有限单元法在传热学中的应用

（第三版）

孔祥谦 编著

科学出版社

有限单元法在传热学中的应用

（第三版）

孔祥谦 编著

科学出版社

1998

DU46/04

内 容 简 介

本书着重叙述温度场和粘性流场有限单元计算法的基本原理及实际应用，务求做到循序渐进、深入浅出和通俗易懂. 为了适合自学，书中作了详细的推导并列举了较多的算例.

本书共分十三章. 第一至九章以温度场为背景系统地阐述了有限单元法的基本理论和应用内容，使读者了解这种方法的由来和发展、数理基础及程序技巧，对各个环节都有详细的讲解；第十章介绍了有限单元网格自动生成的入门知识并提供了实用程序；第十一章叙述了相变导热计算的有限元法；第十二章介绍了粘性回流流场计算的有限元法；第十三章介绍了空间任意曲面辐射角系数计算的有限元法. 这些都是有限元法在工程实践中的深化和扩展，主要是启发读者如何在自己的工作领域中发展和完善这种方法. 书中提供了三种算法语言的程序. 为了便于研究调试程序，这里主要介绍了 BASIC 语言，并适当提供了 FORTRAN 语言和 C 语言. 这些程序集中在附录Ⅵ中. 书后有篇幅较大的附录，对不熟悉数学理论的读者提供了必要的帮助.

本书可供高等院校热工、动力、能源、化工和机械专业的学生、研究生、教师及工程技术人员自学和参考.

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法在传热学中的应用/孔祥谦编著. -3 版. -北京：科学出版社，1998. 9

ISBN 7-03-006671-5

I. 有… II. 孔… III. 有限元法-应用-传热学 IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 07882 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998 年 9 月第 三 版 开本：850×1168 1/32

1998 年 9 月第 3 次印刷 印张：12 1/4 插页：1

印数：9 621—11 220 字数：312 000

定 价：28.00 元

第三版序言

本书自 1986 年第二版问世以来，曾多次得到国内研究生读者的关注和问询. 10 年过去了，这期间有限单元法技术的应用和实践又有了长足的发展. 鉴于目前这方面通俗的入门性读物仍较缺乏，所以本书作了较多补充和修订后的重新出版还是有价值的.

本版对前书中较为陈旧的内容作了删节，例如删除了 ALGOL-60 算法语言的源程序；另外，目前国内微机已经非常普及，读者的计算机文化和程序设计能力已经普遍提高，所以对程序的大量注释和说明显得多余和烦琐. 本版中除对个别疑难处作简要说明外，一般的注释将予删除.

FORTRAN 语言当前仍然是大型科学计算程序设计的主要语言；现在 C 语言发展很快，它以灵活的接口和丰富的绘图软件等优点而被愈来愈多的技术部门所采用. 本版将在个别源程序中介绍这两种语言. 有趣的是本版中仍以 BASIC 语言的源程序作为主要介绍对象. 按理说，目前 BASIC 语言已逐渐退出科学计算领域，似乎已无保留的必要. 但作者认为它确实具有很多优点，例如所需的内存空间较小，便于在微机上使用；编译过程简单快速，便于对程序作频繁的修改；语法结构简单，易于掌握，便于操作等. 现在通用的 TURBO BASIC(简称 TB)和 QUICK BASIC，运行速度略低于 FORTRAN，但其编译过程要快速方便得多，最适合于作研究调试程序之用. 另外，现在已有可视化程序设计的应用(如 VISUAL C++ 和 VISUAL BASIC 等)。所以读者对这些基本语言的熟练使用可以增强对当前软件飞速发展的适应性.

相变导热问题在工程计算中的重要性在不断上升，是本版重点扩充的内容之一.

有限单元法传统应用在固体领域，如导热温度场和应力场的

计算等. 但是粘性回流流场和对流换热问题的有限单元法计算现在也已不断取得进展，本版也适当地反映了这方面的成果.

有限单元网格的自动生成技术是每个实际工作者很自然地要涉及的一项内容. 在本书第二版中已有初步讨论并取得了较好的实用效果,但它还有明显的不足之处. 本版中补充了变形和映射的技术,从而使其适应性大大加强.

三角形单元以其使用的灵活性、计算公式较为简单以及便于编程等优点成为有限单元法入门教程的首选内容,第二版中已对它作了较多的介绍;四边形单元计算导热温度场时在精度和收敛稳定性等方面均较三角形单元为优,且在应力场计算中能更好地反映出应力变化的特性以及在粘性回流流场计算中能成功地构造不对称权函数,从而更好地适应流场所具有的上风特性. 所以四边形单元不失为有限单元法教程中的一个重要内容,本版将作出详细讨论.

最后,作者感谢杨本洛教授的真诚帮助. 他博大精深的学识、开拓性的思维见解和极其严格的治学态度,指引我多次成功地解决疑难问题,从中得益匪浅. 作者也对沈毅敏同学和杨海同学在翻译和调试 C 语言和 FORTRAN 语言程序中所作的辛勤劳动表示感谢.

由于作者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者批评指正.

孔祥谦

1998 年 2 月于上海交通大学

第二版序言

本书初版从 1981 年与读者见面后，以其通俗易懂、简明实用的特点受到读者的欢迎. 随着时代的发展，为了满足四化建设提出的更高的要求，编者在取得三年实践经验的基础上，决定再版本书.

再版的目的有二：即对有限单元法的基本理论作适当的深化，并对实用范围作适当的扩展. 为了不使篇幅过分膨胀，对初版中某些内容作了适当的压缩.

初版中只从泛函变分出发导出有限单元法的基本计算公式. 这样做受到的局限性较大，不便于推广应用. 所以再版中增添了加权余量法(Galerkin 法)这一个分支. 它与泛函变分完全独立，但有相辅相成的效果.

在初版中只讨论了三角形的基本单元. 再版中三角形基本单元仍然是主要的内容，但增加了三角形六节点等参单元的详细分析和计算.

初版中对不稳定导热问题讨论得过于简单，再版中作了适当的扩充和深化.

初版中对一些较为复杂的单元积分只在附录中作了说明，但没有得到证明. 在再版的附录中详细讨论了面积坐标和高斯积分，从而使读者对三角形单元中遇到的各种复杂积分问题都能运用自如. 以上这些都是对有限单元法理论的深化.

此外，在再版中增加了有限单元法网格的自动剖分和辐射角系数有限单元法计算的内容，作为对初版的扩展.

与流体运动结合在一起的对流换热问题目前已经出现有限单元法的求解实例，但在该领域中有限差分法仍然占主导地位. 本书所处理的对象仍然只限于固体部分.

再版中把全部计算单位都改成国际单位制(SI).

考虑到目前国内计算机的实际情况，本书所推荐的计算机源程序具备 ALGOL-60，BASIC 和 FORTRAN Ⅳ 三种语言．读者可以相互对照阅读．对于初次接触计算机的读者，如果三种语言都有实践可能，建议先从 BASIC 语言入门，因为它最简单易懂．

再版的编写仍然保持了初版的特色，即按照循序渐进的原则，起点较低，注意说理，适度的公式推导和较多的计算实例，以达到便于自学的目的．如果部分读者对第二章中过多的数学分析感到困难的话，可以舍去第二章，而用第三章的内容来代替它．

作者希望本书能够成为有限单元法计算入门的一本小册子，为社会主义四化建设作出微小的贡献．在这里作者对王德明和曹恕同志在本书编写过程中所做的有益工作表示感谢．

书中错误和不妥之处，恳请读者批评指正．

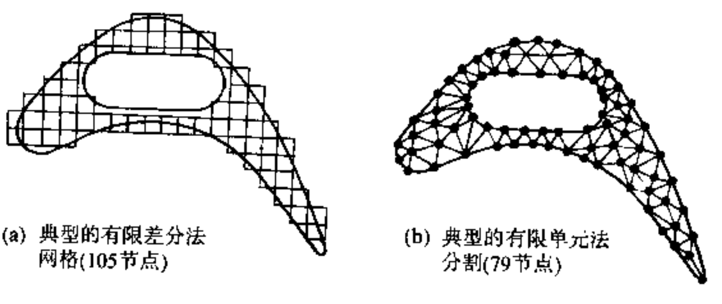
作　者

1984 年 8 月

前　　言

数学物理方法用来求解工程技术问题是当代科学的一大成果. 对微分方程求出它的已给边界条件下的精确解析解,虽然已有完整的理论,但是真正能解出的只有极少数的几种简单情况,特别在二维和三维问题中更是如此. 这是因为客观事物的多样性,不可能用有限的解析函数来描述. 为了满足生产和工程上的需要必须应用近似计算.

有限差分法和有限单元法都是正在被广泛应用的两种近似计算方法. 有限差分法的概念和应用已经相当长久了,有限单元法则从六十年代与电子计算机的应用一起开始了飞速的发展.



(a) 典型的有限差分法网格(105节点)

(b) 典型的有限单元法分割(79节点)

图 1　燃气轮机叶片的有限差分法离散和有限单元法离散

为了说明有限差分法和有限单元法是如何离散一个复杂几何形状的物体,我们来考虑一个燃气轮机叶片的横断面,在给定负荷下的应力分布和温度分布(见图 1). 由于叶片具有内部冷却通道以及外部的造型特征,可见其几何形状是复杂的.

在有限差分法的离散计算中,可以适当地在整个叶型上划分均匀的正方形网格,但是边界变成了阶梯形,就不能很好地适合实

际情况．相反，有限单元法（采用最简单的二维单元——三角形单元）则在边界上用折线代替曲线，比有限差分法的阶梯线能更好地符合实际情况．有限单元法的单元形状和疏密程度可以是任意变化的，就可用较少的节点而使区域达到更好的近似．

这个例子并不企图说明在所有问题中有限单元法都比有限差分法好，只想说明有限单元法特别适用于具有复杂形状和条件的物体．事实上，对于边界方正以及区域内部单一的简单情况，有限差分法可以获得与有限单元法同样良好的效果，而且在第一类边界条件下有完全相同的计算格式，但有限差分法的计算过程要比有限单元法简单得多．

由于现代工程技术问题的日趋复杂，对计算精度的要求也愈来愈高．特别是在航空和航天设备的结构设计上，这个问题显得更加突出，而有限单元法配合电子计算机在解决这些问题时卓见成效，因此成为现代工程计算中的一个有力工具．

为了能够全面地了解有限差分和有限单元这两种近似计算的方法，我们对近似计算方法的历史作一简单的回顾．

古典的近似计算有两大分支．第一个分支是有限差分法，第二个分支是解析的变分计算．

有限差分法从微分方程出发，将区域经过离散处理后，近似地用差分、差商来代替微分、微商．这样，微分方程和边界条件的求解就可归结为求解一个线性代数方程组，得到的是数值解．这种方法特别适用于现代数字电子计算机的运算，所以古老的有限差分法直到现代还有强大的生命力．但在过去，高阶线性代数方程组的求解是一项非常烦人的工作，所以人们宁愿寻求近似的解析解．

古典的变分计算就是寻求级数形式的近似解析解．这里面又是一分为二的．首先是从泛函出发，对泛函求极值（数学上称为变分）可以得到满足相应微分方程和边界条件的某一函数（详细讨论见第二章），所以对泛函作极值计算在数学上等价于对微分方程的求解．这样，在泛函中代入经过选择的试探函数并经变分运算，就

可得到微分方程的近似解析解. 这种方法首先出现在求解弹性力学的问题中. 由于弹性力学是以最小能量原理作为它的平衡条件,而泛函求极小值就是这个物理实质的数学表示,所以这种方法就被称为能量变分法或简称能量法(雷列-里兹法). 其实这种数学上等价的关系是极为广泛的,远远超出最小能量原理的范围. 由于历史的原因,有人把基于泛函出发的解算过程统称为能量变分.

我们已经看到,能量变分求解和微分方程求解两者在一定条件下是等价的,它们是同一个问题的两种不同表现形式. 但是微分方程的形式则更广泛些,与其相应的泛函有些现在还未找到,有些则可能不存在. 所以能量变分出现后不久,就有人从微分方程出发来寻求级数形式的近似解析解,这就是加权余量法(也叫加权平均法),其中可作为代表的是伽略金法. 这种方法与能量法很相像(也是选择试探函数代入微分方程,并在区域内加权积分然后使它等于零,等等),所以也把它称作变分计算.

这样古典变分计算包括能量变分(从泛函出发)和微分方程"变分"两部分,它们得到的都是对全区域的近似解析解,即对整个区域没有作离散处理.

这种方法虽然在选择试探函数时有一定的灵活性,但由于"全区域内满足"这个条件过于苛刻,就只能求解区域内单一及边界简单的问题,仍然不能满足工程实际的需要,所以长期来也得不到发展.

看来,古典变分计算和近代变分计算的区别就在于有没有对区域作离散处理. 数字电子计算机的出现,赋予离散计算巨大的生命力. 高阶(数百阶甚至数千阶以上)线性代数方程组的解算已经不再成为困难. 所以有限差分法现在也有了很大的发展,在热工流体领域中具有广泛的应用.

有限差分法的缺点是局限于规则的差分网格(正方形网格,矩形网格或正三角形网格),显得死板僵硬. 它只看到了节点的作用,对于把节点联结起来的单元的本身特性是不予注意的,而正是

这些单元，它们是构成整体的基本细胞，在各节点温度(或其它物理量)的计算过程中，单元会起到自己应有的“贡献”. 有限单元法恰恰是抓住了单元的贡献，使得这种方法具有很大的灵活性和适应性. 有限单元法的命名就说明它充分地抓住了单元所起到的特殊作用.

实际上，有限单元法是对古典近似计算的归纳和总结. 它吸取了有限差分法中离散处理的内核，又继承了变分计算中选择试探函数并对区域积分的合理方法. 在有限单元法中，试探函数(以后称插值函数)的定义和积分计算范围，不是整个区域，而是从区域中按实际需要划分出来的单元. 这就克服了古典变分计算中由于不作离散处理而不能求解复杂问题的缺点. 在有限单元法中，由于对单元作了积分计算，就充分估计了不同单元对节点参数的不同贡献，从而克服了有限差分法中不考虑单元本身特性的缺点.

目前有限单元法的研究还不如有限差分法那样成熟，特别是在误差分析方面.

为了普及有限单元法在热工领域中的应用，我们编写了这本入门介绍的小册子. 按照循序渐进的原则，并为了减少工程人员在自学中遇到的困难，我们采用了较低的起点、详细的公式推导和较多的计算实例，特别在电子计算机程序中作了通俗的说明. 在极大多数场合，我们略去了严格的但是难懂的推导和证明，而采用了直观易懂的举例说明的形式，以达到深入浅出的效果.

对于不熟悉矩阵代数的读者，可以先阅读书后附录 I 中的有关矩阵代数知识.

清华大学王补宣教授对本书的编写大纲提出了宝贵意见，清华大学核能技术研究所高祖英同志对本书进行了认真、细致的审阅，我们在此表示衷心的感谢.

书中错误和不妥之处，希望得到广大读者的批评和指正.

作　者

1980 年 1 月

符 号 表

$a=k/\rho c_p$[m^2/s] 导温系数

c [J/(kg·℃)] 比热

c_p [J/(kg·℃)] 定压比热

D 所研究物体的区域

D_L 液相区域

D_S 固相区域

F_{12} 表面1对2的辐射角系数

f_S 固相率

$FO=at/L^2, \Delta FO=a\Delta t/\Delta x^2$ 傅里叶准则(无因次量)

h [J/kg] 物体的焓

h [m] 一维线段单元的长度,或称步长

H 二维四边形四节点单元的型函数

J 泛函

$|J|$ 雅可比行列式

k [W/(m·℃)] 导热系数

[K] 稳态温度场或扩散项的系数矩阵

k [K]中的矩阵元素

L [m] 平板厚度

L [J/kg] 物质的相变潜热

L_i, L_j, L_m 面积坐标

M 高斯数值积分基点数;二维四边形八节点单元的型函数

$\boldsymbol{n}$[m] 边界线外法线向量

[N] 瞬态温度场系数矩阵

n [N]中的矩阵元素

N_i, N_j, N_m 二维三角形三节点单元型函数,其值等于面积坐标

p [Pa] 粘性流场的压力(压强)标量

{P} 方程组右端项列向量

$\mathrm{Pe}=uh/a$ 贝克列数(无因次量)

$\boldsymbol{q}$ [W/m^2] 热流密度向量

q_v [W/m^3] 内热源强度

r [m] 圆柱坐标的半径轴

$\mathrm{Re}=uh/\nu$ 雷诺数(无因次量)

$S(t)$[m] 相变移动界面位置

t 无因次局部坐标,用于一维线段单元

t[s] 非稳态过程进行的时刻

T[℃] 任意时间和空间的温度

T_o[℃] 初始温度

T_f[℃] 物体周围介质的温度

T_L[℃] 液相凝固温度

T_m[℃] 平均相变温度

T_S[℃] 固相熔化温度

T_W[℃] 物体表面温度

u[m/s] 速度场 x 方向分量

v[m/s] 速度场 y 方向分量

$\boldsymbol{V}$[m/s] 速度场向量

W 权余法中的权函数

x[m]　直角坐标的 x 轴

y[m]　直角坐标的 y 轴

z[m]　直角坐标的 z 轴或圆柱坐标的 z 轴

α[W/(m^2·℃)]　对流换热系数

Γ　物体边界(取逆时针方向为正);泛指流体的热物性参数

Δ[m^2]　三角形单元的面积

ξ,η　无因次局部坐标,用于四边形单元

$\theta=T-T_W$[℃]　过余温度

ν[m^2/s]　流体的运动粘度

Π　一维二节点线段单元的型函数

ρ[kg/m^3]　物体密度

ϕ　泛指待求函数

φ[m^2/s]　粘性流场的流函数

ω[1/s]　粘性流场的涡量

ω　高斯数值积分求积权系数;松弛因子

上角标

D　表示整体区域

e　表示单元区域

-1　矩阵的逆

顶标

$-$　作为已知值处理的迭代初始场

$\sim$　待求函数的近似解

下角标

a,b　一维线段单元的局部节点号

i,j,m　二维三角形单元的局部节点号

i,j,k,m　二维四边形单元的局部节点号

i,j,m,k,P,Q　二维三角形六节点单元的局部节点号

i,j,k,m,P,Q,R,S　二维四边形八节点单元的局部节点号

L　表示液相

l　单元节点号,经常用作 $i,j,\cdots$ 等节点的轮换标.表示该节点在矩阵“行”的位置

n　单元节点号,经常用作 $i,j,\cdots$ 等节点的轮换标.表示该节点在矩阵“列”的位置

S　表示固相;

s　ξ 坐标上的高斯求积基点

t　η 坐标上的高斯求积基点

W　固体壁面

数学运算符号

∇^2　拉普拉斯算子

$|\ |$　行列式

$[\ ]$　矩阵

$\{\ \}$　列向量

$\iint_D$ 或 $\iint_e$　二维整体区域或单元的面积分

$\oint_\Gamma$　封闭边界曲线积分

d　全微分算子

∂　偏微分算子

目　　录