现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

下　　册

齐民友　徐超江　编著

科　学　出　版　社

现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

下册

齐民友 徐超江 编著

科学出版社

1992

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书介绍线性偏微分算子的现代理论，主要论述拟微分算子和Fourier积分算子理论，还系统地讲述其必备的基础——广义函数理论和 Sobolev 空间理论.

本书分上、下两册. 下册讨论辛几何理论、Fourier积分算子理论，以及非线性微局部分析，这是线性偏微分算子理论 80 年代以来一个重要的动向和富有潜力的方面.

本书可供有关专业的大学生、研究生、教师和研究工作者参考.

现代数学基础丛书
线性偏微分算子引论
齐民友 徐超江 编著
责任编辑 吕虹
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1992年4月第 一 版　开本：850×1168　1/32
1992年4月第一次印刷　印张：8 7/8
印数：1—1650　字数：232 000
ISBN 7-03-002494-X/O · 464
定价：9.70 元

目　　录

第八章 辛 几 何

§ 1. Hamilton 力学

1. 力学的基本方程. 70年代以来，线性偏微分算子理论最大的进展是微局部分析的出现. 它使人们认识到，应该在余切丛上讨论微分算子,而不只是在底空间上进行. 微分流形的余切丛有着特殊的几何结构,这种几何就是辛几何. 辛几何其实已有很长的历史,过去,它一直与分析力学紧密地联系在一起. 因此，我们先介绍分析力学中的一些基本概念，这些概念对于线性偏微分算子是极为重要的.

讨论构形空间 M（这是一个微分流形）上的力学系有两种方式，其一是在 M 的切丛 TM 上讨论. 这时设 x 是 M 上的动点，$x=x(t)$ 是该力学系的轨道,于是 $\dot{x}(t)$ 是速度，它是一个切向量. 这个力学系的动能是 $\dot{x}$ 的二次型 $T=\langle\dot{x},A\dot{x}\rangle$，$A$ 是一个正定矩阵. 如果该力学系有位能 $U(x)$，则称二者之差 $L(x,\dot{x})=T-U$ 为此力学系的 Lagrange 函数. 力学的基本方程可以用最小作用原理来表示.

最小作用原理. 力学系的轨道是作用量

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L(x,\dot{x})dt \tag{8.1.1}$$

作为一个泛函的驻定曲线.

由变分学的基本原理知道，力学系的轨道 $x=x(t)$ 应满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_j}=0,\ j=1,\cdots,n, \tag{8.1.2}$$

这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 M 上的局部坐标系. 如果 M 就是 $\mathbb{R}^{3n}$，

则

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) - U(x,y,z),$$

而 (8.1.2) 就成为 n 个质点之组的 Newton 运动方程。

$$m_j\ddot{x}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}U = 0,$$

$$m_j\ddot{y}_j + \frac{\partial}{\partial y_j}U = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

$$m_j\ddot{z}_j + \frac{\partial}{\partial z_j}U = 0.$$

在切丛 TM 上讨论力学系称为 Lagrange 力学。它的基本方程组(8.1.2)是 n (n 为自由度)个二阶微分方程，称为 Lagrange 方程组。

也可以在余切丛 T^*M 上讨论力学系。T^*M 在力学中称为**相空间**。这时我们不是讨论广义坐标 x_j 与广义速度 $\dot{x}_j$，而是讨论广义坐标 x_j 与广义动量 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$. 容易证明 p 是余切向量。从切丛转到余切丛是通过 Legendre 变换，即引入 (x,p) 的函数——称为 Hamilton 函数

$$H(x,p) = \dot{x}p - L(x,\dot{x}), \tag{8.1.3}$$

式右的 $\dot{x}$ 应理解为(x, p)的函数，这个函数关系将由 $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$ 来确定。

Hamilton 函数的力学意义是总能量。因为动能是 $\dot{x}$ 的二次齐性函数，所以由 Euler 恒等式，有

$$H = \dot{x}p - L(x,\dot{x}) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - (T - U)$$

$$= \dot{x}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - (T - U) = T + U.$$

在余切丛上力学系的基本方程是 Hamilton 方程组。实际

上，我们有

定理 8.1.1 Lagrange 方程组等价于 $2n$ 个一阶方程形成的方程组

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{8.1.4}$$

这里 Hamilton 函数 H 由 Legendre 变换 (8.1.3) 决定。

证. 现在求 Hamilton 函数 $H(x,p)$ 的全微分

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial p}dp.$$

另一方面，由 (8.1.3) 又有

$$\begin{aligned} dH &= \dot{x}dp + pd\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}dx \\ &= \dot{x}dp - \frac{\partial L}{\partial x}dx. \end{aligned}$$

比较 dH 的这两个表达式有

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p},\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

因此 Lagrange 方程组

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

等价于

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

定理得证。

系 8.1.2 $H(x, p)$ 是 Hamilton 方程组 (8.1.4) 的初积分。

证. 在力学系的一个轨道 $x = x(t)$，$p = p(t)$ 上

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\ p(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} = 0.$$

证毕。

这个系就是沿着力学系的轨道能量守恒。当然，在不同的轨道上，能量值是不同的。

例. 考虑 Kepler 问题，即一个质量为m的质点在有心力场下于一平面内的运动. 设这个力场有位能 $U(r)=-k/r$，k 是常数。采用极坐标系 (r,θ)，则动能是

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2),$$

Lagrange 函数为

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r},$$

而 Lagrange方程成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+\frac{k}{r^2}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0.$$

由后一方程得到 $mr^2\dot{\theta}=\text{const}$，这就是角动量守恒. 为了求它的 Hamilton 方程组，我们作 Legendre 变换

$$(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})\longmapsto(r,\theta,p_r,p_\theta),$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},$$

这时动能成为

$$T=\frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{p_\theta^2}{m^2r^2}\right)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right),$$

而 Hamilton 函数是$\left(设\ m=\frac{1}{2},\ k=1\right)$

$$H=T+U=\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{1}{r}.$$

当然也可利用 $H=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta-L$ 来计算，结果亦同。Hamilton 方程组现在是

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=2p_r,\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{2p_\theta}{r^2},$$

$$\frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{2p_\theta^2}{r^3}-\frac{1}{r^2},\quad \frac{dp_\theta}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=0.$$

这里又一次得到角动量 p_θ 守恒.

由 $p_\theta = l$（常数）及 $\dfrac{d\theta}{dt} = 2p_\theta/r^2$，又有

$$\theta = 2l\int\frac{dt}{r^2}. \tag{8.1.5}$$

由能量守恒

$$H = T + U = \frac{1}{4}\left(\dot{r}^2 + \frac{4l^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r} = \frac{\dot{r}^2}{4} + \omega(r).$$

$$= E\left(\omega(r) = \frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{r}\text{ 称为有效位能}\right)$$

得到

$$\int dt = \int\frac{dr}{2\sqrt{E-\omega(r)}}. \tag{8.1.6}$$

(8.15) 与 (8.1.6) 解出了 Kepler 问题.

2. 典则变换. 在上面的例子中由平面直角坐标转到极坐标是一个关键的步骤.若采用直角坐标 (x, y)，H 将含有 (x, y, p_x, p_y) 四个变量，求积 Hamilton 方程组将不是很容易的事. 现在 H 中不含 θ，因而 $\dfrac{\partial H}{\partial\theta} = 0$，从而得到一个守恒律. 一般地说，若 H 中不含某一变量(这种变量称为循环坐标)，就可以得到一个守恒律.

守恒律是一个初积分，从数学上说，其作用是使 Hamilton 方程组降一阶. 上面我们就是用了两个守恒律(角动量和能量)将 Kepler 问题化为求两个积分. 这个例子实际上是求解 Hamilton 方程组最有效的方法：寻求一个变量变换，使Hamilton 方程组形状不变，而同时使 Hamilton 函数尽可能简单(找出尽可能多的循环坐标)，以得到种种守恒律. 这种变换就称为典则变换.

为了讨论典则变换，我们再引人 Poisson 括号的概念. 设有一个物理量 $F(x, p)$，则沿着力学系的轨道有

$$F(t) = F(x(t), p(t)),$$

而且

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)$$

$$=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right).$$

此式右方常记作 $-\{H, F\}$，而定义 Poisson 括号为

$$\{H,F\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right). \tag{8.1.7}$$

于是有

定理 8.1.3 沿某一力学系的轨道，物理量 $F(x,p)$ 恒适合常微分方程

$$\frac{dF}{dt}=-\{H,F\}, \tag{8.1.8}$$

H 为此力学系的 Hamilton 函数.

由此直接可以得到

系 8.1.4 $F(x,p)$ 是某一力学系的初积分当且仅当

$$\{H,F\}=0.$$

由以上的讨论可以看出 Poisson 括号的重要性，因此，我们给出一个定义：设 Φ 是相空间到其自身的微分同胚(即坐标变换)，我们给出

定义 8.1.5 若对任意函数 F, G 有

$$\{F,G\}\circ\Phi=\{F\circ\Phi,\ G\circ\Phi\}, \tag{8.1.9}$$

则称 Φ 为**典则变换**.

所以典则变换即保持 Poisson 括号的变换.

由定义直接可得

定理 8.1.6 在典则变换下，Hamilton 方程组的形状不变.

证. 设有典则变换 $\Phi:(x,p)\longmapsto(x',p')$. 于是由定义

$$\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\frac{\partial G}{\partial p_i'}-\frac{\partial F}{\partial p_i'}\frac{\partial G}{\partial x_i'}\right).$$

令 $F(x,p)=x_i'(x,p)$，则由定理 8.1.3，有

$$\frac{dx_i'}{dt}=-\{H,x_i'\}=\frac{\partial H}{\partial p_i'}.$$

同理，令 $F(x,p)=p_i'(x,p)$，又有

$$\frac{dp_i'}{dt}=-\{H,p_i'\}=-\frac{\partial H}{\partial x_i'}.$$

刻划典则变换还有另外两种方法。为方便计，以下我们用 q_i 代替 x_i. 于是设有变换

$$\Phi:(q,p)\longmapsto(Q,P).$$

如果 Φ 是典则变换，应有

$$\begin{aligned}\{P_j,P_k\}=\sum_l\left(\frac{\partial P_j}{\partial Q_l}\frac{\partial P_k}{\partial P_l}-\frac{\partial P_j}{\partial P_l}\frac{\partial P_k}{\partial Q_l}\right)=0,\\ \{Q_j,Q_k\}=0,\\ \{Q_j,P_k\}=\delta_{jk}.\end{aligned}\tag{8.1.10}$$

回到原坐标系 (q,p)，(8.1.10) 是 Φ 的导数的二次式的条件，这个条件如果用矩阵形式来写则是

$$'\Phi'J\Phi'=J,\tag{8.1.11}$$

$$J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix},$$

Φ' 是 Φ 的 Jacobi 矩阵，$'\Phi'$ 表其转置。一个变换 Φ 若其 Jacobi 矩阵适合 (8.1.11)，则称为**辛变换**，J 称为**标准辛矩阵**。所以我们又有

定理 8.1.7 Φ 为典则变换当且仅当 Φ' 处处为辛变换。

第三种刻划典则变换的方式是通过所谓**辛形式**

$$\omega=\sum_i dp_i\wedge dq_i.\tag{8.1.12}$$

直接验算可以证明

定理 8.1.8 Φ 为典则变换当且仅当

$$\Phi^*\omega=\omega.\tag{8.1.13}$$

现在回到力学系的相空间。设其一个局部坐标为 (q,p)，且 q 是底空间（即构形空间）的坐标。若对底空间作一个坐标变换 $\Phi_b:q\longmapsto Q(q)$，我们恒可把它扩充为一个典则变换

$$\Phi:(q,p)\longmapsto(Q,P).$$

为此，我们仅需找到一组 $P_1,\cdots,P_n$，使之适合

$$\sum_i dP_i \wedge dQ_i = \sum_i dp_i \wedge dq_i.$$

不仅如此，我们也可以找到 P 使之适合

$$\sum_i P_i dQ_i = \sum_i p_i dq_i. \tag{8.1.14}$$

只要对上式双方求外微分 d 即得(8.1.13). $\sigma = \sum_i p_i dq_i$ 与辛形式 ω 同样都是十分重要的，有时称 σ 为 Liouville **形式**. 但由(8.1.14)有

$$\sum_k \left(\sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right) dq_k = \sum_i p_i dq_i.$$

比较双方，并记 p, P 为列向量 ${}^t(p_1, \cdots, p_n)$, ${}^t(P_1, \cdots, P_n)$ 有 $P = [{}^t\Phi_b'(q)]^{-1} p$. 这样，我们即得所需的典则变换

$$\Phi: (q, p) \longmapsto (Q(q),\ {}^tQ'(q)^{-1} p).$$

前例中用的变换就是由底空间的极坐标变换扩充而得的典则变换.

3. 生成函数. Hamilton-Jacobi 方程. 上面已见到典则变换的重要性，问题是怎样找到典则变换，方法之一是应用生成函数。考虑典则变换

$$\Phi: (q, p) \longmapsto (Q, P). \tag{8.1.15}$$

它的图象 Γ 定义为

$$\Gamma = \{(q, p; Q, P), (Q, P) = \Phi(q, p)\}. \tag{8.1.16}$$

设我们可以用 (p, Q) 作为 Γ 上的局部坐标，则在 Γ 上有

$$d\left(\sum_i q_i dp_i + \sum_i P_i dQ_i\right)$$

$$= -\left(\sum_i dp_i \wedge dq_i - \sum_i dP_i \wedge dQ_i\right) = 0,$$

因而存在一个函数 $S(p, Q)$ 使得局部地有

$$\sum_i q_i dp_i + \sum_i P_i dQ_i = dS,$$

亦即在 Γ 上有

$$q_i = \frac{\partial S(p,Q)}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial S(p,Q)}{\partial Q_i}, \tag{8.1.17}$$

就是说，典则变换(8.1.15)可以通过 $S(p,Q)$ 按(8.1.17)生成。所以 $S(p,Q)$ 称为(8.1.15)的生成函数。问题是什么样的典则变换的图象 Γ 上允许以 (p,Q) 为局部坐标。为此，我们来看**恒等变换**——它当然是典则变换

$$id: Q = q, \quad P = p.$$

由(8.1.17)可以看到，若

$$S(p,Q) = \sum_i p_i Q_i,$$

则生成恒等变换.这时是可以取 (p,Q) 为局部坐标的.所以，接近于恒等变换的典则变换必有生成函数 $S(p,Q)$。这里"接近"是指到一阶导数均接近，下同。反之，我们有

定理 8.1.9 若 $S(p,Q)$ 接近于 $\sum_i p_i Q_i$，则定义

$$q_i = \frac{\partial S(p,Q)}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial S(p,Q)}{\partial Q_i} \tag{8.1.17}$$

将给出一个典则变换.

证. 由于 $S(p,Q)$ 接近于 $\sum_i p_i Q_i$，上述的定义确实是一个坐标变换，而在此变换的图象上可以用 (p,Q) 作为局部坐标.由(8.1.17)，

$$\sum_i P_i dQ_i + \sum_i q_i dp_i = dS(p,Q).$$

因此，取外微分后即有

$$\sum_i dP_i \wedge dQ_i = \sum_i dp_i \wedge dq_i,$$

而定理证毕.

利用这个定理，我们要作出一类重要的典则变换。改变一下记号，并且考虑 Hamilton 方程组

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H(y,\eta)}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H(y,\eta)}{\partial y_i} \tag{8.1.18}$$

的 Cauchy 问题

$$y(0)=x,\ \eta(0)=\xi.$$

由于(8.1.18)是一个自治系统(即右方不显含时间 t)，其解对一切 $t\in\mathbb{R}$ 均有定义，而且可以认为这个解定义一个含单参数 t 的变换

$$\Phi_t:(x,\xi)\longmapsto(y,\eta).$$

当 $t=0$ 时，$\Phi_0=id$，而且 $\{\Phi_t\}$ 对 t 具有半群性质

$$\Phi_{t+s}=\Phi_t\circ\Phi_s. \tag{8.1.19}$$

$\{\Phi_t\}$ 称为 Hamilton 流，我们要证明

定理 8.1.19 Hamilton 流对任意 t 都是典则变换。

证. 用 $\operatorname{grad}H={}^t\left(\dfrac{\partial H}{\partial y},\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\right)$ 以及标准辛矩阵 J 可以将 Hamilton 方程组写成

$$^t(y_t,\eta_t)=J\operatorname{grad}H. \tag{8.1.20}$$

对初值求导数，记 (y,η) 对初值的 Jacobi 矩阵为 Φ'_t，容易看到

$$\frac{d}{dt}\Phi'_t=JH''\Phi'_t=F\Phi'_t,$$

H'' 表示H的 Hess 矩阵

$$H''=\begin{pmatrix}H_{yy} & H_{y\eta}\\ H_{\eta y} & H_{\eta\eta}\end{pmatrix},$$

这是一个对称矩阵. 现在计算 $\dfrac{d}{dt}({}^t\Phi'_t J\Phi'_t)$，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}({}^t\Phi'_t J\Phi'_t)&={}^t\left(\frac{d}{dt}\Phi'_t\right)J\Phi'_t+{}^t\Phi'_t J\frac{d}{dt}\Phi'_t,\\&={}^t\Phi'_t\,{}^tFJ\Phi'_t+{}^t\Phi'_t JF\Phi'_t\\&={}^t\Phi'_t({}^tFJ+JF)\Phi'_t\\&={}^t\Phi'_t[-{}^t(JF)+JF]\Phi'_t\\&={}^t\Phi'_t[-H''+H'']\Phi'_t=0.\end{aligned}$$

这里我们利用了 J 为反对称矩阵，从而 ${}^tJ=-J$，以及 $J^2=-I$ 和 H'' 为对称矩阵，所以 ${}^tH''=H''$，$JF=J^2H''=-H''$.

以上我们证明了 ${}^t\Phi'_t J\Phi'_t$ 与时间 t 无关，但当 $t=0$ 时，由于初值条件 $\Phi'_t|_{t=0}=I$，因此对一切 t

$${}^t\Phi'_t J\Phi'_t=J.$$

由定理 8.1.7 知 Φ_t 为典则变换。证毕。

当 $t=0$ 时，典则变换 $\Phi_0=id$，具有生成函数

$$S(y,\xi)=\sum_i y_i\xi_i$$

（注意，这里的 (x,ξ) 相当于前面的 (q,p)，(y,η) 相当于前面的 (Q,P)），所以当 t 充分小时，Φ_t 也应有生成函数 $S_t(y,\xi)$。现在我们要问怎样求 $S_t(y,\xi)$。这里我们要用到 $\{\Phi_t\}$ 的半群性质。考虑两个相继的 Φ_t 和 Φ_τ，这里 t 和 τ 都充分小：

$$(x,\xi)\stackrel{\Phi_t}{\longmapsto}(y,\eta)\stackrel{\Phi_\tau}{\longmapsto}(z,\zeta). \tag{8.1.21}$$

相应于它们的生成函数为 $S_t(y,\xi)$，$S_\tau(z,\eta)$，而相应于 $\Phi_{t+\tau}=\Phi_t\circ\Phi_\tau$ 的生成函数是 $S_{t+\tau}(z,\xi)$。我们要证明

引理 8.1.11 在 $\Phi_t\circ\Phi_\tau$ 的图象

$$\Gamma=\{(x,\xi;y,\eta;z,\zeta);(y,\eta)=\Phi_t(x,\xi),$$
$$(z,\zeta)=\Phi_\tau(y,\eta)\}$$

上，恒有

$$S_{t+\tau}(z,\xi)=S_t(y,\xi)+S_\tau(z,\eta)-\sum_i \eta_i y_i. \tag{8.1.22}$$

证。由生成函数的定义

$$x_j=\frac{\partial S_t(y,\xi)}{\partial \xi_j},\quad \eta_j=\frac{\partial S_t(y,\xi)}{\partial y_j}.$$

所以

$$dS_t(y,\xi)=\sum_j x_j d\xi_j+\sum_j \eta_j dy_j.$$

同理

$$dS_\tau(z,\eta)=\sum_j y_j d\eta_j+\sum_j \zeta_j dz_j,$$

$$dS_{t+\tau}(z,\xi)=\sum_j x_j d\xi_j+\sum_j \zeta_j dz_j.$$

比较即有

$$dS_{t+\tau}=dS_t+dS_\tau-d\sum_j \eta_j y_j.$$

利用当 $t,\tau\to 0$ 时 $S_0=\sum_j y_j\xi_j$，即得 (8.1.22) 式。

现在证明主要的定理

定理 8.1.12 $S_t(x,\xi)$ 适合 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}+H\left(x,\frac{\partial S_t}{\partial x}\right)=0. \tag{8.1.23}$$

证. 将 (z,ζ) 按 τ 展开有

$$z_j=y_j+\tau\frac{\partial H(y,\eta)}{\partial\eta_j}+O(\tau^2),$$

$$\zeta_j=\eta_j-\tau\frac{\partial H(y,\eta)}{\partial y_j}+O(\tau^2).$$

由前式

$$y_j=z_j-\tau\frac{\partial H(y,\eta)}{\partial\eta_j}+O(\tau^2).$$

现在

$$\begin{aligned}dS_t(z,\eta)&=\sum_j y_jd\eta_j+\sum_j\eta_jdy_j\\&=\sum_j(z_jd\eta_j+\eta_jdz_j)\\&\qquad-\tau\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial y_j}dy_j+\frac{\partial H}{\partial\eta_j}d\eta_j\right)+O(\tau^2).\end{aligned}$$

对 Hamilton 函数适当加一常数项并不改变 Hamilton 方程组，从而也不改变 Hamilton 流生成的典则变换，同时利用 $\tau=0$ 时 $S_0=\sum\eta_jy_j$ 即有

$$S_\tau(z,\eta)=\sum_j\eta_jz_j-\tau H(z,\eta)+O(\tau^2),$$

代入 (8.1.22) 有

$$\begin{aligned}S_{t+\tau}(z,\xi)&=S_t(y,\xi)+\sum_j\eta_j(z_j-y_j)-\tau H(z,\eta)\\&\quad+O(\tau^2)=S_t(z,\xi)-\sum_j\frac{\partial S_t(z,\xi)}{\partial z_j}(z_j-y_j)\\&\quad+\sum_j\eta_j(z_j-y_j)-\tau H(z,\eta)+O(\tau^2).\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\partial S_t(z,\xi)}{\partial z_j}=\eta_j$，故