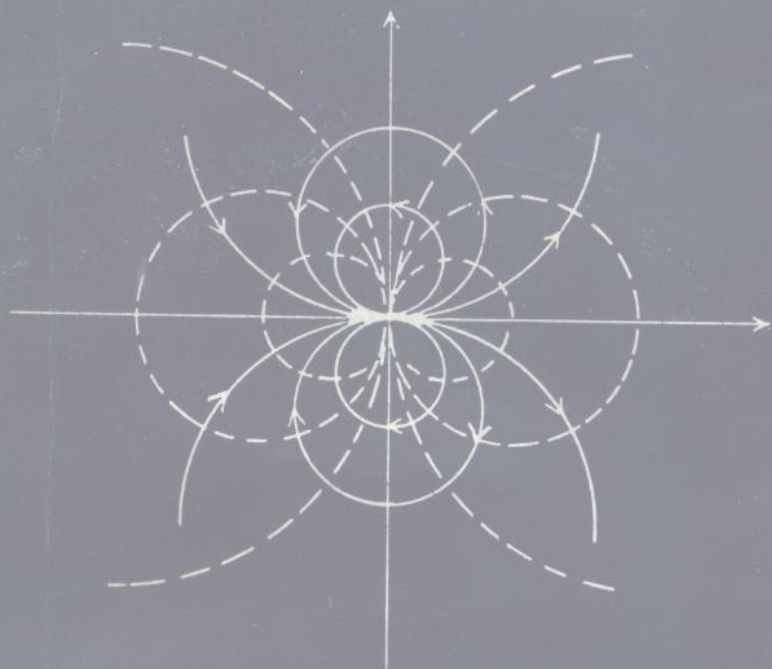


电磁场 和 电磁能 电磁波

下册

[美] L·M·玛奇德 著

何国瑜 董金明 译
江贤祚 王振荣



电磁场电磁能和电磁波

下册

[美] L·M·玛奇德 著

3.68

465

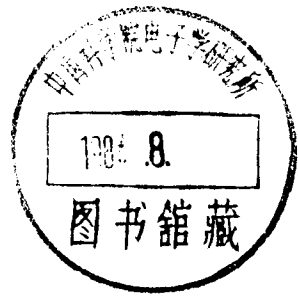
下2

53.18
2
2

电磁场、电磁能和电磁波

下 册

[美] L. M. 玛奇德 著
何国瑜 董金明 译
江贤祚 王振荣



高等教育出版社

1111591

内 容 提 要

本书是美国麻省理工学院和布鲁克林工学院工程系本科生用的教材。主要内容是在经典电磁学的范围内系统地研究电磁场、电磁能和电磁波的基本理论、基本概念和基本方法。本书在叙述上比较细致,并给出了大量针对性较强的举例,因此适合于学生自学。

译本分上、下两册出版,上册包括:场和场论的引言;自由空间中的电磁场定律;矢量分析;微分场定律;静态场(一);静态场(二);物质中的宏观场等七章。下册包括:电磁能和功率;时变场的低频特性;TEM 场和波(无损传输线理论);无损媒质中的平面波;辐射等五章及附录。

本书可作为电子工程和无线电工程系本科生的教材或参考书,也可供其它电类专业的师生和工程技术人员参考。

2014/09

Electromagnetic Fields, Energy, and Waves

Leonard. M. Magid

John Wiley and Sons, Inc

1972

电磁场、电磁能和电磁波

下 册

[美] L. M. 玛奇德 著

何国瑜 董金明 江贤祚 王振荣 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县 印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 16.75 字数 384,000

1982年12月第1版 1984年1月第1次印刷

印数 00,001—8,000

书号 15010·0465 定价 2.10 元

目 录

第八章 电磁能和功率1	第九章 时变场的低频特性41
8.1 对运动电荷与磁荷的电磁力.....1	9.1 基本场定律.....41
8.2 供给运动电荷与磁荷的功率.....2	9.2 静态场与时变场的比较.....42
8.3 能量守恒——坡印亭定理.....3	9.2.1 E和H场的耦合.....42
8.3.1 微分形式坡印亭定理.....3	9.2.2 低频场的物理意义.....43
8.3.2 积分形式坡印亭定理.....5	9.3 严格的波动解.....44
8.3.3 确定S和w的某些困难.....6	9.3.1 简单的波动系统.....44
8.4 电场和磁场储存的能量.....6	9.3.2 一维波动方程.....44
8.4.1 空气电容器中储存的电能.....7	9.3.3 正弦稳态解.....46
8.4.2 空芯电感器中储存的磁能.....8	9.3.4 时变电容器.....48
8.5 物质吸收的功率.....9	9.3.5 低频响应.....50
8.5.1 极化、磁化和传导功率密度.....9	9.4 时变场的幂级数法.....54
8.5.2 物质中的坡印亭定理.....11	9.4.1 一般场和频率的关系.....54
8.6 静态功率流与耗散.....13	9.4.2 带有 ω 的幂级数.....54
8.6.1 电阻中的静态功率流.....13	9.4.3 不带 ω 的幂级数.....59
8.6.1.1 静态E和H场.....13	9.5 准静态场举例——电容器的低频响应.....60
8.6.1.2 坡印亭矢量和静态功率流.....15	9.5.1 平行板电容器.....60
8.6.2 矩形电阻中的静态功率流.....17	9.5.1.1 参考点的选择.....61
8.6.2.1 电源在无限远处时的矩形电阻.....17	9.5.1.2 零阶场.....62
8.6.2.2 电源沿一边分布时的矩形电阻.....19	9.5.1.3 一阶场.....64
▶8.6.3 电子束中的静态功率流.....22	9.5.1.4 准静态解.....67
8.6.3.1 电子束动力学.....22	9.5.1.5 二阶场及准静态场的正确性.....68
8.6.3.2 静态E和H场.....24	▶9.5.1.6 三阶及三阶以上的场.....71
8.6.3.3 坡印亭矢量和静态功率流.....26	9.6 电感器的低频特性.....72
8.7 极化能和电能.....27	9.6.1 单匝电感器.....72
8.7.1 极化能量密度.....27	9.6.1.1 零阶场.....73
8.7.2 电能密度.....29	9.6.1.2 一阶场.....73
8.7.3 总电能.....29	9.6.1.3 准静态响应.....74
8.7.4 储存电能的举例——填充 ϵ 的电容器.....30	9.6.1.4 电动势和楞次定律.....76
8.8 磁化能和磁能.....31	9.6.1.5 二阶及二阶以上的场.....78
8.8.1 磁化能量密度.....31	▶9.6.2 N匝电感线圈.....79
8.8.2 磁能密度.....32	9.6.2.1 没有线圈时的准静态场.....79
8.8.3 总磁能.....33	9.6.2.2 存在线圈时的准静态场.....81
8.8.4 储存磁能举例.....34	9.6.2.3 保守场 $E_i(t)$ 的物理意义.....84
8.8.4.1 单匝线圈.....34	9.6.2.4 N匝自激励线圈.....86
8.8.4.2 一般n匝电感线圈.....35	9.7 电阻器的频率特性.....87
8.9 小结和结论.....36	9.7.1 零阶场.....87
8.10 参考文献.....38	▶9.7.2 一阶场.....88
习题.....38	▶9.7.3 准静态响应.....89
	9.8 作为准静态近似的电路理论.....91

9.8.1	从场理论导出基尔霍夫电路定律	92
9.8.2	电路的功率概念	94
9.9	小结和结论	96
	习题	97
第十章	TEM 场和波(无损传输线理论)	100
10.1	横电磁(TEM)场	100
10.1.1	TEM 场定律	100
10.1.2	TEM 结构——理想导体传输线	101
10.1.3	理想导线的 TEM 边界条件	102
10.2	传输线模型	103
10.2.1	电压和电流的定义	103
10.2.2	归一化横向场	104
10.2.3	传输线方程	105
▶10.2.4	传输线参数	107
▶10.2.4.1	单位长度的电容	107
▶10.2.4.2	单位长度的电感	107
▶10.2.4.3	单位长度的并联电导	108
10.3	分布参数电路传输线	108
10.3.1	由分布电路模型建立的传输线方程	109
10.3.2	功率和能量——坡印亭定理	110
10.4	无损传输线上标量波的运动(时域分析)	111
10.4.1	时域解	111
10.4.2	正向和反向行波	113
10.5	无损传输线上的正弦波(频域分析)	116
10.5.1	频域解	116
10.5.2	正向和反向行波	117
10.5.2.1	波动和相速	117
10.5.2.2	能量和功率	119
10.5.2.3	输入阻抗和电源条件	120
10.5.2.4	负载和电源边界条件	121
10.5.3	纯驻波	122
10.5.3.1	短路线	122
10.5.3.2	能量和功率	123
10.5.3.3	输入阻抗和电源条件	125
10.5.3.4	其它驻波系统	125
10.6	传输线上的复数功率	128
10.6.1	电路理论中的复数功率	128
10.6.2	传输线理论中的复数功率	130
10.6.3	传输线上的复数坡印亭定理	130
10.6.4	复数功率流举例	132
10.7	一般终端阻抗	133

10.7.1	负载条件和反射系数	133
10.7.2	输入阻抗和电源条件	135
10.7.3	广义反射系数	135
10.7.4	驻波测量和 Γ 平面	136
10.7.5	史密斯圆图	139
10.7.5.1	史密斯圆图的用途	140
10.8	小结和结论	142
	习题	143
第十一章	无损媒质中的平面波	148
11.1	均匀平面波(UPW)——时域解	148
11.1.1	均匀平面波(UPW)的性质	148
11.1.2	z 向均匀平面波(时域)	149
11.1.3	均匀平面波的场和功率	150
11.2	频域中的场和功率	154
11.2.1	复数矢量的应用	154
▶11.2.2	椭圆极化、圆极化和线极化	155
11.2.3	复数坡印亭定理	158
11.3	频域中的均匀平面波	160
11.3.1	x 向极化波	160
11.3.2	解的性质	161
11.3.3	均匀平面波的作用	163
11.4	均匀平面波的垂直入射	163
11.4.1	对理想导体的垂直入射	163
11.4.2	对无损电介质的垂直入射	166
11.4.3	对多重电介质的垂直入射	169
11.5	均匀平面波的斜入射	170
11.5.1	均匀平面波动的分量	171
11.5.2	相位、波长和波速	173
11.5.3	斜入射的几何关系	175
11.5.4	对理想导体的斜入射	176
11.5.4.1	入射波和反射波的解	176
11.5.4.2	传输线模拟	180
11.5.5	无损电介质分界面上的斜入射	182
11.5.5.1	与边界平行的极化	182
11.5.5.2	在入射平面内的极化	185
11.5.5.3	布儒斯特(极化)角	187
11.5.5.4	临界反射	188
▶11.6	非均匀平面波	192
11.6.1	解的性质	192
11.6.2	相位延迟与衰减	194
11.6.3	TE 和 TM 平面波	194
11.6.4	均匀平面波与非均匀平面波的关系	197
11.7	导引波——无损矩形波导	198

11.7.1 基本方程	199	12.5 偶极子的接收特性	239
11.7.2 TE模和TM模	200	▶12.6 偶极子阵列	242
11.7.3 TE _{m,n} 模	200	12.6.1 元因子与阵因子	242
11.7.3.1 通解	200	12.6.2 二元偶极子阵	244
11.7.3.2 波导的边界条件	202	12.6.3 N元偶极子阵	247
11.7.3.3 TE _{m,n} 波	202	12.7 小结和结论	249
11.7.4 TM _{m,n} 模	204	习题	250
11.7.5 波导内波的特性	205	附录一 正交坐标的微分算符	252
11.7.6 谐振腔	208	附录二 数学公式汇集	253
11.8 小结和结论	209	附录三 拉普拉斯方程的解	255
习题	210	附录四 有损耗媒质中的均匀平面波	255
第十二章 辐射	214	最低限度教学可删去的小节	
12.1 问题的定义	214	5.7.4 矩形空气槽	
12.2 基本场定律和位函数	215	6.1—6.4 圆柱坐标系中拉普拉斯方程的二维解	
12.2.1 标量位和矢量位	215	6.7.2—6.9 球形线圈等	
12.2.2 波动方程	216	7.4.3 均匀极化球	
12.2.3 波的通解——滞后位的应用	216	7.5.1 均匀场中均匀介电系数的球	
12.3 基本偶极子的辐射	218	7.7 安培电流模型	
12.3.1 点源场	218	7.10.1.1 应用安培电流模型	
12.3.2 电偶极子(TM)解	220	8.3.3 确定S和w的某些困难	
12.3.3 偶极子场的特性	221	8.6.2—8.6.3 外场对功率流的影响等	
12.3.3.1 波的运动	221	8.7—8.8 极化能和电能等	
12.3.3.2 波阻抗	222	9.4—9.8 时变场的幂级数法	
12.3.3.3 复数坡印亭矢量与辐射功率	223	10.2.4 传输线参数	
▶12.3.4 磁偶极子(TE)解	224	11.2.2 椭圆极化、圆极化和线极化	
12.4 实际天线	227	11.5—11.6 均匀平面波的斜入射等	
12.4.1 问题的特点	228	12.3.3.2 波阻抗	
12.4.2 实际的电偶极子	228	12.3.4 磁偶极子(TE)解	
12.4.2.1 解的说明	228	12.4.2 实际的电偶极子	
▶12.4.2.2 阻抗特性	231	12.6 偶极子阵列	
12.4.2.3 辐射特性	234		
▶12.4.3 半波天线	235		
12.4.3.1 解的说明	236		
12.4.3.2 辐射特性	237		

第八章 电磁能和功率

本章的目标是在电磁场的研究中引入能量观点。由于电工程师实际使用的许多器件大都基于电磁能的传输和转换,所以对于电工程师来说,了解电磁能的储存和传输特性是必要的。

在确定电系统的许多其它特性时,能量观点也是一种有力的工具。例如,我们将看到,应用电磁能量,我们可得出集总参数电路理论的基本参量 R 、 L 和 C 与基本电路元件的诸器件内的场之间的直接联系。当系统的各部分不能直接视为电感、电容或电阻时,电磁场、电磁能和电路理论之间的这种联系变得更有意义。

本章关于电磁能的研究,是以电磁场供给处于自由空间中的(包括组成物质宏观模型的)运动电荷与磁荷的功率为基础的。实验表明,在所有情况下,建立电磁场时都要减少某些其它形式的能量。反之,当该场消失时则放出可利用的能量。由能量守恒定律,人们可以定义电磁场的能量函数,它直接用电磁场量表示出供给电磁场(或由它传递)的能量。这样的电磁能和功率关系式,正是从传给自由空间中运动电荷与磁荷的电磁功率的表达式中得到的。所得到的能量平衡关系称为坡印亭定理,我们将根据它来区分自由空间和物质中各种形式的由电磁场储存或消耗的能量。

8.1 对运动电荷与磁荷的电磁力

首先让我们研究电磁场作用在自由空间中各种电荷、电流、磁荷、磁流分布上的力,它们是物质电磁描述的基础。我们知道,作用在以速度 \mathbf{v}_e 运动的电荷 q 上的洛仑兹力为

$$\mathbf{F}_e = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mu_0 \mathbf{H}) \quad (\text{牛顿}) \quad (8.1)$$

此式曾用来定义 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。应该记住, \mathbf{F}_e 是 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 施加到 q 上的力。根据对偶原理,运动的磁荷 q^* 也将受到一种外施力,它完全类似于式 8.1。可以证明,为了使外部 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 场加给电偶极子和磁偶极子的力矩一样,并且无论人们应用安培电流模型或磁荷模型去描述这些偶极子时都是如此,那么一个以速度 \mathbf{v}_m 运动的磁荷 q^* 必定受到一个洛仑兹形式的力

$$\mathbf{F}_m = q^*(\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (\text{牛顿}) \quad (8.2)$$

正如 \mathbf{F}_e 的情形一样, \mathbf{F}_m 是 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 施加到 q^* 上的力。

上述作用于各个电荷与磁荷上的力的公式,可容易地引申为作用于分布电荷与磁荷上的力密度。例如,可直接将式 8.1 推广到以速度 \mathbf{v}_e 运动的密度为 ρ 的电荷分布。由 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 施加在单位体积分布电荷上的力密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mu_0 \mathbf{H}) \\ &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{牛/米}^3) \end{aligned} \quad (8.3)$$

式中

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_e \quad (8.4)$$

• 1 •

1111591

它是因 ρ 运动而得出的电流密度。与此类似, 不难将式 8.2 推广, 从而得到由 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 施加在以速度 \mathbf{v}_m 运动的磁荷密度为 ρ^* 的单位体积分布磁荷上的力密度

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m &= \rho^*(\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \epsilon_0 \mathbf{E}) \\ &= \rho^* \mathbf{H} - \mathbf{J}^* \times \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{牛/米}^3) \end{aligned} \quad (8.5)$$

式中

$$\mathbf{J}^* = \rho^* \mathbf{v}_m \quad (8.6)$$

它是因 ρ^* 运动而得出的磁流密度。

8.2 供给运动电荷与磁荷的功率

电磁场供给运动电荷或磁荷的功率等于(由 \mathbf{E} 和 \mathbf{H})施加在电荷或磁荷的力与它们速度的标量积。因此, 如果一个以速度 \mathbf{v}_e 运动的电荷 q 在电磁场中受到的力为 \mathbf{F}_e , 则电磁场供给此电荷的功率为

$$\begin{aligned} P_e &= \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}_e \\ &= q \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} \quad (\text{瓦特}) \end{aligned} \quad (8.7)$$

式中磁场 \mathbf{H} 作用在 q 上的力分量不提供功率, 这是因为 \mathbf{v}_e 和 $\mathbf{v}_e \times \mu_0 \mathbf{H}$ 互相正交, 也就是

$$\mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{v}_e \times \mu_0 \mathbf{H}) \equiv (\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_e) \cdot \mu_0 \mathbf{H} = 0 \quad (8.8)$$

式中矢量与它自己的叉积自然是零。类似地, 由 q^* 上的力 \mathbf{F}_m 供给速度为 \mathbf{v}_m 的磁荷 q^* 的功率为

$$\begin{aligned} P_m &= \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_m = q^*(\mathbf{H} - \mathbf{v}_m \times \epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_m \\ &= q^* \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{H} \quad (\text{瓦特}) \end{aligned} \quad (8.9)$$

与电荷的情形相似, 电场 \mathbf{E} 作用在 q^* 上的力分量不提供功率, 这也是因为 \mathbf{v}_m 的方向与 $(\mathbf{v}_m \times \epsilon_0 \mathbf{E})$ 互相正交, 即

$$\mathbf{v}_m \cdot (\mathbf{v}_m \times \epsilon_0 \mathbf{E}) \equiv (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_m) \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = 0 \quad (8.10)$$

由此可见, 电磁场供给单位体积内运动电荷与磁荷的总功率密度, 等于(作用在 ρ 和 ρ^* 上的)力密度 \mathbf{f}_e 和 \mathbf{f}_m 与它们各自速度 \mathbf{v}_e 和 \mathbf{v}_m 的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} p &= p_e + p_m = (\mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v}_m) \\ &= \rho \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} + \rho^* \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{H} \quad (\text{瓦/米}^3) \end{aligned} \quad (8.11)$$

式中 \mathbf{f}_e 和 \mathbf{f}_m 用式 8.3 和 8.5 代替, 并应用了式 8.8 和 8.10 的结果。利用式 8.4 和 8.6 给出的电流与磁流密度表示式, 上述电磁场供给在自由空间中分布的运动电荷与磁荷密度的总功率密度在每点可简化为

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H} \quad (\text{瓦/米}^3) \quad (8.12)$$

式中 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 分别是给定点的宏观电流密度和磁流密度。

上面导出的功率密度 p 适用于自由空间中 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 的任意分布。例如, 在电离气体、等离子体以及真空管中的电子流就是这种分布。在这些系统中, 电磁场供给运动电荷或磁荷的功率(即 p) 容易进行测量, 从而可由实验得到证实。

将式 8.12 用于上一章由物质宏观模型导出的等效的自由空间电荷与磁荷分布,也是非常有意义的。然而,此时在物质内求出的有关功率和能量密度的任何公式,都只有在作为这些公式的基础的宏观模型是有效的条件下才能成立。正是由于前面定义的物质内平滑变化的宏观场是在一定条件下才能成立的,所以当我们对物质内各点的宏观结果赋予真实物理意义时必须非常小心。

另一方面,我们知道,物质的宏观模型的确能在物质以外的自由空间得出正确的(也就是可观察的)场。应用这个事实,并联系到能量守恒,我们便能预料到,供给无源材料整个体积的能量和功率,如同用物质内宏观场计算出来的那样,亦可直接(并完全)用物质外可观察的场来表示,该可观察场实际上必定是供给功率的场。这种情况将在下面加以证明。因此,尽管宏观能量和功率密度公式孤立地看没有物理意义(对物质中各个体积元),但它们的积分,即在物质整个体积上求和,则完全是有意义的,也就是说它们既可以测量,也可以通过实验得到验证。

8.3 能量守恒——坡印亭定理

能量守恒原理使我们相信,由一个如电磁场那样的系统提供的任何功率,要么使该系统的能量减少,要么从此系统的源发出功率流。这意味着,我们能够把场供给功率的上述表示式(式 8.12)改写成另一种等价的形式,在这种形式中可直接用场内的功率流,也就是只用电磁场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 来表示功率密度。这将在下面得到证明,并且所得表示式使我们能把场储存和传输的能量区别开来。

8.3.1 微分形式坡印亭定理

我们可将式 8.12 变成只包含场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的形式,为此把式 8.12 中的 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 分别用麦克斯韦方程中等于 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 的那些场量来取代。麦克斯韦方程可写为

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{J}^* \quad (8.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (8.14)$$

式中 \mathbf{J} 代表总电流密度,它包括自由电流密度和极化电流密度(也就是 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \partial \mathbf{P} / \partial t$),而 \mathbf{J}^* 代表磁流密度 $\mathbf{J}^* = \partial(\mu_0 \mathbf{M}) / \partial t$ 。

将 8.13 式的 \mathbf{J}^* 和 8.14 式的 \mathbf{J} 代入式 8.12,使场供给运动电荷与磁荷的功率密度变成为仅用场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 表示的形式,即

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H} = \left(\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} - \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} \\ &= [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.15)$$

借助于矢量恒等式(参见附录二)

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (8.16)$$

并且由于式 8.15 右边的各时间导数项满足

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) \quad (8.17)$$

$$\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) \quad (8.18)$$

我们可把式 8.15 变成为物理上更容易理解的形式, 即

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}^* = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) \quad (8.19)$$

式 8.19 称为坡印亭定理, 它代表了电磁能的基本平衡关系。式 8.19 的左边是电磁场供给运动电荷与磁荷的功率密度。

为看出坡印亭定理右边的意义, 我们引出两个新的量: 一个矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{瓦/米}^2) \quad (8.20)$$

它称为坡印亭矢量; 以及一个标量

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \quad (\text{焦耳/米}^3) \quad (8.21)$$

由此, 坡印亭定理变为

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H} = p \quad (8.22)$$

式 8.22 的最左边仅包含 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 场及其时间和空间导数; 而右边是根据加在电荷、磁荷上的力得出的, 它表示电磁场供给空间单位体积里运动电荷与磁荷的功率。这个功率必定是以某种方式取自提供该功率的点处的电磁场, 或者是取自别处的电磁场。在这方面我们看到, 式 8.22 的最左边包括两项: 第一项为一矢量的负散度, 且该矢量的量纲是单位面积的功率; 第二项为一标量的负时间导数, 且该标量的量纲是单位体积的能量。这就揭示出, 第二项应被看成电磁场就地提供的功率密度, 此时 w 可解释为电磁场储存的能量密度。故假如式 8.22 中的 p 是供给单位体积 ΔV (见图 8.1) 的功率密度, 则 w 就应是 ΔV 内 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 场就地储存的能量密度, 而 $(-\partial w / \partial t)$ 是能量减小的速率, 这是 ΔV 内的场供给 ΔV 内运动电荷与磁荷功率的结果。

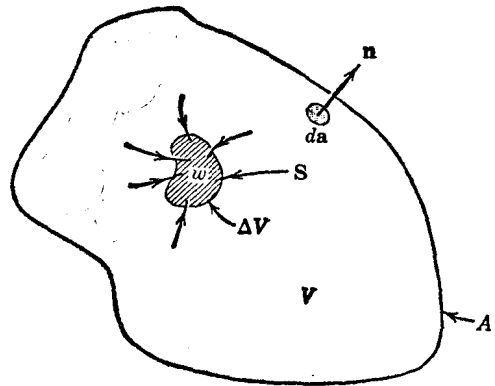


图 8.1

另外, 式 8.22 中最左边的第一项是矢量场 \mathbf{S} 在一点终止的密度。这样, 该项可看成是由 ΔV 外面的电磁场进入 ΔV 并被电荷与磁荷所吸收的功率流密度。这又意味着, 我们可把 \mathbf{S} 解释为穿过单位面积的电磁功率流 (或通量)。在式 8.20 中 \mathbf{S} 的单位是 (瓦/米²), 这与把 \mathbf{S} 解释为单位面积的功率流相一致。

应该注意, 之所以能用电磁功率和能量来解释 \mathbf{S} 和 w , 只因它们都是电磁场量, 也就是说它们与电磁场的源无关, 不论这些场是否与物质有关。这个事实使我们能够从同时出现的其它能

量形式中把电磁能量区分出来。

根据式 8.21, 电磁场储存的能量密度 w 可进一步分成两个分量, 其一是

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \quad (\text{焦耳/米}^3) \quad (8.23)$$

它与电场有关, 因此它代表电场储存的能量密度; 另一分量是

$$w_H = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \quad (\text{焦耳/米}^3) \quad (8.24)$$

它与磁场有关, 并代表磁场储存的能量密度。

另一方面, 功率流密度 \mathbf{S} 是电场和磁场相互作用的结果, 故不能分为单独与 \mathbf{E} 或单独与 \mathbf{H} 相联系的分量。

8.3.2 积分形式坡印亭定理

在图 8.1 所示的闭合面 A 所包围的任意体积 V 上, 对式 8.22 的两边积分, 可以得出积分形式的坡印亭定理

$$-\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \frac{d}{dt} \int_V w dv = \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H}) dv = P \quad (8.25)$$

式中应用了高斯定理(式 3.147) 将最左边的第一项变成面积分, 并因固定不动的体积 V 与时间无关, 故用全导数符号取代了偏导数符号。式 8.25 的右边是供给 V 的功率密度的体积分, 现在代表供给 V 内运动电荷与磁荷的总功率 P 。

进而, 由于我们把坡印亭矢量 \mathbf{S} 解释为单位面积的电磁功率流, 在式 8.25 中我们看到, \mathbf{S} 在闭合面 A 上的积分(当带有负号时)必定是穿过表面 A 从外部区域进入体积 V 的总电磁功率。

上式左边第二项(当带有负号时), 表示 V 内电磁场储存的总功率随时间的下降率。这样, 我们由式 8.25 和能量守恒原理可得出以下结论: 在任意体积 V 内, 供给全部电荷与磁荷的总电磁功率, 必定或是来自于 V 内电磁场储存的总电磁能 W 随时间的下降率, 其中

$$W = \int_V w dv = \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) dv \quad (8.26)$$

不然就必定是来自于由 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 给定的密度所携带的向内总电磁功率流(从外面穿过包围 V 的表面 A 进入), 即

$$-\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \quad (8.27)$$

式中的负号表示“进入”(也就是在 $-d\mathbf{a}$ 方向)。

在式 8.23 和 8.24 中, 我们曾将电磁场储存的能量密度分为单独的电和磁的分量, 按照这种方法, 也可把储存的总电磁能(式 8.26)分为 V 内电场储存的总能量

$$W_E = \int_V w_E dv = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 dv \quad (8.28)$$

和 V 内磁场储存的总能量

$$W_H = \int_V w_H dv = \int_V \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 dv \quad (8.29)$$

应该记住, W_E 和 W_H 只代表在给定系统中 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 所储存的总能量的一部分, 另一部分能量可能(并且一般将会)储存于系统的极化和磁化电荷之中(见 8.5 节)。另一方面, 当人们只考虑没有运动电荷或磁荷的自由空间(或真空)区域时, W_E 和 W_H 才真正代表该系统内储存的总电磁能。

8.3.3 确定 \mathbf{S} 和 w 的某些困难

我们曾把坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 说成是空间每点的电磁功率密度, 应该指出, 这种解释不能从坡印亭定理的任何一种形式得到严格证明。这里的困难在于, 尽管由 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的散度(或它沿任意闭合面的积分)可得出电磁场供给的正确功率值, 但是人们还是可在 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 上附加任意无散矢量场, 而仍能满足坡印亭定理。换句话说, 由给定区域中 \mathbf{S} 矢量的散度(或等效地按照高斯定理, 由 \mathbf{S} 沿闭合面的积分)反推 \mathbf{S} 的值, 其结果不是唯一的, 因此需要附加条件。这就需要测出穿过空间某一非闭合面真实的电磁功率。据此便可明确地决定, 实际上是否需要在 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 上增加一个无散矢量场来表示电磁功率流密度。然而, 这样做的困难在于, 为测量穿过一非闭合面之功率流而设计的任何装置, 事实上都必然是测出进入该装置的总功率流, 因此测出的仍是穿过包围此装置的某闭合面的总功率流, 因此使你的努力不能成功。

另一方面, 仅选择 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 作为一点的总电磁功率密度, 而没有任何附加项, 有下述几点理由: (1) 它总能得出进入(或流出)一闭合面的总功率的正确结果; (2) 在 $\mathbf{H} = 0$ 的静电系统中或在 $\mathbf{E} = 0$ 的静磁系统中 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$, 这点与实验中没有发现任何功率流的结果完全一致; (3) 最后, 它具有简单的优点。这样就避免了对电磁功率密度强求选择一通用无散项附加到 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 中去。于是, 按照这样的看法, 我们现在假定坡印亭矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{瓦/米}^2) \quad (8.30)$$

给出了空间每点的单位面积电磁功率流。

在推导电磁场中储存的电能和磁能时, 可以发现一个更加简单的不确定性。例如, 式 8.23 和 8.24 给出的有关 w_E 和 w_H 的公式, 是根据坡印亭定理中的时间导数项得到的。既然如此, 人们总可以在 w_E 或 w_H 上增加任意一个与时间无关的项, 而不影响其时间导数, 并因此也不影响坡印亭定理中的功率项。

然而, 这种不确定性是不难避免的。这只要在系统处于电磁“寂静”状态(即所有电磁量都等于零)时, 规定系统储存的电磁能量密度为零就行了。故如果我们规定在某点 $\mathbf{E} = 0$ 时 $w_E = 0$, 则式 8.23 给出的表示式就是唯一的。类似地, 规定在 $\mathbf{H} = 0$ 时 $w_H = 0$, 式 8.24 给出的表示式也是唯一的。在每一种情况下, 通过选择任意的零能量(或能量参考状态)都会使可能的附加静态项等于零。

8.4 电场和磁场储存的能量

在着手讨论坡印亭定理的功率项(它们与物质中能量的储存和耗散有关)之前, 让我们用简单的例子来说明空气中(或真空中)能量是怎样储存在电磁场里的。具体地说, 下面讨论两个非常简单的例子, 说明如何用空气电容器和空芯电感器内储存的电磁能量来圆满地解释普通电路的

储能关系式。

8.4.1 空气电容器中储存的电能

让我们考虑(如图 8.2 所示的)早在 5.7.1 节讨论过的平行板电容器中储存电能的性质。该系统由彼此靠近的平行导体板组成,导体板长度为 l 、宽度为 w 、间隔为 d 。一电池加于两板,使两板间保持直流电压 V_0 。

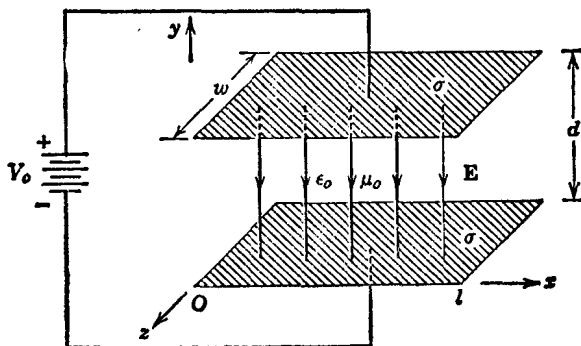


图 8.2

为了简单,仍假定两板的宽度 w 和长度 l 远大于它们的间隔 d (即, $l \gg d$ 和 $w \gg d$), 故我们完全可以忽略系统开放端以外静电场 \mathbf{E} 的边缘效应。

在该系统板间空气域内建立的无边缘效应静态 \mathbf{E} 场是均匀的, 方向与板垂直, 且从上(正)板指向下(负)板, 其大小等于电压 V_0 。除以距离 d , 也就是

$$\mathbf{E} = -\mathbf{i}_y \frac{V_0}{d} \quad (8.31)$$

如图 8.2 所示。

由 8.23 式给出的、在板间空气域内每点电场中储存的能量密度为

$$w_E = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{d^2} \quad (8.32)$$

则该系统中储存的总能量就等于能量密度 w_E 在板间空气域 V 内的体积分

$$\begin{aligned} W_E &= \int_V w_E dv = \int_{z=0}^l \int_{y=0}^d \int_{x=0}^w \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{d^2} dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{d^2} (lwd) \end{aligned} \quad (8.33)$$

式中, 由于 V 内各点的 w_E 是常数, W_E 简化为 w_E 与体积 $V = lwd$ 的乘积。

如果现在把式 8.33 的 W_E 表示成如下形式:

$$W_E = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 lw}{d} \right) V_0^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (8.34)$$

我们看到, W_E 最后化为电路理论中众所周知的集总电容 C 所储存能量的公式, 其中

$$C = \frac{\epsilon_0 lw}{d} \quad (8.35)$$

显而易见,式 8.35 就是无边效应平行板电容器的静态或直流电容。它与在 5.7.1 节根据电容器正板的自由电荷与两板间电压 V_0 之比所求出的结果完全一致。

由静态系统储存的总电能来确定它的电容量,这对于所有空气电容器都是一种普遍适用的正确方法(我们将很快看到,事实上对所有填充线性电介质材料的电容器都是如此)。

重要的是应该看到,电容器储存的电能并不保持在充有自由电荷的极板上,而是直接储存在周围空气域中的静电场 \mathbf{E} 内。能量储存在场中的事实,以及(如式 8.34 所给出的)我们可用此能量确定电容 C 的事实,意味着电容器的电路特性实际上制约于它们周围的电场。这种情况将在下章讨论缓变场时进一步论证。

8.4.2 空芯电感器中储存的磁能

作为电磁场储能的第二个例子,我们考虑早在 6.7.1 节讨论过的空气中简单单匝电感器(如图 8.3 所示)储存的磁能。由三块电导率为无限大的矩形导体板连接起来,形成该电感器矩形回路的三个边,其高为 d 、长为 l 、宽为 w 。在 $x=0$ 处该回路的第四个边加上分布电流源,使该闭合回路中保持无散的直流电流 I_0 ,该电流在由短路板和电源构成的闭合路径中沿顺时针方向流动,如图 8.3 所示。

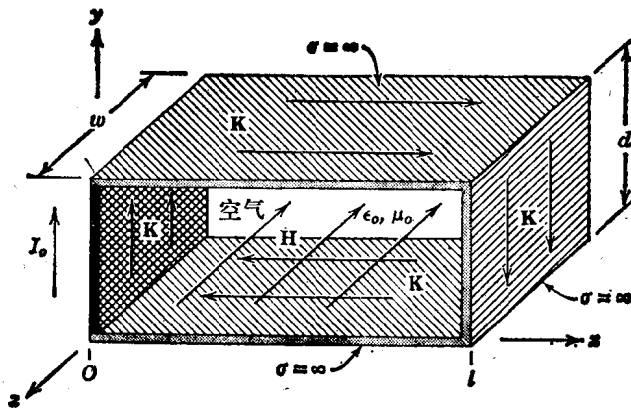


图 8.3

象上例一样,为简单起见,再次假定系统的长度 l 和宽度 w 远大于间隔 d (即 $l \gg d$ 和 $w \gg d$),这样我们完全可以忽略边缘效应。在假设无边效应的条件下,我们早在 6.7.1 节得出,该单匝电感器内建立的静磁场是 z 方向的均匀场,在线圈所包围的空间各点,其值为

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i}_z \frac{I_0}{w} \quad (8.36)$$

如图 8.3 所示。

根据式 8.24 和 8.36,在闭合空气域内,磁场中储存的磁能密度为

$$w_H = \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_0^2}{w^2} \quad (8.37)$$

现在,如果忽略外面空气域中形成的微弱边缘场,则该系统储存的总磁能都储存在闭合空气域

的 \mathbf{H} 场内, 于是其值就等于单位体积储存的磁能 w_H (由式 8.37 给出) 在体积 $V = lwd$ 内的积分, 即

$$\begin{aligned} W_H &= \int_V w_H dv = \int_{z=0}^{-w} \int_{y=0}^d \int_{x=0}^l \frac{\mu_0 I_0^2}{2w^2} dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2w^2} (lwd) \end{aligned} \quad (8.38)$$

将此式整理后, 我们看到在单匝电感线圈中储存的总磁能与电路理论中电感器的储能表示式相同, 即

$$W_H = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 l d}{w} \right) I_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (8.39)$$

该系统的电感 L 为

$$L = \frac{\mu_0 l d}{w} \quad (8.40)$$

这个结果与前面 6.7.1 节得到的该系统的电感量完全一致, 那时我们把电感 L 定义为穿过电流回路的静磁通量 λ 与回路内流过的电流 I_0 的比值。

式 8.39 给出的表达形式将系统储存的总静磁能与它的电感 L 联系起来, 这个表达式对空气中的所有电感系统, 并且广义地说对于所有仅仅包括线性磁性材料 (即磁通密度 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 成正比的) 的电感系统都是适用的, 这将在 8.8 节证明。

总之, 我们看到在上述电容和电感模型中储存的电能和磁能, 实际上是储存在该系统导体周围真空中建立的电磁场内, 而不是象电路理论中通常所假定的储存在构成具体集总电容或电感器的导线、平板和线圈之上。下一章当我们讨论电路元件中缓变场的性质时, 将进一步强调电磁场在电气元件中所起的重要作用, 那时这种作用将变得更为明显。

8.5 物质吸收的功率

8.5.1 极化、磁化和传导功率密度

下面对式 8.22 给出的坡印亭定理的右边进行讨论, 并在物质宏观模型的范围内研究由宏观电磁场供给物质的功率究竟到那里去了。从 8.2 节的讨论我们已经知道, 在任意点上, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 供给组成物质的电荷与磁荷的功率密度为

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H} \quad (8.41)$$

式中 \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 是所论点的净电流和磁流密度。另一方面, 由第七章的讨论知道, \mathbf{J} 和 \mathbf{J}^* 的值与物质的极化特性、磁化特性和导电特性有直接关系。因此我们现在有可能把式 8.41 变成另一种形式, 在这种形式中, 它能反映出物质中分别由极化、磁化和导电过程所吸收的功率 (仍在物质宏观模型有效的范围内)。

由第七章有关磁化材料的讨论中, 我们知道, 在固定磁化材料中, \mathbf{J}^* 只能由时变磁化强度得出, 即

$$\mathbf{J}^* = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (8.42)$$

因此

$$p_M = \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (\text{瓦/米}^3) \quad (8.43)$$

它应是磁化强度随时间变化时,由电磁场供给物质的功率密度。

此外,一般来说,电流密度可以由极化分量 $(\partial \mathbf{P} / \partial t)$ 和自由分量 \mathbf{J}_f 组成,即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (8.44)$$

极化分量引起的功率密度分量为

$$p_P = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (8.45)$$

它代表极化强度随时间变化时,由宏观电磁场供给物质的功率密度。

另一方面,由自由电流得出的功率密度分量可能与不同的物理过程有关,这些物理过程中使电荷保持动态平衡的外力性质有所不同。如果自由电流完全是由于物质导电性形成的,那么电场施加的力被与电荷移动速度有关的一些类似于摩擦的力所平衡。在这种情况下,由电磁场供给的功率以热的形式耗散掉(即产生电阻的欧姆热或焦耳热)。在线性导体中 $(\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E})$,耗散功率密度为

$$p_d = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \sigma |\mathbf{E}|^2 \quad (\text{瓦/米}^3) \quad (8.46)$$

然而, \mathbf{J}_f 也可能是其它形式的自由电流密度。例如, \mathbf{J}_f 是在电流源或电压源中流动的源电流密度 \mathbf{J}_s 。在那种情况下, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s$ 代表由场供给源的功率(如果是正的),或者是源供给场的功率(如果是负的)。换句话说

$$p_s = -\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} \quad (8.47)$$

(连同负号一起)代表源供给场的功率密度。广义地说

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} \quad (8.48)$$

代表转换成其它形式的能量(如果是正的)的电磁功率,或相反(如果是负的)。

将式 8.43 和式 8.45 至 8.47 给出的供给物质的各种形式功率密度加起来,则式 8.41 的右边变成更有意义的形式

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s + \sigma |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \\ &= -p_s + p_d + p_P + p_M \end{aligned} \quad (8.49)$$

因此,在某点供给单位体积内运动电荷与磁荷(它们构成物质的宏观模型)的功率可能以各种方式被吸收。它在源内可变成其它形式的能量 $(-p_s)$,在导体内变成热并被消耗掉 (p_d) ,在电介质材料内增加极化程度 (p_P) ,最后,在磁化材料内增加磁化程度 (p_M) 。如式 8.49 表明的那样,在空间给定点上,究竟发生这些过程中的哪一种(也可能同时发生或全不发生),取决于所论点上 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的具体值以及材料的类型。

8.5.2 物质中的坡印亭定理

现在,我们把式 8.22 给定的坡印亭定理变为更有用处的形式。将该式右边供给物质的功率密度,用上面式 8.49 给出的 p 的明确形式来代替。如果再把 $-p_s = +\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s$ 项移到所得公式的左边,并且把电磁场储存能量密度的时间导数(即 $\frac{\partial w}{\partial t}$)项移到此式的右边,最后坡印亭定理成为

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s = \sigma |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right) \quad (8.50)$$

或者等效地写成

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} + p_s = p_d + p_P + p_M + \frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_H) \quad (8.51)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{供给单位体积的总功率}} = \underbrace{\quad}_{\text{单位体积物质吸收的功率}} + \underbrace{\quad}_{\text{单位体积 E 和 H 场吸收的功率}}$

这种形式坡印亭定理的左边,可认为是供给一个点的总功率(单位体积)。其中一部分是由单位体积外面供给的(由 $-\nabla \cdot \mathbf{S}$ 表示),而另一部分由单位体积内的源供给(由 p_s 表示)。

此能量平衡关系式的右边,必定是给定点得到的功率密度所变换成的各种能量形式。具体地说,由式 8.50(或 8.51)的右边我们看到,被提供的功率密度可变成传导热损耗(p_d),也可用以增加物质极化或磁化的功率(p_P 或 p_M),或者为增加所论点电场与磁场的储存能量(单位体积)提供所需之功率($\partial w_E / \partial t$ 和 $\partial w_H / \partial t$)。为便于参阅,将在坡印亭定理中出现的各项列在表 8.1 中。

表 8.1

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ = 坡印亭矢量 =	{ 在 \mathbf{S} 方向单位面积上的功率流
$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} ^2$ = 电场中单位体积储存的能量	
$w_H = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} ^2$ = 磁场中单位体积储存的能量	
$p_P = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ = 为增加极化供给单位体积的功率	
$p_M = \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ = 为增加磁化供给单位体积的功率	
$p_d = \sigma \mathbf{E} ^2$ = 线性导体中单位体积消耗的功率	
$p_s = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s$ = 由源供给的单位体积的功率	
坡印亭定理: $-\nabla \cdot \mathbf{S} + p_s = p_d + p_P + p_M + \frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_H)$	

将式 8.50 对闭合面 A 所包围的任意体积 V (如图 8.1 所示)作积分,可得出物质中积分形式的坡印亭定理

$$\underbrace{-\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s dv}_{\text{供给 } V \text{ 的总功率}} = \underbrace{\int_V \left(\sigma |\mathbf{E}|^2 + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) dv}_{V \text{ 内物质吸收的功率}}$$