leqslant -3\}=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -5\}$

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

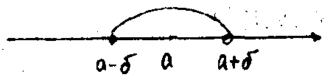
1) $|x-a|<\delta$, a 为常数, $\delta>0$

$x-2|<3$

$\{x||x-a|<\delta,a$ 为常数,$\delta>0\}=\{x|a-\delta<x$

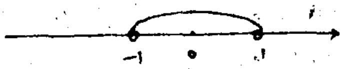
δ,a 为常数,$\delta>0\}$,在数轴上表示如下：

图 1－6



2)$\{x|1<|x-2|<3\}=\{x|1<|x-2|$ 且 $|x-2|<3\}=\{x|(x>3$ 或 $x<1)$ 且 $(-1<x<3)\}=\{x|-1<x<1\}$,故数轴上表示如下：

图 1－7



习 题 1.2

1. 设 X 是所有同心圆的集合,Y 为实数集合,若把同心圆与直径建立对应关系,试验证这种对应关系构成从 X 到 Y 的映射。

证明:记此对应关系为 f。因为每一个圆皆有一个为实数的直径,所以,在对应关系 f 下,X 中每一个元素都能与 Y 中某一元素对应;又因为每一个圆仅有一个直径,即在对应关系 f 下,对 X 中每一个元素,集合 Y(实数集 R)中与它对应的元素只有一个。从而 f 构成从 X 到 Y 的映射。即证。

2. 请判断下列对应关系是否构成映射:

设 X 集合由 A、B、C 三个工厂构成,Y 集合由甲、乙、丙、丁四个商店构成,A、C 两个工厂产品分别由甲、乙两个商店出售,B 工厂产品由乙、丙两个商店出售,若把生产产品的工厂

和销售这些产品的商店之间建立对应关系(供
种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射?

解:否。因为在此对应关系下,B 工厂有两个商店
与之对应,故不构成映射。

习 题 1.3

1.求下列函数值:

1) 若 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$,求 $f(2)$,$f(-2)$,$f(t^2)$,$f(\frac{1}{t})$;

2) 若 $\varphi(x)=x^3+1$,求 $\varphi(t^2)$,$[\varphi(t)]^2$。

解:1)$f(2)=2\cdot 4^{2-2}=2$

$f(-2)=-2\cdot 4^{-2-2}=-2\cdot 4^{-4}=-2^{-7}$

$f(t^2)=t^2\cdot 4^{t^2-2}=\frac{t^2}{16}4^{t^2}$

$f(\frac{1}{t})=\frac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1}{t}-2}=\frac{1}{16t}4^{\frac{1}{t}}$;

2)$\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$

$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$

2.求下列函数值:

1) 若 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(0)$,$f(a)$,$f(a+b)$;

2) 若 $g(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\end{cases}$,求 $g(3)$,$g(2)$,$g(0)$,
$g(0.5)$,$g(-0.5)$;

3) 若 $\varphi(x)=\begin{cases}3+x^4 & -\infty\leqslant x\leqslant 0\\ 2^x & 0<x<+\infty\end{cases}$,求 $\varphi(-2)$,$\varphi(0)$,
$\varphi(2)$;

4) 若 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$，求 $\varphi(1),\varphi(\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-\frac{\pi}{4})$.

解：1) $f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2$

$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$

$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}$

2) $g(3)=3-1=2$;

$g(2)=2-1=1$;

$g(0)=2$;

$g(0.5)=2$;

$g(-0.5)=2^{-0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\varphi(-2)=3+(-2)^4=19$

$\varphi(0)=3+0^4=3$

$\varphi(2)=2^2=4$

4) $\varphi(1)=0$;

$\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-\frac{\pi}{4})=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 下列各对函数是否相同，并说明理由。

1) $f(x)=\ln x^2$，　$\varphi(x)=2\ln x$;

2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，　$\varphi(x)=1$;

解：1) 不相同。因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $\{x|x\in R, x\neq 0\}$，而 $\varphi(x)$ 的定义域是 $\{x|x\in R, x>0\}$。

2) 相同。因为 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的依存关系相同，定义域均为 R。

4. 求下列函数的定义域：

1) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$　　2) $y = \sqrt{3x + 4}$

3) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$　　4) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x + 4}$

5) $y = lg\dfrac{x}{x - 2}$　　6) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$

7) $y = \arcsin\dfrac{x - 3}{2}$

解：1) $D_y = \{x|x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \{x|x \neq 1$ 且 $x \neq 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

2) $D_y = \{x|3x + 4 \geqslant 0\} = \{x|x \geqslant -\dfrac{4}{3}\} = [-\dfrac{4}{3}, +\infty)$

3) $D_y = \{x|a^2 - x^2 \geqslant 0\} = \{x|x^2 \leqslant a^2\} = \{x|-|a| \leqslant x \leqslant |a|\} = [-|a|, |a|]$

4) $D_y = \{x|1 - x^2 \neq 0$ 且 $x + 4 \geqslant 0\} = \{x|x \neq \pm 1$ 且 $x \geqslant -4\} = [-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

5) $D_y = \{x|\dfrac{x}{x - 2} > 0\} = \{x|x < 0$ 或 $x > 2\} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

6) $D_y = \{x|\sin x \geqslant 0$ 且 $16 - x^2 \geqslant 0\} = \{x|2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi$ 且 $-4 \leqslant x \leqslant 4\} = \{x|0 \leqslant x \leqslant \pi$ 且 $-4 \leqslant x \leqslant -\pi\} = [-4, -\pi] \cup [0, \pi]$

7) $D_y = \{x||\dfrac{x - 3}{2}| \leqslant 1\} = \{x||x - 3| \leqslant 2\} = \{x|1 \leqslant x \leqslant 5\} = [1, 5]$

5. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1\\ x^2-1 & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域并作出函数图形。

解：$D_y=\{x\,|\,|x|\leqslant 1 \text{或} 1<|x|<2\}=\{-1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $-2<x<1$ 或 $1<x<2\}=\{x\,|-2<x<2\}$。

作图如下：

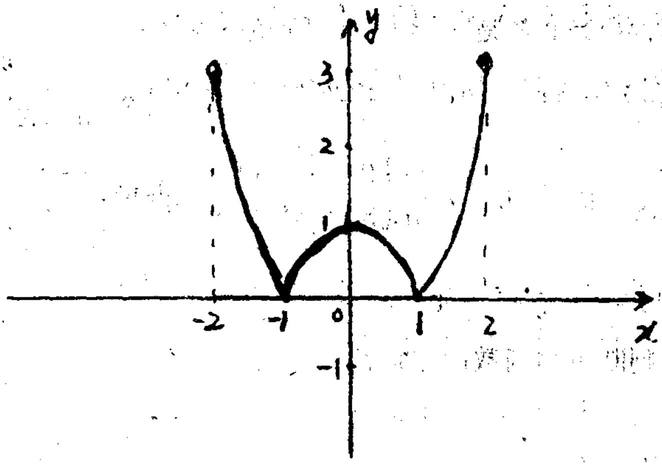


图 1－8

6. 某产品年产量是 x 台，每台售价是 400 元，当年产量在 1000 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 1000 台时，经广告宣传后又可以多售出 200 台，每台平均广告费 40 元，生产再多，本年就售不出去，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 X 的函数。

解：

$$R(x)=\begin{cases}400x & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 400000+(400-40)(x-1000) & 1000<x\leqslant 1200\\ 472000 & x>1200\end{cases}$$