



牛顿流体连续介质力学

韩式方 著 ● 四川科学技术出版社



非牛顿流体连续介质力学

韩式方 著

四川科学技术出版社

98112

责任编辑：刘阳青

封面设计：韩健勇

版面设计：林思聪

非牛顿流体连续介质力学

韩式方 著

ISBN7—5364—0378—X/O·12

出版：四川科学技术出版社

印刷：自贡新华印刷厂

发行：新华书店重庆发行所

开本：787×1092毫米 1/32

印张：8

字数：180千

印数：1—2100

版次：1988年3月第一版

印次：1988年3月第一次印刷

书号：13298·134

定价：2.05 元

作者简介

韩式方，中国科学院成都分院副研究员，数理研究室副主任。中国科学院成都分院、成都科学技术大学流变学研究所副所长。1935年生。1960年毕业于苏联莫斯科大学数学力学系。1982—1984年，以洪堡基金会（AvH Foundation）研究学者身份，在联邦德国达姆斯塔特大学与E.Becker合作，研究非牛顿流体力学。目前的主要研究领域包括非牛顿流体流动、本构理论、流变学和分子流体力学等。在国内、外期刊上发表论文40余篇。

198101

内 容 简 介

本书是关于非牛顿流体连续介质力学的一本中文专著。书中介绍了非牛顿流体理性连续介质力学基础理论。系统地介绍了微分型、积分型和 Maxwell-Oldroyd 型本构方程理论。着重研究了拉伸流体的运动和管道内粘弹流体的流动，其中包括了作者部分研究成果。最后还讨论了非牛顿流体计算力学。

本书可供科研机构 and 高等院校的研究人员、教师、研究生和大学生阅读，也可供从事化工、轻工、食品、石油、水利、建筑、冶金等工作的工程技术人员参考。

CONTINUUM MECHANICS OF NON-NEWTONIAN FLUIDS

by

HAN SHIFANG

(Chengdu Branch, Academia Sinica,
Chengdu, China)

Abstract

The chief purpose of the present book is to give, in a relatively concise but sufficiently general manner, an exposition of the theory of rational continuum mechanics of non-Newtonian fluids and some contribution developed by author. The present book contains 10 chapters. Chapter 1 contains a introduction. In Chapter 2 we give the fundamental principles of the algebra of tensors. Chapter 3 is devoted to the kinematics. In Chapter 4 the fundamental equations of non-Newtonian fluid mechanics are considered. In Chapter 5 the principles of constitutive equation are discussed. Chapter 6 treats the theory of simple fluid. In Chapter 7 the constitutive theory of Maxwell-Oldroyd type is given. In Chapter 8 we examine the viscometric and non-viscometric fluid flows. Chapter 9 is dealt with the extensional flow. Finally in Chapter 10 we discuss numerical simulation of the non-Newtonian fluid flows.

前 言

在力学、化学和化学工程之间，一门新兴的科学——非牛顿流体力学，以其强大的生命力迅速发展。这一学科，旨在研究非牛顿流体（或材料）的运动状态。所谓非牛顿流体，简单地讲，是指不服从牛顿常粘度定律的流体材料或物质。

非牛顿流体力学与一般流体力学的重要区别之一是，本构方程的概念和理论，成为非牛顿流体力学理论的基础。而在一般流体力学中，本构关系不会形成实质性问题，在本构理论方面，Oldroyd的观点，是在这一学科历史中具有转折性的重大发展。Oldroyd本构理论是建立在随体坐标基础之上的。

非牛顿流体广泛存在于工业生产和自然界中，高聚物溶液或熔体是典型的非牛顿流体。这类流体，与工业生产和国民经济有十分密切的关系。无论在国内外，人们对非牛顿流体的研究和应用，已表现出越来越大的兴趣。

本书主要讨论非牛顿流体理性连续介质力学的基本理论，Oldroyd型本构方程，拉伸流体的流变学以及非牛顿流体流动的数值模拟。研究非牛顿流体力学的数学工具——张量代数，在第二章中作了简要叙述。

这部书，是作者在成都科技大学和中国科学院成都分院为研究生讲课的讲稿基础上写成的。希望这本书能对流变学方面的科学工作者及工程技术人员，提供关于非牛顿流体连续介质力学理论及若干专题的研究成果，其中包括作者关于

非牛顿拉伸流动、附面层理论、以及管内非定常流动的研究工作成果。

我十分感谢中国科学院成都分院，为我创造了完成这一著作的条件。感谢 E. Becker 教授，当我在联邦德国以洪堡基金会研究学者作访问研究时（1982—1984），他与我十分有益的合作和讨论，启发了我关于非牛顿流体力学研究中的新见解。十分感谢洪堡基金会（AvH）对我的研究工作的支持。

感谢康振黄教授和李永年教授，为我在成都科技大学提供了讲授非牛顿流体力学课程的机会，并进行了有益的讨论。在完成本著作时，王毓宾副教授校阅了书稿，且多方面予以帮助，在此表示谢意。

在本书中，难免还有疏忽、遗漏以及不完善之处，期待读者指正。

感谢国家自然科学基金委员会对我的研究工作的支持和资助。感谢出版者的支持。

韩 式 方 (Han Shifang)

于中国科学院成都分院

1987年5月

目 录

第一章	绪论	
§ 1.1	非牛顿流体	1
§ 1.2	理性连续介质力学和非牛顿流体力学	4
§ 1.3	非牛顿流体力学与流变学	6
第二章	张量代数学	
§ 2.1	向量和向量空间	8
§ 2.2	向量的协变分量和逆变分量	10
§ 2.3	张量	13
§ 2.4	张量代数	16
§ 2.5	逆张量、转置张量、张量迹	19
§ 2.6	张量的不变量	20
§ 2.7	度量张量	22
§ 2.8	物理分量	23
§ 2.9	Christoffel符号 协变导数	24
§ 2.10	张量分量对坐标的协变导数	28
§ 2.11	梯度 散度	30
第三章	运动学	
§ 3.1	变形 参考构形	32
§ 3.2	变形梯度 体积元变化	33
§ 3.3	拉伸和旋转	39
§ 3.4	变形速度	42

§ 3.5	Rivlin-Ericksen张量	44
§ 3.6	Cauchy-Green张量分量	47
§ 3.7	张量 A_n 和 B_n 的分量	48
§ 3.8	典型流动运动学	50
§ 3.9	有常变形史的流动	55
第四章 非牛顿流体连续介质力学基本方程		
§ 4.1	一般关系式	58
§ 4.2	连续方程	60
§ 4.3	面积元的变换	61
§ 4.4	运动方程	63
§ 4.5	能量守恒方程	67
§ 4.6	基本方程的分量形式	69
第五章 本构方程原理		
§ 5.1	本构方程的基本原理	75
§ 5.2	Reiner-Rivlin流体	79
§ 5.3	广义牛顿流体力学	81
第六章 简单流体理论		
§ 6.1	简单流体的概念	82
§ 6.2	简单流体的积分模型	85
§ 6.3	简单流体的微分模型	91
§ 6.4	二阶流体模型	93
§ 6.5	Wagner积分模型	95
第七章 Maxwell-Oldroyd 型本构方程		
§ 7.1	随体坐标系	99
§ 7.2	随体时间导数	100
§ 7.3	Oldroyd型本构方程	105
§ 7.4	4常数Oldroyd模型	111

第八章 测粘流动和非测粘流动

§ 8.1	测粘流动	114
§ 8.2	管内流动 法向应力的确定	118
§ 8.3	螺旋流动 Couette 流动	125
§ 8.4	锥板流动的基本理论	130
§ 8.5	非定常管流理论方法	134
§ 8.6	管内幂率流体非定常流动	138
§ 8.7	二阶流体管内非定常流动	142
§ 8.8	非牛顿流体附面层理论 平面管道起始段流动	149

第九章 拉伸流体流动

§ 9.1	拉伸流体流动的作用	158
§ 9.2	拉伸流运动学	160
§ 9.3	拉伸粘度	165
§ 9.4	纺丝过程的理论初步	172
§ 9.5	拉伸流动的不稳定性及研究稳定性的方法	178
§ 9.6	拉伸流体的扰动本构方程	182
§ 9.7	拉伸熔体薄板的稳定性分析	188
§ 9.8	拉伸薄板不稳定性的本征值理论	197
§ 9.9	牛顿流体薄板的不稳定性(本征值理论)	205
§ 9.10	非牛顿流体薄板拉伸不稳定性(本征值理论)	207

第十章 非牛顿流体流动的数值模拟

§ 10.1	Maxwell流体的基本方程	211
§ 10.2	微分模型的差分数值模拟	216
§ 10.3	边界条件逼近	224
§ 10.4	轴对称流动	227
§ 10.5	非定常流动	230

第一章 绪 论

§ 1.1 非牛顿流体

人类在探索大自然规律的过程中,总是不断地有所发现,有所创新。力学家们曾长期研究服从牛顿常粘度定律的牛顿流体,这首先由于牛顿流体,如空气和水,对人类社会生产发展具有重要作用。经典的牛顿流体力学认为,在平行流动中,剪切力与剪切速率成正比,其比例系数称为粘性系数,即

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

或者写成张量形式,有

$$T = 2\eta_0 D \quad (1.2)$$

在此基础上,可以得到著名的 Navier-Stokes 方程,它是描述粘性牛顿流体运动的基本方程。式(1.1)或(1.2)称为牛顿常粘度定律,它所描述的流体称为牛顿流体。

随着生产和科学技术的发展,在工业生产过程中的自然界,发现存在大量不服从牛顿常粘度定律的流体,即非牛顿流体。对于这类流体,在应力作用下,它将连续改变其运动状态,它的本构关系与牛顿常粘度定律有显著区别。研究非牛顿流体运动规律的科学,称为非牛顿流体力学。典型的非牛顿流体是高分子熔体和高分子溶液。在过去的30年中,高

分子工业的迅速发展，引起了科学家们研究高分子材料的兴趣，并从数学和力学的角度，研究上述特殊流体的力学性能，推动了连续介质力学的发展。在化学工业中的各类泥浆和悬浮液，油漆、涂料、颜料等，硅酸盐工业中的各种烧结块，均属非牛顿流体。在现代流体力学的新分支中，生物流体力学占有重要位置。生物流体，例如人体内和各类动物体内的血液、关节腔内的滑液、淋巴液、细胞液、脑脊液、支气管内分泌液等，都具有非牛顿流体的性质。科学家认为，地球中心炽热的岩浆可以作为非牛顿流体处理。实验证明，我国的高腊原油及黄河的高含砂水流均具有非牛顿性质。严格地讲，空气和水也可以看作是非牛顿流体的一种特殊情形，即非牛顿流体效应趋向于无限小的情形。当气体的分子平均自由程与物体特征尺寸达到同一个数量级时，进入了稀薄气体动力学的研究领域。对于稀薄气体流动的研究，不是从经典的连续介质出发，而是从分子运动论的观点出发，所以在更广的涵义上，稀薄气体也是一类非牛顿流体。因此，在自然界，非牛顿流体是普遍存在的，而牛顿流体仅在一定条件下才存在。

非牛顿流体具有一系列区别于牛顿流体的奇特的物理力学现象。首先应指出的是韦森堡(Weissenberg)效应。1944年，韦森堡在英国帝国工学院公开表演了一个有趣的实验。在一烧杯中盛有粘弹流体，一实验杆直立于烧杯中心，并作旋转运动。实验发现，当实验杆旋转时，粘弹流体向杯中心运动，杯中心的流体沿杆向上爬，液面变成凸形。甚至实验杆的旋转速度很低时，也可以观察到上述现象。非牛顿流体运动时，存在法向应力差，是引起韦森堡效应的主要原因。对于非牛顿流体，需要定义第一法向应力差和第二法向应力差，即

$$\sigma_1 = \tau_{11} - \tau_{22}, \quad \sigma_2 = \tau_{22} - \tau_{33} \quad (1.3)$$

与牛顿流体不同，对于非牛顿流体，法向应力差起重要作用。第一法向应力差，一般为正值，比第二法向应力差大得多。第二法向应力差，一般为负值，约为第一法向应力差的1/10。第一法向应力差较为重要，而第二法向应力差只在一些特殊问题中有较显著的作用。

挤出物胀大是法向应力差引起的另一个特殊现象。当高分子熔体或溶液从一大容器通过毛细管流出时，可以观察到射流直径增大的现象，称为挤出物胀大。还可根据流体的弹性来解释挤出物胀大现象：高分子流体在毛细管内剪切流场中，或在毛细管的入口区，弹性流体受到拉伸。流体元在这些区域被强迫变形。高聚物流体元离开毛细管时，作用在它上面的约束力将消失，因此弹性流体恢复到拉伸前的状态，从而引起高分子流体射流直径增大。

粘弹流体具有高拉伸粘度，开口虹吸效应是高拉伸粘度的作用。同时，理论和实验证明，在任意形状管道内的非牛顿流体流动中，可能出现非直线流动，即存在二次流。二次流是否出现，与第二法向应力差 σ_2 有关。若 $\sigma_2 = 0$ ，则不会产生二次流。

非牛顿流体显示出的另一个特性是减阻。1948年，汤姆（Toms）在第一届国际流变学会议上宣布了他的减阻实验，将少量的聚甲基丙烯酸（约10ppm）加入管内一氯代苯低分子溶液的湍流中，在一定流量下，管内流动的摩阻显著下降。这一现象称为减阻现象。在较早的时候，减阻研究还限于石油化学工程和流变学界。到60年代，流体力学工作者开始重视对高聚物减阻的研究。许多高聚物——溶剂系统均显示出减阻现象。例如，在萘烷中的聚异丁烯，在水中的羧甲

基赛璐珞。在水中加入 50ppm 的聚乙炔氧化物，其结果使湍流条件下的摩阻降低 30%。在消防水中添加少量聚乙炔氧化物，可使消防车龙头喷出的水的扬程提高一倍以上。Gampert 将少量聚丙烯酸溶液 (PAA, 50ppm)，加入管内发展的湍流时发现，当层流过渡到湍流时，才发生减阻现象，同时，分子量影响最大减阻值。实验观察表明，高聚物减阻存在一个起始点，只有当雷诺数达到一定值时，溶液中的聚合物才呈现减阻效应。这就是说，当流动由层流转变为湍流时，出现减阻现象。观察还表明，在一定雷诺数下，各类高聚物浓度增至一最大值，减阻百分比不再增加。因此，对于聚合物溶液，存在一最大减阻渐近线。

非牛顿流体显示出与牛顿流体完全不同的物理力学性质。在经典的流体力学中，湍流被认为是一难题，至今尚研究得不够完善。然而在牛顿流体中，加入少量高聚物添加剂，改变了湍流结构，出现了减阻效应。同样，可以认为，对于水动力学中的一类特殊现象，如气蚀，如果应用高聚物添加剂，也将改变气蚀发生过程及其破坏作用。高聚物添加剂影响涡流结构，也是值得注意的一个问题。因此，随着科学研究的发展，非牛顿流体还将显示新的特性。

§ 1.2 理性连续介质力学和非牛顿流体力学

这里简单介绍从经典的连续介质力学及其线性理论，到非线性力学（或理性连续介质力学）发展的历史。在 1687 至 1845 年间建立了连续介质力学的基本原理和线性本构方程。

1752年欧拉提出了著名的牛顿本构方程

$$F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z \quad (1.3)$$

从18世纪开始发展连续介质的变形和运动学理论。1757年欧拉提出了理想流体的本构关系

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} \quad (1.4)$$

尔后，纳维埃—泊松 (Navier—Poisson) 定律给出了线性粘性流体的本构关系：

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (1.5)$$

本构关系 (1.5) 所描述的流体称为牛顿流体。Stokes于1845⁵年提出了非线性粘性流体的概念，其本构方程的形式为

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} + f_{ij}(D_{KL}), f_{ij}(0) = 0 \quad (1.6)$$

其中： f_{ij} 是一个矩阵函数。方程 (1.6) 实际上已是非线性力学概念。然而，在尔后一百年的历史中，没有人对这一方程作过工作。材料的线性理论，合理地描述了大量工程技术现象。所以，在1845年以后的100年中，力学工作者几乎完全研究线性材料。只有在20世纪初，化学工业迅速发展以后，有非线性效应的材料才显得日益重要。1945年，Reiner指出，(1.6)式中的矩阵函数必须具有某种特殊形式。到40年代后期，Rivlin首先得到了，有任意物质函数的一般非线性理论中一些特殊边值问题的精确解。1950年，Oldroyd首先提出了理性连续介质力学体系。他发展了非线性积分记忆理论，并提出了建立本构方程的一个重要的不变性原理，即物质无关性原理。继Oldroyd的工作以后，Noll于1955年至1958年发展了有记忆材料的一般概念。特别是Noll关于简单流体的理论，可以导出某种特殊流动（即测粘流动）的精确解。通过实验决定上述解答中的物质函数。

材料力学、弹性力学、流体力学和土力学等力学的各分

支学科，分别研究固体材料的弹性性质、流体的流动特性和土壤的力学性质。其本构方程都是线性的。如果不限于考虑某一个别的学科，而是从总体方面研究物质（或材料）的力学行为，把各类物质作为连续介质统一考察，且与张量分析和泛函分析有机地结合起来，并上升到新的数学高度，就形成了理性连续介质力学。它由研究线性本构关系转而研究非线性本构关系，这就是非线性连续介质力学。与此同时发展起来的，是一门边缘学科“流变学”。为了研究固体塑料，高分子溶液等的行为，化学工程师开展了流变学的研究。流变学与理性连续介质力学一样，把固体和流体统一地进行研究。然而，两者又有区别。前者重点阐明粘弹性和物质的非线性流变性质；而后者则以建立连续介质的数学体系作为目标。

理性连续介质力学和流变学的结合，推动了流变学向新的科学高度发展。理性连续介质力学的基本原理，奠定了非牛顿流体力学的理论基础。或者说，非牛顿流体力学是与理性力学一同发展起来的，它们的基本原理是一致的。因此，从理性连续介质力学的高度认识非牛顿流体力学，这是基本出发点。

§ 1.3 非牛顿流体力学与流变学

流变学是研究材料流动和变形的科学，它重点研究材料的流变学特性和运动状态。流变学的研究对象包括流体和固体，也包括流体和固体之间的材料，如悬浮体。它的重要任务是研究材料的物性，通过实验和理论的方法建立材料的流变