可靠性工学

张福学 著

中国科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了可靠性的数学基础、评定方法和应用，还包括了著者从事固态压电惯性传感器和医疗仪器可靠性研究的成果。全书共分十二章，第一、二章分别简述掌握可靠性理论所必须的概率论和数理统计基础；第三章论述统计失效模型；第四、五章论述寿命分布的点估计和区间估计方法；第六章简述一般电子产品的恒应力寿命试验和加速寿命试验；第七章简述指数分布寿命型复杂系统的可靠性评定模型；第八章简述可靠性筛选；第九、十章分别论述抽样检验和假设检验；第十一、十二章简述系统可靠性。全书有可靠性和质量管理的实用示例180例。

本书可供电子、宇航和机械等部门从事可靠性工作的研究、设计和试验人员阅读，亦可供大学概率统计，计算机、电子和管理科学等专业的高年级学生、研究生和教师参考。

（京）新登字175号

可 靠 性 工 学

张福学 著

责任编辑：赵兰慧

封面设计：胡焕然

*

中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市燕山联营印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：21.25 插页：2 字数：570千字

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数：1—1,750册 定价：12.20元

ISBN 7-5046-0492-5/T·5

目　录

第一章　概率论基础

本章简述概率论中一些与可靠性和质量管理有关的基础知识。

§ 1.1　集合论基础

1.1.1　集合

通常把具有某种共同性质的一组事物称为“集合”。一般集合用一个大写字母(如A)表示，而集合中的事物称元素，用小写字母表示。例如，正偶数的集合

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$$

也可写成

$$A=\{y|\ y=2I,\ I\text{是正整数}\}$$

显然，该集合中所有元素的性质是y必须是一个正偶数。

集合按其包含元素的多少可划分为三类，即

1. **零集**(或空集)　没有元素的集合称为零集(或空集)，以ϕ表示。

2. **有限集**　若一个集合A的元素与有限个自然数形成的集合$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$一一对应(其中$n$是有限的)，则称$A$是1个有限集。

3. **无限集**

(1) 可数的无限集：若集合A的元素与自然数全体$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$一一对应，则$A$是可数无限的，称可数的无限集。例如

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$$
$$B=\{-1,\ -2,\ \cdots,\ -n,\ \cdots\}$$

$$C=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n+1},\ \cdots\right\}$$

都是可数的无限集。

（2）不可数的无限集：若集合A既不是空集、有限集，也不是可数无限集，则称A是不可数的无限集。例如：

$$A=\{x\mid 0<x<1\}$$

$$B=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$$

1.1.2 集合的运算

若元素a属于集合A，则记作$a\in A$；若元素a不属于集合A，则记作$a\notin A$或$a\overline{\in}A$。

若集合A_1的每个元素也是集合A_2的元素，则称A_1为A_2的子集，记作$A_1\subseteq A_2$。

如果$A_1\subseteq A_2$，且$A_2\subseteq A_1$，则称A_1与A_2相等，记作$A_1=A_2$。

讨论中所考虑的元素的全体称为论域或空间，用S表示。

设$A\subset S$，我们称集合$\bar{A}=\{a\mid a\in S$，但$a\overline{\in}A\}$是A（关于S）的余集，记作$\bar{A}$或$(S-A)$。例如，如果

$$A=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\}$$

$$S=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$$

那么

$$\bar{A}=\{y\mid \frac{1}{2}<y\leqslant 2\}$$

（1）集合的并

设A_1与A_2是两个集合，称集合

$$A_1\cup A_2=\{a\mid a\in A_1\text{或}a\in A_2\}$$

是A_1与A_2的并集。例如，如果$A_1=\{0\leqslant y\leqslant 1\}$，$A_2=\{\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}\}$，那么

$$A_1\cup A_2=\{0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}\}$$

显然，并集的概念可推广为

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\{a\mid a\text{至少属于某个}A_i\}$$

或

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{a|\ a\text{至少属于某个}A_i\}$$

（2）集合的交

设A_1与A_2是两个集合，称集合

$$A_1\cap A_2=\{a|\ a\in A_1,\ \text{且}a\in A_2\}$$

是A_1与A_2的交集。例如，如果$A_1=\{0\leqslant y\leqslant 1\}$，$A_2=\{\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}\}$，那么

$$A_1\cap A_2=\{\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\}$$

显然，交集的概念可推广为

$$A=\bigcap_{i=1}^{k}A_i=\{a|\ a\text{同时属于每一个}A_i\}$$

或

$$A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{a|\ a\text{同时属于每一个}A_i\}$$

（3）集合的常用关系式

应用定义及并集和交集运算，能容易地建立如下常用的集合关系式：

①$A\cup A=A$

②$A\cap A=A$

③$A\cup S=S$

④$A\cap S=A$

⑤若$A_1\subset A_2$，则$A_1\cap A_2=A_1$

⑥$A\cup\bar{A}=S$

⑦若$\bar{A}_1\subset A_2$，则$\bar{A}_2\subset A_1$

⑧$A\cap\bar{A}=\phi$

⑨$\phi\subset A$，A是任意集合

⑩$A\cup\phi=A$

⑪$A\cap\phi=\phi$

⑫ $A_2=(A_2\cap A_1)\cup(A_2\cap\bar{A}_1)$

以上各式字母的意义，如前所述。

（4）集合的子集个数

设集合A是一个有限集，$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$,则集合$A$的所有子集共$2^n$个。证明如下：

∵①ϕ是A的一个子集；

②每次从A中取出1个元素构成$\binom{n}{1}$个子集；

③每次从A中取出2个元素构成$\binom{n}{2}$个子集；

……

④每次从A中取出n个元素构成$\binom{n}{n}$个子集。

∴A总共有子集个数

$$N=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

这是因为由二项式定理

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

令$a=b=1$，则得

$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

例1.1 如果$A_1\cap A_2=\phi$，则称A_1与A_2是互不相容的集合。设$A_2=\{y|\,0\leqslant y\leqslant 3\}$，$A_1=\{y|\,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 3\}$，试将$A_2$写成两个互不相容的集的并，而其中一个是$A_1$。

解：如图1.1所示，令$A_3=A_2-A_1$，则$A_3\cap A_1=\phi$，故

$$A_2=A_1\cup A_3$$

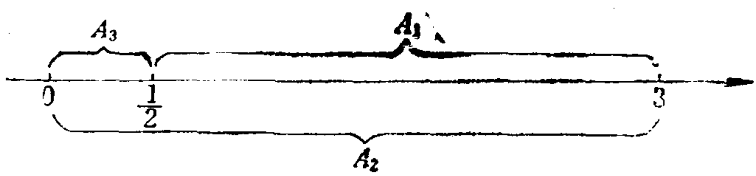

图 1.1 $A_2=A_1\cup A_3$的示意图

例1.2 证明 $\overline{(\overline{A})}=A$

证：∵(1) 任取一个元素 $a\in\overline{(\overline{A})}\Rightarrow a\overline{\in}\overline{A}\Rightarrow a\in A\Rightarrow\overline{(\overline{A})}\subset A$；

(2) 任取一个元素 $a\in A\Rightarrow a\overline{\in}\overline{A}\Rightarrow a\in\overline{(\overline{A})}\Rightarrow A\subset\overline{(\overline{A})}$。

∴ $\overline{(\overline{A})}=A$

例1.3 证明

(1) $\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A\right)}=\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$ ； (2) $\overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A\right)}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$

证(1)：∵①任取一个元素 $a\in\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)}\to a\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\Rightarrow a\overline{\in}A_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)\Rightarrow a\in\overline{A}_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)>a\in\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i\Rightarrow\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A\right)}\subset\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$

②任取一个元素 $a\in\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i\Rightarrow a\in\overline{A}\,(i=1,2,3,\cdots,k)\Rightarrow a\overline{\in}A_i\,(i=1,2,\cdots,k)\Rightarrow a\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{k}A\to a\in\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)}\Rightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}\subset\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)}$

∴ $\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)}=\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$

证(2)：∵①任取一个元素 $a\in\overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\right)}\Rightarrow a\overline{\in}\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i$，($a$ 至

少不属于某一个A_j*）$\Rightarrow a\in\bar{A}_j$*（至少属于一个$\bar{A}_j$*）$\Rightarrow a\in\bigcup_{i=1}^{k}\bar{A}_i$

$$\Rightarrow\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)}\subset\bigcup_{i=1}^{k}\bar{A}_i$$

②任取一个元素$a\in\bigcup_{i=1}^{k}\bar{A}_i$（$a$属于某一个$\bar{A}_j$*）$\Rightarrow$

$$a\overline{\in}A_j^*\Rightarrow a\overline{\in}\bigcap_{i=1}^{k}A_i\Rightarrow a\in\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{k}\bar{A}_i\subset\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)}$$

$$\therefore\ \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)}=\bigcup_{i=1}^{k}\bar{A}_i$$

例1.4 设有三个集合A_1，A_2，A_3的元素均属于S，试将A_3写成互不相容的集合的并。

解：如图1.2所示，A_3可写成二、三、四个互不相容的集合的并：

(1) $A_3=[A_3\cap(A_1\cup A_2)]\cup[A_3\cap\overline{(A_1\cup A_2)}]$

(2) $A_3=(A_3\cap\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\cup(A_3\cap A_1)\cup(A_3\cap A_2\cap\bar{A}_1)$

(3) $A_3=(A_3\cap\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\cup(A_3\cap A_1\cap\bar{A}_2)$
$\cup(A_3\cap A_2\cap\bar{A}_1)\cup(A_1\cap A_2\cap A_3)$

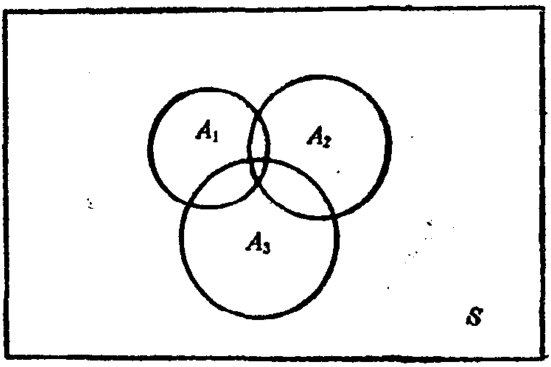

图 1.2 有集合A_1，A_2，A_3的S

例1.5 设A_1，A_2均属于S，证明

$$S=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap\bar{A}_2)\cup(\bar{A}_1\cap A_2)\cup(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$$

证： 如图1.3所示，应用关系式

$$A_1=(A_1\cap\bar{A}_2)\cup(A_1\cap A_2)$$

$$A_2=(A_1\cap A_2)\cup(\bar{A}_1\cap A_2)$$

$$\overline{(A_1\cup A_2)}=(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$$

$$(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_2)=(A_1\cap A_2)$$

可得

$$\begin{aligned}S&=(A_1\cup A_2)\cup\overline{(A_1\cup A_2)}\\&=(A_1\cap\bar{A}_2)\cup(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_2)\cup(\bar{A}_1\cap A_2)\\&\quad\cup(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\\&=(A_1\cap\bar{A}_2)\cup(A_1\cap A_2)\cup(\bar{A}_1\cap A_2)\cup(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\end{aligned}$$

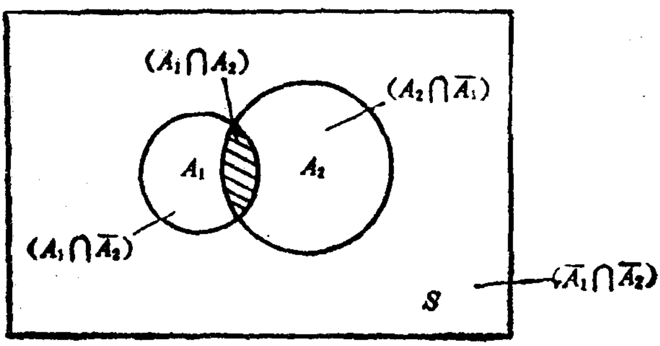

图 1.3 有集合A_1，A_2的S

§ 1.2 事件与样本空间

1.2.1 事件

自然界和人类社会中发生的现象可分为三种情形，即必然现象、随机现象和不可能现象。在概率论中，所谓事件是指随机试

验的每一可能结果。

在一定条件下必然发生的事件称为必然事件，如在高处的重物总是垂直落到地面是一个必然事件，记作S。

在一定条件下必然不可能发生的事件称不可能事件，记作Φ_0。

在一定条件下可能出现也可能不出现的事件称随机事件。

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支，它是数理统计学的基础。数理统计是研究如何收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考虑的问题做出推断和预测的一门数学学科。

1.2.1 随机试验与样本空间

我们对随机现象进行一次观察或试验统称为随机试验。这个试验在相同条件下可以重复进行，有多种可能的结果，所有可能的结果都可以预知，而每次试验的结果事前不可预言。例如，抛掷一个质地均匀的硬币是一个随机试验，它的所有可能结果是正面朝上和正面向下(反面)，但每一次试验事先无法预言是应出现正面或反面。

随机试验E可能出现的每一个基本结果ω称为E的一个基本事件，用ω表示。试验E的所有基本事件组成的集合$\{\omega\}$称为E的样本空间，记作S，即$S=\{\omega\}$。因此，基本事件ω又称为样本点。如E = 一件产品从时间$t=0$开始工作，观察T个单位时间，看它是否在整个T时间内都工作：

ω_1 = 工作了T个工作时间；

ω_2 = 未工作到T个工作时间；

$S=\{\omega_1, \omega_2\}$

又如

E = 连续观察一件产品的工作寿命

$\omega_x = x$

$S=\{x \mid 0 \leqslant x < \infty\}$

例1.6 由两个单元组成的系统，当且仅当一个或两个同时

工作时才工作，令

$$S=\{\omega_1=\text{单元1工作，单元2不工作},\\ \omega_2=\text{单元1工作，单元2工作},\\ \omega_3=\text{单元1不工作，单元2工作},\\ \omega_4=\text{单元1不工作，单元2不工作}\}$$

在S上确定一个函数f，该函数定义一个所谓的数值随机变量(见§1.7)，并描述系统的两个工作状态。

解：设单元1工作记为$x=1$，单元2工作记为$y=1$；单元1不工作记为$x=-1$，单元2不工作记为$y=-1$。那么

$$S=\{(x,\ y)\}=\{(1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (-1,\ 1),(-1,-1)\}$$

故

$$f=f(x,\ y)=x+y=\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

§ 1.3　事件间的关系与运算

基本事件是一种不可再分的事件，但一个随机试验的一个事件不一定是基本事件。有的事件A可以看成是由若干个基本事件组成的集合，故这个事件A是样本空间S的一个子集。当且仅当事件A所包含的一个基本事件出现时，则称事件A出现。下面说明事件间的关系及事件的运算。

(1) 事件的包含关系

若事件A出现时，必导致事件B出现，则称A包含于B，记作$A\subset B$，或称事件B包含A。

(2) 事件的相等

若事件A与事件B有下列关系：

$$A\subset B \qquad \text{且} B\subset A$$

则称$A=B$，即事件A等于事件B

(3) 事件的和

"事件A与事件B当中至少有一个出现"也是一个事件，称此

事件为A与B的和，记作$A\cup B$，有时简记为$A+B$。“事件A_1，A_2，…，A_n当中至少有一个事件出现”也是一个事件，称此事件为A_1，A_2，…，A_n这n个事件之和，记作$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。同样，“事件A_1，A_2，…，A_n，…当中至少有一个事件出现”是一个事件，称此事件为可列事件$A_i(i=1, 2, 3, \cdots)$之和，记作$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

(4) 事件的积

“事件A和B同时发生”也是一个事件，称此事件为A与B的积，记作$A\cap B$，有时简记为AB。“事件A_1，A_2，…，A_n同时发生”也是一个事件，记作$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。同样，“事件A_1，A_2，…，A_n，…同时发生”也是一个事件，记作$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$。

(5) 事件的差

“事件A出现而B不出现”也是一个事件，称此事件为事件A与事件B的差，记作$A-B$。

(6) 如果事件A与事件B不可能同时出现，即$A\cap B=\Phi$，则称事件A与事件B是互不相容的事件。

(7) 对立事件

设S为样本空间。如果事件A和事件B满足

$A\cup B=S$，且$A\cap B=\Phi$

则称事件A和事件B是互逆事件，且称A是B的对立事件或逆事件，记作$A=\bar{B}$或$\bar{A}=B$。

(8) 互斥事件

若事件A与事件B只满足

$$A\cap B=\Phi$$

则称事件A和事件B是互斥事件，或称互不相容事件。显然基本事件间是互不相容的。人们通过长期的研究，发现事件的运算与