

V. I. Arnold

CATASTROPHE THEORY

突变理论

周燕华 译 朱照宣 校



高等教育出版社

31

9

V. I. Arnold

CATASTROPHE THEORY

突 变 理 论

周燕华 译 朱照宣 校

科学出版社数学分社

突变理论是七十年代出现的新理论。阿诺尔德是苏联著名的数学家、力学家。本书介绍了突变理论的主要方面及其在物理科学中的某些应用,但阅读本书并不需要很多的数学背景知识。

本书系根据1983年俄文第二版并参照英文第一版和1986的英文第二版译出。为帮助读者阅读、理解本书,北京大学朱照宜教授和上海交通大学凌复华教授撰写了“关于阿诺尔德的《突变理论》”一文,印在译文之前,以飨读者。

V. I. Arnold
CATASTROPHE THEORY

突 变 理 论

周燕华 译 朱照宜 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 81 000

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数 0001—2 140

ISBN 7-04-002505-1/TB·146

定价 1.15 元

关于阿诺尔德的《突变理论》

朱照宣 凌复华

阿诺尔德的《突变理论》，是对突变理论严肃而又通俗的介绍和评论，主要着眼于在物理科学中的应用。

突变(catastrophe)理论自70年代正式问世以来，无论在国外或在国内，都受到时高时低、冷热不一的待遇。分歧主要不在数学理论和它在物理科学的应用中，而主要在于能否和怎样在生物科学和社会科学中应用。持乐观和悲观看法的，都大有人(包括大数学家)在。阿诺尔德就是悲观论者之一，本书反映了他的观点。在这里，我们觉得有必要提供一些背景资料，以使读者较全面地了解有关情况。

这一理论的奠基性著作是托姆于1972年发表的《结构稳定性和形态发生学——建模一般理论概要》。它是一本不用传统数学形式的专著，中间穿插了一些哲理性议论甚至作者的推测(在1975年英文译本中有修正)，但它还是试图从数学方面讨论微分动力体系(动力学系统)中性态发生跳跃性变化的普遍理论，并应用于生物学中的一些课题。它的主要出发点是分叉(bifurcation)理论和奇异性(singularity)理论，以及结构稳定性概念。分叉是指系统中的一个参量跨越某些临界时系统的长期性态(终态)发生定性的变化，分叉现象广泛存在于自然界、工程和社会的各种系统中，其中共同的数学理论早已成为一门数学分支。奇异性理论则是一种艰深的数学

理论。结构稳定性着眼于结构参量变化时，系统的性态是否大体相似。托姆的数学理论着重于光滑动力体系中稳定平衡态的分叉问题(分叉理论所考虑的不但包括徐缓的变化，也包括了突跳型的变化)。在数学上，这是微分拓扑学和奇异性理论的一个进展。并且托姆并不满足于纯数学自我完美的享受，他从一开始，就定下了旨在应用的目标。但是，一个动力体系的有限范围内的终态，除了平衡态以外，还可能是振荡、概周期运动，以及浑沌(chaos)。自然界、工程和社会中各种系统并不一定是数学意义上的动力体系，而动力体系也可能不是微分动力体系，微分动力体系又不一定是光滑的。托姆的突变理论原是在一定条件下适用的，但由于实际系统，特别是生物系统，其内在数学机制一般不可能事先知道，因此托姆指出大多数情况下的途径是：“通过对一种过程的发生的宏观检验和对其奇异性的局部性和全局性分析，我们可以试图重建使之产生的动力学”。

托姆是一位天才的数学家，也有着深刻的哲学思想，但如同本书第16章中提到的，他的著作却不那么容易理解。在突变理论的发展中，英国数学家齐曼起了很大的作用。他不仅创制了广为流传的突变机构(本书第4章)，也对突变理论中唯一的一条数学定理——分类定理，给出了严格的数学证明。齐曼的最主要工作，则是把突变理论应用于许多生物科学和社会科学中的实例，并且在应用方式上也作了改进。托姆原来主要着眼于形态发生，即当参量变动时如何出现不同的突变流形与不同的形态相对应。而齐曼则更多地注意代表系统的状态点如何在突变流形上运动从而出现跳跃的现象。因为

这种方式十分直观、简单,又得到了广泛的宣传,以致许多初学者对托姆原来提出的应用方式几乎一无所知。齐曼有很多精辟的应用例子,但也免不了有所失误,例如本书第3章中提到的关于天才和庸人的议论。不过应当指出,由于在这类描述性科学中本来几乎没有什么数学方法可用,在克服了初期的不成熟性以后,新的建模技巧必定会大受欢迎,近年来,突变理论在生物科学中的应用已越来越广泛了。除此之外,其他作者也把突变理论在物理科学中的应用推广到具有李亚普诺夫函数的系统及动平衡解(例如周期解)等情况,这些在数学上都是有严格依据的。

突变理论引起误解的另一个因素是词义上的,托姆用法文词 *catastrophe* 表示突变,这个词虽有“灾难性变化”的含义,但不那么强烈,但同样拼写的英文词,现在却几乎只有“大灾难”的含义了¹。喜好猎奇的新闻界有意无意地失真放大,说什么“科学界已有逃避灾变的办法”,于是突变理论一时红得发紫,成为包医百病的灵丹妙药,加以广泛宣传的又多半是有所争议的在社会科学和生物科学中的一些应用例子(主要用到尖拐突变),这就引起了一些人的批评。其中既包括如阿诺尔德和斯梅尔²那样大数学家的严肃讨论,也包括一些不大负责任的人士的无端非难,甚至把突变理论指责为“皇帝的新衣”³。只是到了80年代,这种争议才趋于缓和,突变理论得

1 此说取自桑博德(Saunders P. T.)致凌复华的私人信件。

2 详见 S. Smale, *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, 1980 128—136 页。

3 *Science* 杂志, 1977 年 4 月 15 日。

到较为公允的评价。不少作者把突变理论应用于各个不同领域中,取得了丰硕的成果。这是国外的情况。

这种一起一伏的波浪也传到了国内,但只是在十年动乱之后,学术界才能真正开始一些研究。80年代,突变理论在国内开始热了起来,援引最多的还是尖拐突变这味灵丹妙药。除了这种平移而外,还有我国文字上的因素。汉文术语中,原来已有两个“突变”,一个是生物学名词,指变异(相对于遗传)的一种,另一个是哲学名词,即质变,相对于渐变或量变而言。这两个术语和 *catastrophe* 是不同范畴的概念,它们另有相应的英文术语(*mutation* 和 *qualitative change*)。不了解内情的就以为,突变论(他们略去一个“理”字,以表示更有方法论上的意义)是现代化的、科学化的质变论,完全忽略了 *catastrophe* 所指的突然变化是有数学定义的。再由于它的应用(无论恰当与否)涉及不少学科分支,一时间突变理论被拔高到不应有的高度。它和耗散结构(理)论及协同论一起,被称之为“新三论”。据说,新兴起的“新三论”将取代“老三论”——控制论、信息论和系统论。这种说法流传广泛,甚至成为大众传播媒介中智力竞赛的一道题目。其实,毋宁说“新三论”属于一“论”,即广泛意义下的系统学(*systematology*)¹。这些理论都是横断学科,它们所作出的概括(一般具有数量关系)能应用于许多不同领域的学科。耗散结构理论和协同论都以研究有序状态如何通过自组织过程而出现为核心,但观点并不完全相同。耗散结构理论中认为在远离热平衡的条件下可能产

1 系统论(*systematics*)则是系统学和哲学之间的一个中介。

生不稳定性,再加上各子系统之间的非线性反馈引起的合作,某些涨落可被放大,使整个系统能形成耗散结构,即与外界环境有物质和能量交换,以及由于内部的不可逆过程而有能量损耗的有序状态。协同论则认为系统到达临界状态以后,将由于各子系统之间的相互合作而造成一个所谓“建序者”(order)¹,这个建序者将役使各子系统,最后造成一种有序状态,而在建序者的形成中,涨落往往起着决定性的作用。这里所谓的有序状态,在这两种理论的创建初期(与突变理论同为七十年代初期),尚未包括浑沌状态。到七十年代末“浑沌热”风靡全球学术界后,才把浑沌状态包括进去。但看来这两种理论对浑沌状态的研究都未作出独特的贡献。另外,这两种理论并未发展自己的数学方法,它们沿用的主要是稳定性分析、分叉、随机过程和中心流形理论,也包括突变理论中新发展的数学内容。另一方面,以上提到的突变理论,更确切地应称为初等突变理论。托姆原来提出的纲要包括范围更广,例如霍普夫分支,也被他包括在广义突变的范畴中。这方面的内容,近年来确实也有很大发展,但一般不再沿用突变理论的名称。其原因大概在于,初等突变理论的数学内容自成一体,不宜再“续貂尾”了。总之,这些理论和当前动力体系理论研究中的一个“热点”——浑沌性态的关系,还有待进一步的探讨。这也是很自然的,每一种理论(哪怕是很高明的理论)都有一定的适用范围,如果声称是无所不包,臻于完美,那反而限制了它的发展。突变理论一度成为众矢之的,在某种程度上就是大

1 order 有“秩序”和“命令”两重意义。协同学中把那些能发号施令的变量称为 order parameter(借用物理学中原有术语,但其本义是有序参量)。

众传播媒介中的过分吹捧帮了倒忙。

阿诺尔德是当代最杰出的数学家、力学家之一。他的数学研究涉及的面十分宽广，而他最擅长的，正好是奇异性理论。他正是从奇异性理论的角度将突变理论作一深入浅出的说明，所引用的材料，许多是他和他的同事们的专门研究成果。这些成果连专业数学工作者也会因各有专长而难于全面领会，而阿诺尔德却只用文字叙述和一些简图（请注意这些简图都是匠心独运的创作），几乎没有数学公式或运算，把深奥的内容奉献给读者。即使从科学普及来说（姑且称之为高级科普，其实是极高明的科学概括），也是极为成功的。

读过本书，连同这篇记述中补充的材料，就知道突变理论争议的来龙去脉，知道它的本来面目。这对于社会科学工作者、哲学工作者也许更有其现实的意义。提出耗散结构理论的普利高津推崇中国的传统科学方法，认为应把西方的和东方的科学方法结合起来；协同论的创始人哈肯也指出中国在传统上更多整体(holistic)的观点。托姆在上述著作中提到了中国的阴阳和中医理论。确实，“易穷则变，变则通，通则久”这类传统思想对他们是新鲜的，对我们是熟悉的，但我们决不能满足于这种古代的笼统的思辨。突变理论所提供的科学内容，如果能被正确地引用，是可以对系统学中的系统观、整体观，甚至对科学方法论有所帮助的。

读过本书就可了解，即使对可以用数学模型描述的分支，如物理科学，突变理论也不仅能够锦上添花，常常还能够雪中送炭。本书第8章关于焦散线(焦散面)等的理论概括是个极好的例子。有些内容，如第9、10、11各章中的天体演化问题，

优化问题、自动控制问题等,对于从事这些课题研究的专业工作者,可能仍是新颖的。

读过本书也可以了解到当代数学(尤其是“纯粹”数学)的内容,各个初看互不相关的现象和抽象概念怎么会在奇异性理论的发展前缘上沟通起来。这对于专业数学专业工作者有参考价值。如需进一步了解,可见所附参考文献(英译本有所补充)。

这里所述,只是一得之见、一家之言。敬请广大读者批评指正。

1987年10月

英文第二版序

对世界的数学描述依赖于连续性和不连续的、离散的现象之间巧妙的相互作用。人们首先观察到的是后者，正如 P. Montel 所说：“同生物一样，函数是以它们的奇异性为特征的。”从光滑、连续的结构中会出现离散结构，奇异性、分叉和突变就是描述这些离散结构的三个术语。

在过去的三十年里，奇异性理论已达到一个相当成熟的水平，这主要得归功于 H. Whitney(1955)、R. Thom(1959) 和 J. Mather(1965) 三人的工作。奇异性理论是一个新的有力工具，它在科学和工程中有广泛的应用，在与分叉理论结合使用时特别是这样（分叉理论起源于 H. Poincaré 的工作 (These, 1879)，后来由 A. Andronov(1933) 加以发展）。

本书的目的是向那些具有非数学背景知识的读者阐述奇异性理论的作用，然而，我希望即使专家们也能从中发现一些对他们来说是新的事实和思想。

有些人认为突变理论是奇异性理论的一部分，而另一些人则相反，他们认为突变理论中包括了奇异性理论。为了避免这种学究式的争论，我对那些申明自己是研究突变理论的人将使用突变理论家这个词。这样，便为所讨论的文章的作者们留有余地，他们可在“奇异性”、“分叉”或“突变”中自由选择。

本书的头几章曾以一篇文章的形式出现在莫斯科《自然》杂志上(1977年第10期)，这篇文章的法文译文以及 R. Thom

• i •

对此文的评述一起在巴黎同时发表 (1980 年《数学》杂志)。在本书的 1981 年和 1983 年俄文版中, 每一版都加进了一些新的章节, 现在的这个版本是最完整的一版, 它在很多地方不同于 Springer-Verlag 出版公司发行的 1983 年版。这次, 书中增加了关于黎曼面、消失环和单值同化的新的一章, 改正了第一版的许多印刷错误, 阐述了一些新结果 (隐 (函数) 微分方程奇异点的规范形式, 张弛振荡理论中慢运动的规范形式, 边界奇异性的不完全分叉, 特殊群 F_4 的焦散线的几何意义, 六百面体的对称群 H_4 在优化控制或变分法问题中的应用)。

作者感谢 R. Thom 教授、M. Berry 教授和 J. F. Nye 教授, 他们对英译本第一版提出了许多宝贵的建议和意见。据 Thom 说, “突变理论”这个词是 E. C. Zeeman 创造的, “吸引力”这个词是 S. Smale 首先使用的 (本书的前一版把这些全归为 Thom 的发明)。遵循 Berry 的劝告, 我为本版加了一个注释文献目录 (它为专家们提供了所讨论的结果的出处, 但有个别作者的两、三个结果除外, 这几个结果由于它们作者的好意许可, 是在本书第一次发表)。Nye 教授已经注意到, 由于某些非常令人感兴趣的全局拓扑原因, 焦散线的某些分叉 (如“飞碟”的产生) 对于从镜像方程 (或 Hamilton-Jacobi 方程) 中推导出来的焦散线来说是不可能的。

在 1965 年的 Thom 讨论会上, B. Morin 关于 Whitney 和 Morin 奇异性作了富有启发性的讲话, 之后, 我与他进行了四小时的交谈, 在这次谈话中我学到了奇异性理论。Morin 按照当时 Mather 给他的一封信中所说的那样, 向我讲述了 Mather 的基本稳定性定理 (同一天的晚些时候, 我发现了

一种不同的证明)。我恰好不幸(或者有幸)不知道 Mather 1968 年未发表的关于右等价的论文,只是在 J. Milnor 向我解释了它之后,我才意识到, Tjurina 在 1967 年(1968 年发表)所做的工作类似于 Mather 的工作,这工作与我在 1972 年的“A, D, E”论文(这些论文是为了纪念 Tjurina 的)有关。

不论是在 1965 年还是之后,我都不能理解 Thom 本人在谈到突变时所说的一些话。七十年代初,当我问他,是否他已经证明了他的预言时,他曾经向我把它们描述成“bla-bla-bla”¹。直至今天,我仍不知道 Thom 关于依赖于四个参数的梯度动力学系统中的分叉的拓扑分类是否正确(以一种被改正了的形式,即对一般度量和势:原始“Thom 定理”于 1969 年发表在《拓扑》杂志上, J. Guckenheimer 在 1973 年给出了这个定理的一个反例,这反例甚至和被突变理论家称颂为“有魔力的 7”都不得不被外延,从而保证定理正确)。

我也讨论不了 Thom 所作的其它更富有哲理性,或带有诗意的结论,这些结论阐述得无法判断它们是对还是错(它们以一种在笛卡儿和培根(们)²之前的中世纪科学中相当典型的方式)。幸亏伟大拓扑学家的基本数学发现没有遭受任何非理性哲学之苦。

正如 Poincaré 曾经说过的,数学家并不摧毁阻碍他们的科学的障碍,他们只简单地把障碍推向科学的边缘。但愿这些特殊的障碍被推得尽可能地远,一直推到未知和非理性的

1 译注:法语,胡说八道。

2 译注:可能指 Francis Bacon(1561~1626)和 Roger Bacon (1214~1294)。

范畴。

莫斯科, 1986 年 2 月

V.I. Arnold

英文第一版序

奇异性理论发展得非常迅速,自从本书俄文版发行以来,又发现了许多新的结果:比如,二十面体与绕过一个一般障碍问题之间的关系。关于这一点,读者可以在本版后面列出的文献目录中的两篇文章《射线系统的奇异性》和《变分法中的奇异性》中找到更详细的讨论。

莫斯科,1983年9月

V.I. Arnold

俄文第一版序

1977年11月《纽约时报》上有一篇报道，它在评论突变理论时说：专家们讨论如何预报灾难¹。

《伦敦时报》宣称突变理论是“本世纪主要的知识运动”，而《科学》杂志上一篇关于突变理论的文章的标题却是“皇帝没有穿衣服”²。

这本小书解释什么是突变理论，以及它为什么引起如此大的争议。本书也包括从奇异性和分叉的数学理论中得到的不带有争议性的结论。

作者尝试对只具有极少数学背景知识、但却充追求知欲望的读者讲述基本结果和应用的精髓。

莫斯科, 1981 年

V. I. Arnold

1 译注：突变理论，英文是 catastrophe theory, catastrophe 通常指突发性的大灾难，如地震，大火、洪水。

2 译注：借用安徒生童话《皇帝的新衣》故事，指是一种骗局。

目 录

英文第二版序	i
英文第一版序	v
俄文第一版序	vi
1. 奇异性、分叉和突变	1
2. Whitney 奇异性理论	2
3. Whitney 理论的应用	6
4. 一种突变装置	8
5. 平衡态的分叉	12
6. 平衡稳定性的丧失和自激振荡的产生	17
7. 稳定性边界的奇异性 and 完好事物的易脆原理	25
8. 焦散线、波阵面及其变态	26
9. 宇宙中物质的大范围分布	36
10. 优化问题中的奇异性: 极大值函数	40
11. 可达边界的奇异性	43
12. 光滑曲面及其投影	52
13. 绕过障碍问题	57
14. 辛几何学和接触几何学	60
15. 复奇异性	69
16. 突变理论的神秘主义	81
文献目录注释	87
中英文名词对照	105