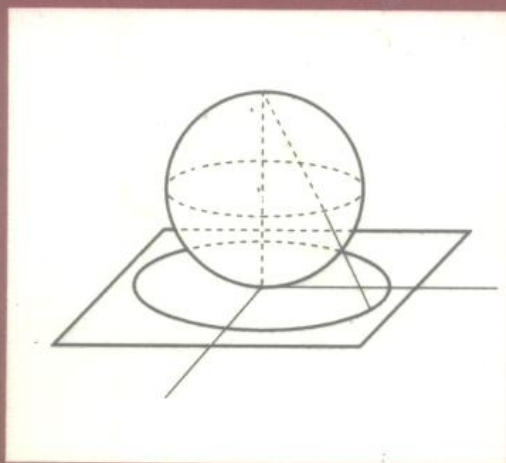


工程数学丛书



复变函数与积分变换

主编 田根宝 副主编 刘振周



上海交通大学出版社

工程数学丛书

复变函数与积分变换

田根宝 主 编 刘振周 副主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

复变函数与积分变换是工程数学的主要内容之一,也是高等院校的重要基础课。本书由上海铁道大学田根宝主编,上海工程技术大学刘振周 副主编。编写中力求创新,适应教学改革,每章后面增加了一节综合应用,以利读者进一步掌握本章的主要概念与主要方法,起到复习、巩固和提高的作用。全书共分两大部分:复变函数(第一章复变函数,第二章解析函数,第三章复变函数的积分,第四章级数,第五章留数,第六章保角变换);积分变换(第七章傅里叶变换,第八章拉普拉斯变换)。书末附有习题答案可供读者参考。

工程数学丛书

复变函数与积分变换

上海交通大学出版社·出版、发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

全国新华书店经销

上虞科技外文印刷厂·印刷

开本: 850×1168(毫米) 1/32 印张: 10.75 字数: 276000

版次: 1997 年 8 月 第 1 版 印次: 1997 年 8 月 第 1 次

印数: 1—4500

ISBN 7-313-01870-3/O·121

定价: 18.50 元

前 言

复变函数与积分变换是工程数学的主要内容之一,也是高等院校的重要基础课。本书在编写中力求创新,适应教学改革,每章后面增加了一节综合应用,以利读者进一步掌握本章的主要概念与主要方法,起到复习、巩固和提高的作用。

全书共分两大部分:复变函数与积分变换。书末附有习题答案供读者参考。

本书由田根宝(上海铁道大学)主编,刘振周(上海工程技术大学)副主编,许伯生(上海工程技术大学)编写了复变函数中第一章复变函数与第三章复变函数的积分,卢柏龙(上海工程技术大学)编写了复变函数中第二章解析函数与第六章保角变换,陈靖栋(上海铁道大学)编写了复变函数中第四章级数,蒋志洪(上海铁道大学)编写了复变函数中第五章留数,李玉贞(上海铁道大学)编写了积分变换中的第一章傅里叶变换,王国金(上海铁道大学)编写了积分变换中第二章拉普拉斯变换,段承后、张大豫(上海工程技术大学)也参加了编写。

本书由朱学炎(上海铁道大学)教授主审。

由于编者水平有限,难免有不妥之处,恳请读者提出宝贵意见,万分感谢。

编 者

1996年10月

目 录

复 变 函 数

第一章 复变函数	1
§ 1.1 复数	1
习题 1.1	13
§ 1.2 复变函数及其极限与连续	14
习题 1.2	22
§ 1.3 综合应用	23
习题 1.3	29
第二章 解析函数	31
§ 2.1 复变函数的导数	31
习题 2.1	33
§ 2.2 解析函数的概念	33
习题 2.2	40
§ 2.3 调和函数	41
习题 2.3	45
§ 2.4 初等函数的解析性	45
习题 2.4	54
§ 2.5 综合应用	54
习题 2.5	65
第三章 复变函数的积分	66
§ 3.1 复变函数积分的概念	66
习题 3.1	71
§ 3.2 柯西积分定理	72
习题 3.2	78
§ 3.3 柯西积分公式	79

习题3.3	86
§ 3.4 综合应用	87
习题3.4	92
第四章 级数	94
§ 4.1 复数项级数与复函数项级数	94
习题4.1	97
§ 4.2 泰勒级数	97
习题4.2	106
§ 4.3 罗朗级数	107
习题4.3	116
§ 4.4 综合应用	116
习题4.4	123
第五章 留数	124
§ 5.1 孤立奇点	124
习题5.1	131
§ 5.2 留数的概念	132
习题5.2	143
§ 5.3 留数在定积分计算中的应用	144
习题5.3	157
§ 5.4 对数留数与辐角原理	157
习题5.4	166
§ 5.5 综合应用	166
习题5.5	173
第六章 保角变换	175
§ 6.1 保角变换的概念	175
习题6.1	180
§ 6.2 分式线性变换	180
习题6.2	196
§ 6.3 几个初等函数构成的变换	197
习题6.3	212

§ 6.4 综合应用	213
习题6.4	226

积 分 变 换

第七章 傅里叶变换	229
§ 7.1 傅里叶变换的概念	229
习题7.1	251
§ 7.2 傅里叶变换的性质	252
习题7.2	265
§ 7.3 综合应用	265
习题7.3	280
第八章 拉普拉斯变换	282
§ 8.1 拉普拉斯变换的概念	282
习题8.1	287
§ 8.2 拉普拉斯变换的性质	287
习题8.2	299
§ 8.3 拉普拉斯逆变换	300
习题8.3	305
§ 8.4 综合应用	306
习题8.4	319
习题答案	320
复变函数	320
积分变换	331

复变函数

第一章 复变函数

§ 1.1 复数

一、复数的概念及其表示

1. 复数的概念

(1) 复数的定义。形如 $x + iy$ (或 $x + yi$) 的数称为复数。

其中 x 与 y 均为实数, $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位。

通常把复数记作 $z = x + iy$, x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, $z = \operatorname{Re} z$ 为实数, 因此, 实数可看成复数的一部分, 复数则是实数的扩充。当 $\operatorname{Re} z = 0$ 时, $z = i\operatorname{Im} z = iy$ 称为纯虚数。复数无大小之分。

(2) 复数相等。两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$, 仅当 $x_1 = x_2$ 及 $y_1 = y_2$ 时, 称两复数相等。

(3) 共轭复数。 $x - iy$ 称为 $x + iy$ 的共轭复数, 记作 $\overline{x + iy} = \bar{z}$, 即 $x - iy = \overline{x + iy} = \bar{z}$ 。 $x + iy$ 也称为 $x - iy$ 的共轭复数, 即 $\overline{x - iy} = x + iy = z$, 故称 $x - iy$ 与 $x + iy$ 互为共轭复数。

2. 复数的表示法

因为复数 $z = x + iy$ 完全由一对有序数组 (x, y) 所确定, 因此我们在平面上可建立类似高等数学的平面直角坐标系, 使平面上的点 (x, y) 与复数 z 建立一一对应的关系, 只要将 x 轴作为实轴, y 轴

作为虚轴即可。复数 z 的实部与 x 轴上的点建立一一对应关系，而虚部与 y 轴上的点建立一一对应关系。这样建立的平面又称为复平面或 Z 平面(图1.1)。

(1) 用点表示。引入复平面后，复数与点之间建立了一一对应，复数的许多结果得到了几何直观的解释。为方便起见，“复数 z ”与“点 z ”可等同叙述，不再加以严格区别。

(2) 用向量表示。用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 $z = x + iy$ ，此向量起点在原点 $O(0,0)$ ，终点为 $P(x,y)$ ， x, y 分别为 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴、 y 轴上的投影(图1.2)。点 P 实际上是图1.1的点 z 。这样，复数与平面上的向量建立了一一对应关系。

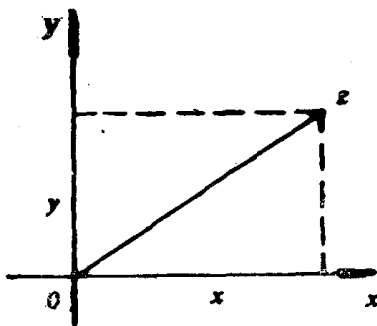


图1.1

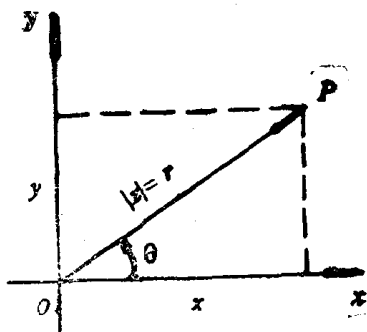


图1.2

1° z 的模。

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z = x + iy$ 的模，记为 $|z|$ 或 r ，即

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

由模的定义易得不等式

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|, \quad |z| \leq |x| + |y|. \quad (1.2)$$

2° z 的辐角。

当点 P 不与原点重合时，即 $z \neq 0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向夹角

θ 称为复数 z 的辐角, 记作

$$\theta = \operatorname{Arg} z.$$

它有无穷多个值, 而任两个值之间相差 2π 的一个倍数。若设 θ_0 是 z 的一个辐角, 则 z 的辐角全体为

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

即
$$\operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

将满足不等式 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 z 的辐角主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$, 从而 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。当 $z = 0$ 时, 辐角不定。

因为反正切函数的主值规定在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上, 故有

$$\theta_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{当 } x > 0, \frac{y}{x} \leq 0 \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y > 0 \text{ 时,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, y \geq 0 \text{ 时,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, y < 0 \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (1.4)$$

(3) 复数的三角表示。设复数 $z = x + iy$ 的模 $|z| = r$, 辐角 $\theta = \operatorname{Arg} z$, 则由极坐标表示式知, 实部 $x = r \cos \theta$, 虚部 $y = r \sin \theta$, 于是

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z| [\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)], \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $\theta = \operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

辐角主值 $\arg z$ 由 (1.4) 式确定。见图 1.3。

公式 (1.5) 即为复数的三角表示式。

特别地, 对于已知复数 $z_0 = x_0 + iy_0$, 其三角表示式也可写成

$$z_0 = |z_0|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0),$$

其中 $\theta_0 = \arg z_0$.

(4) 复数的指数表示。由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 知, 复数

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

此式即复数的指数表示式。

特别地, 对于已知复数 $z_0 = x_0 + iy_0$, 其指数表示式也可写成 $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$, 其中 $\theta_0 = \arg z_0$.

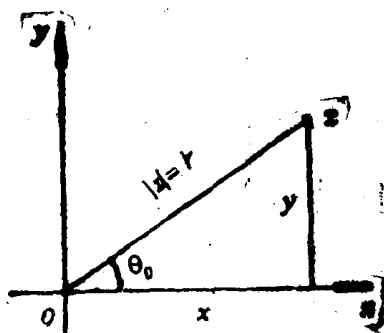


图1.3

例1 求 $\arg(2 - i2)$, $\arg(-3 + i4)$.

解 由公式 (1.3)

$$\arg(2 - i2) = \arg(2 - i2) + 2k\pi$$

$$= \arctg \frac{-2}{2} + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\arg(-3 + i4) = \arg(-3 + i4) + 2k\pi$$

$$= \arctg\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi + 2k\pi$$

$$= -\arctg \frac{4}{3} + (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

例2 求复数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i3$ 的三角表示式与指数表示式。

解 由 $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\theta_0 = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, 故

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

同样, $|z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3, \theta_0 = -\frac{\pi}{2},$

故 $z_2 = 3[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})] = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

二、复数的运算

1. 复数四则运算的定义

设有两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2,$ 其加法、减法及乘法定义如下:

加法: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$

减法: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$ (1.7)

乘法: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$

对于复数的除法,其定义是:满足 $z_2 \cdot z = z_1 (z_2 \neq 0)$ 的复数

$z = x + iy$ 称为 z_1 除以 z_2 的商,记作 $z = \frac{z_1}{z_2}.$

从而 $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$ (1.8)

复数的四则运算性质与实数的四则运算性质相同,不再赘述。

例3 设 $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i,$ 求 $z_1 \cdot z_2.$

解 $z_1 \cdot z_2 = (1+i)(\sqrt{3}+i) \xrightarrow{\text{(分配律)}} \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1$
 $= (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1).$

2. 复数四则运算的几何意义

(1) 复数加、减法的几何意义。复数可用向量表示,两复数的加法按平行四边形(或三角形)法则,其几何意义如图1.4所示。

减法 $z_1 - z_2$ 可看作 $z_1 + (-z_2),$ 其几何意义如图1.5所示。

由复数加、减法的几何意义,即可得三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, (\text{三角不等式}) \quad (1.9)$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.10)$$

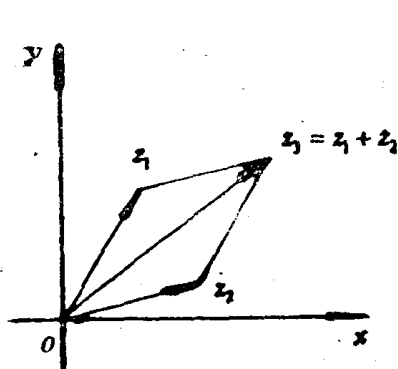


图1.4

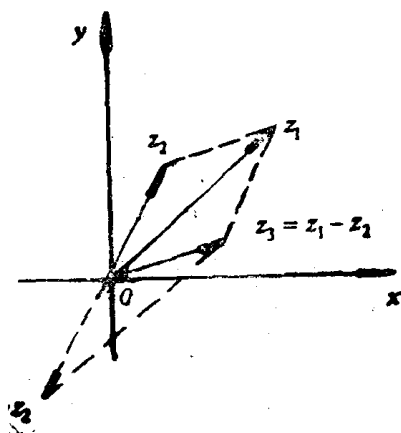


图1.5

(2) 复数乘法的几何意义。若将复数 z_1 与 z_2 写成三角表示式及指数表示式, 即

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}, \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}, \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \\ z &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{由此可得 } |z| = |z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \quad (1.12)$$

$$\text{从而也有 } \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2. \quad (1.13)$$

因此, 两复数乘积的模等于它们模的乘积, 两复数乘积的辐角等于它们的辐角之和。

从公式(1.11)可知, 两复数 z_1 与 z_2 相乘的几何意义是: 将矢量 z_1 伸长(缩短)到 $|z_2|$ 倍, 然后将其辐角按逆时针方向旋转 θ_2 角度(图1.6)。

(3) 复数除法的几何意义。对复数 z_1 与 z_2 的除法 $z = \frac{z_1}{z_2}$,

$z_2 \neq 0$, 由于 $z_2 \cdot z = z_1$, 根据公式(1.12)、(1.13)知

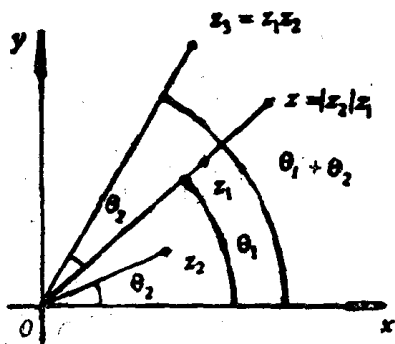


图1.6

$$|z_1| |z_2| = |z_3|,$$

$$\text{Arg} z_2 + \text{Arg} z = \text{Arg} z_1,$$

从而有 $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$, (1.14)

也有 $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$. (1.15)

因此,两复数的商的模等于它们模的商,两复数的商的辐角等于它们辐角之差。

从公式(1.14)可知,复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是将 z_1 缩短(伸长)到 $\frac{1}{|z_2|}$ 倍,然后将其辐角按顺时针方向旋转 θ_2 角度(图1.7)。

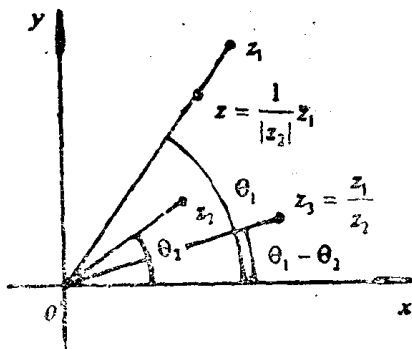


图1.7

例4 设 $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解 } z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i.\end{aligned}$$

$$\therefore |z| = |i| = 1.$$

$$\arg z = \arg i = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{Arg} z = 2k\pi + \arg z$$

$$= 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. 复数的其它运算

(1) 共轭。设复数 $z = x + iy$, 其共轭复数 $\bar{z} = x - iy$, 显然有 $|z| = |\bar{z}|$, $\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}$ 。这表明两复数互为共轭的充要条件是: 它们的模相等, 辐角的符号相反(图1.8)。

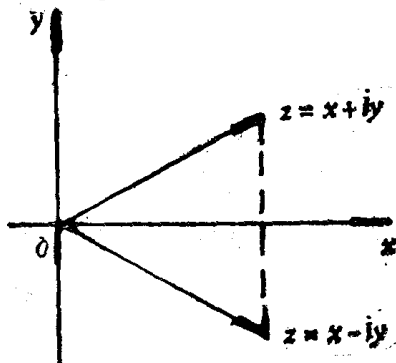


图1.8

共轭复数的几何意义是: 在复平面上, z 与 $\bar{z}$ 两点关于实轴对称。

易证共轭复数有如下性质:

$$1^\circ \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0;$$

$$2^\circ \quad \overline{\bar{z}} = z;$$

$$3^\circ \quad z \cdot \bar{z} = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 = |z|^2;$$

$$4^{\circ} \quad x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

这些性质以后将经常用到。

例5 试求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部。

解 设 $z = x + iy$, 则

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} \\ &= \frac{z\bar{z} - \bar{z} + z - 1}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2},$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

例6 设 z_1, z_2 为任意两个复数, 试证:

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

证明 由共轭的性质4°与1°及2°, 得

$$\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2}}{2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2}{2},$$

$$\text{故得} \quad z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2). \quad (1.16)$$

(2) 复数的乘幂. n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n , 即

$$z^n = z \cdot z \cdots z.$$

若 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则对于任何正整数 n , 有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \quad (1.17)$$

若定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, 则公式(1.17)中当 n 为负整数时也成立,

特别当 z 的模 $r = 1$, 即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ 时, 则有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1.18)$$

此式就是著名的棣莫弗(De Moivre)公式。

(3) 复数的开方。设给定复数 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, 求所有满足 $w^n = z_0$ 的复数 w , 称为把复数 z_0 开 n 次方, 或称为求 z_0 的 n 次方根, 记作

$$w = \sqrt[n]{z_0} \text{ 或 } w = z_0^{\frac{1}{n}}.$$

设 $w = \rho e^{i\varphi}$, 则由 $w^n = z_0$, 得

$$\rho^n e^{in\varphi} = r_0 e^{i\theta_0}.$$

由于 θ_0 是 z_0 的一个辐角, 从而得到

$$\begin{cases} \rho^n = r_0, \\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.19)$$

于是

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r_0}, \\ \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.20)$$

因 $\cos \varphi$ 与 $\sin \varphi$ 均以 2π 为周期, 故知当 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 时, $r_0^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right)$ 有 n 个不同的值, 而当 k 取其它整数时, 所得的值必相同于这 n 个值中的一个, 故

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{z_0} = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

几何上不难看出 $\sqrt[n]{z_0}$ 的 n 个不同值就是以原点为圆心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

例7 求 $\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}i}$ 。