线性系统理论

李保全　陈维远　编著

国防工业出版社

线性系统理论

线性系统理论

李保全　陈维远　编著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论/李保全,陈维远编著.—北京:国防工业出版社,1997.1
ISBN 7-118-01657-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②陈… Ⅲ.线性系统理论 Ⅳ.0231

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第15471号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
北京怀柔新华印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本787×1092 1/16 印张13 296千字
1997年1月第1版 1997年1月北京第1次印刷
印数:1—3000册 定价:21.00元

前　言

本书主要介绍有关线性系统的时域理论和分析、综合方法，这些理论和方法都是比较成熟的，而且是从事控制工程的科技人员普遍采用的。书中注重物理概念的阐述，所涉及到的数学工具都是从事控制工程的科技人员及工科大学生所能掌握的。同时考虑到对于没有学习过经典控制理论读者的要求，本书不去片面地追求所谓内容上的完整性而使其内容过于复杂，在数学处理上力求通俗，以使用尽可能少的篇幅来介绍线性系统时域理论的基本概念、方法和结论，为读者进一步的学习和研究奠定一个良好的基础。此外，书中的习题部分，对于帮助理解和掌握书中的内容是十分重要的，读者应尽可能地都予以完成。

本书由李保全和陈维远共同编写，李保全任主编，田宝荣同志担任本书的主审。陈思同志编制了与本书配套的CAI计算机软件，陆军同志和吴誉研究生在本书的习题和图稿方面做了大量的工作。另外，华克强教授在本书的编写过程中提出了许多宝贵的意见，在此一并表示感谢。本书的内容在教学中虽已多次使用，但限于水平，不妥和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

内容简介

本书对线性系统的时域理论作了系统的阐述。给出了线性系统状态空间的概念、组成方法和基本性质，进而导出系统的状态空间描述。在此基础上，对线性系统进行了定量和定性的分析，分别给出了连续时间系统和离散时间系统状态运动的一般表达式。同时对于系统的能控性和能观性这两个线性系统理论中最基本的概念，分别从直观的物理意义和严格的数学定义两个方面作了详细、深入的阐述，并给出了相应的判断准则。书中对于系统的稳定性问题也作了较详细的介绍。重点突出，论述严谨。最后介绍有关线性系统的时域综合理论，并分别给出了系统控制器和系统观测器的设计方法。全书共分七章，每章后均附有习题。本书可作为高等院校自动控制及相关专业高年级学生学习的教材，也可供系统与控制领域的广大工程技术人员和科学工作者参考。

目　录

绪　论

线性系统理论的研究对象为线性系统，它通常是实际系统的一类理想化模型。系统是由相互关联和相互作用的若干组成部分按一定规律组合而成的、具有一定功能的整体。在工程上，首先要对物理系统和模型加以研究，并予以区分。实际系统可以具有完全不同的属性，如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等等。但系统理论中，常常抽去具体系统的物理或社会属性，而把它抽象为一个一般意义下的系统模型来加以研究。这样对于同一个系统模型可对应不同的实际物理系统。同样，由于研究的目的不同，一个实际物理系统可以有不同的系统模型。如运载火箭，为研究其飞行的轨迹，可以将其视为一个质点，而如果研究其飞行的姿态，则必须视其为刚体。为求得适当的系统模型，我们必须要充分了解物理系统的运行范围，并明确研究的目的。一旦获得系统模型，下一步就要建立起系统模型的数学方程描述。在系统与控制理论中，我们将主要研究动态系统，通常也称其为动力学系统。动态系统一般可以用一组微分方程或差分方程来描述。当描述动态系统的数学方程具有线性属性时，称相应的系统为线性系统。线性系统是一类最简单且研究得最多的动态系统。线性系统的主要特征是满足叠加原理，这一属性导致了在数学上处理的简便性，使得可以用比较成熟的数学工具和矩阵理论来研究它的运动。

在获得系统的数学描述之后，就可以对系统进行定量和定性的分析。在定量分析中，我们关心的是系统对某一输入信号的实际响应和性能。这种分析涉及到很多复杂的计算，常借助于数字或模拟计算机来完成。在定性分析中，我们关心的是诸如稳定性、能控性和能观性等系统的一般特性。系统的各种设计方法，往往来源于这一分析。因此，定性分析在线性系统理论中占据重要的位置。

如果所得到系统的响应不能令人满意，就要对系统加以改善或优化，这往往需要在系统中通过引入控制器来完成。这类问题即为系统的综合，它是建立在分析基础之上的。应当注意的是，系统综合设计是在系统模型上完成的。如果模型选取得适当，则所设计出的控制器经适当的调整就能够相应地改变实际系统的特性。

由上述可以看出，系统模型的获得在线性系统理论中是对系统分析与综合的前提条件。但模型的建立也并非易事，它是系统与控制理论中的一个专门的领域，在本书中不予以涉及。我们假设系统的模型都是已知的，可供我们在分析与综合中使用。本书中用以描述线性系统的数学方程主要限于状态空间描述，其形式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}$$

并称其为系统的状态空间描述，也可称为系统的内部描述。对于不同类型的系统，可以将上述方程形式进行变形或推广。在此基础上我们将主要介绍线性系统的状态空间理论。在第一章中将系统地导出线性系统的输入—输出描述和状态空间描述，给出状态空间的概念、组成方法和基本性质。第二章进行线性系统的定量分析。分别给出连续和离散时间系

统状态运动的一般表达式。第三章着重讨论系统的能控性与能观性，这两个概念在线性系统理论中是基本的概念。同时给出了线性系统能控性和能观性的一些充分必要条件。第四章将引入系统实现的概念，以及系统状态空间描述的规范分解方法，进一步揭示了状态空间描述与传递函数矩阵之间的关系。第五章对于线性系统的运动稳定性问题做了较详细的介绍。一个可实际运行的系统必须是稳定的。将分别给出输入输出稳定性和李亚普诺夫稳定性的概念及判别方法。第六章将介绍线性系统的综合问题，包括极点配置问题、镇定问题、渐近跟踪问题等。最后一章介绍状态观测器的有关理论和设计方法。

第一章　系统的数学描述

在系统的分析与综合过程中，第一步的工作就是建立系统行为的数学描述，也即建立起系统中各变量间的因果关系和变换关系。它是系统分析与综合的前提条件。由于分析方法的不同或由于解决问题的目的不同，描述系统行为的数学方程也有所不同。同时，由于系统的相似性，使得同一数学描述可以用来表征不同的系统。系统的变量可分为外部变量和内部变量。以此为基础，在线性系统时域理论中所使用的数学描述也可分为两大类，即系统的输入-输出描述（或称为外部描述）和系统的状态空间描述（或称为内部描述）。

在图 1-1 所示的系统中，外部对系统施加的作用或激励称为系统的输入变量，系统对外部的影响则称为系统的输出变量。假设系统有 p 个输入，q 个输出，分别用 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_q$ 来表示，或记为向量的形式：$\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p]^T$，$\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_q]^T$，其中“$T$”表示向量的转置。并统称为系统的外部变量。如果系统只有一个输入和一个输出（$p=1, q=1$），则称系统为单变量系统。当系统的输入量或输出量多于一个时，则称其为多变量系统。描述系统输入-输出变量关系的模型，称为系统的输入输出描述。对于系统的内部运动状态，通常用称为状态变量的一组内部变量来表征，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。或写成向量形式：$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$。这些变量随时间的变化规律，可以全面体现系统的运动行为。因此，以系统内部的状态变量所建立的数学描述是基于系统自身的内部结构性质。我们称其为系统的状态空间描述。

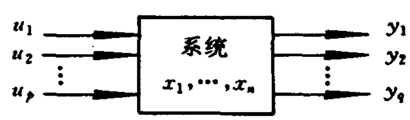

图　1-1

在建立系统输入-输出描述时，可以假设系统的内部特性是未知的，即可将系统看作一个“黑箱”。输入-输出描述不去表征系统的内部结构特性。因此，一般来说它是一类不完全的描述。而状态空间描述则可以反映出系统的一切动力学特性。在以后的分析中，将看到只有在满足一定条件下，两种描述才是等价的。

§1-1　系统输入 - 输出描述

一、线性系统

我们首先介绍有关概念。

定义 1-1〔线性映射〕　设 F 为一数域，$\mathscr{U}$、$\mathscr{Y}$ 分别为 F 上的两个线性空间，如果映射：

$$L: \mathscr{U} \to \mathscr{Y}$$

对于任意的输入 $\boldsymbol{u}_1 \in \mathscr{U}$ 、$\boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{U}$ 和任意常数 α_1、$\alpha_2 \in F$ 均有：

$$L(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2) = \alpha_1 L(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2 L(\boldsymbol{u}_2) \tag{1-1}$$

则称映射 L 为线性的，并称式(1-1) 为叠加原理。

式(1-1) 通常可改写为：

$$L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2) \tag{1-2}$$

$$L(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha L(\boldsymbol{u}) \tag{1-3}$$

其中$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u} \in \mathscr{U}$ ，$\alpha \in F$。(1-2) 式称为映射的叠加性，(1-3) 式称为映射的齐次性。不难证明(1-1) 式与(1-2) 式和(1-3) 式是等价的。

定义 1-2 凡是输入 - 输出关系可以用线性映射描述的系统，称为线性系统。

线性系统可由图 1-2 加以表示。其中 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{U}$ ，$\boldsymbol{y} \in \mathscr{Y}$ ，且

$$\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{u}) \tag{1-4}$$

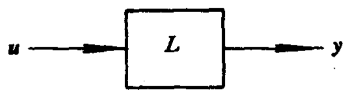

图 1-2

此时 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{Y}$ 可分别称为输入空间和输出空间。

对于线性系统来说，叠加性是其本质特性，当 α 为有理数时，齐次性可由叠加性导出。相反，一般情况下，具有齐次性的系统未必具有叠加性。

二、非零初始条件与脉冲输入

考虑图 1-3 所示的简单电路。电路中的电阻、电容值均为已知的，其输入量 u 与输出量 y 之间的关系可用如下微分方程来表示：

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{RC}y(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$

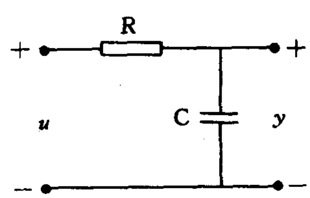

图 1-3

设初始时刻为 t_0，此时电容上的电压为 y_0，则上式方程对于 $y(t)$ 的解为：

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}(t-\tau)}\frac{1}{RC}u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad t \geqslant t_0 \tag{1-5}$$

上式代表了 $u \in \mathscr{U}$ 与 $y \in \mathscr{Y}$ 之间的映射关系。记 $u_1(t)$、$u_2(t)$，$t \geqslant t_0$ 为两个不同的输入信号，相应的输出分别为：

$$y_1(t) = L[u_1(t)], y_2(t) = L[u_2(t)]$$

以及

$$y_{12}(t) = L[u_1(t) + u_2(t)] \quad t \geqslant t_0$$

可以验证，如果 $y_0 = 0$，则有

$$y_{12}(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

且有

$$\alpha y_1(t) = L[\alpha \cdot u_1(t)] \quad (\alpha \text{ 为实常数})$$

因此(1-5) 式所代表的映射 L 是线性的。但如果 $y_0 \neq 0$，那么 $y_{12}(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$，此时映射不是线性的。虽然当给定输入 $u(t), t \geqslant t_0$ 时，由于 y_0 的不同而获得不同的输出 $y(t)$，$t \geqslant t_0$。这种没有唯一确定性关系的输入 - 输出映射，对于决定系统的重要特性是毫无意义的。这也是经典控制理论中关于传递函数的定义为什么要假设初始条件为零的原因。从这里也可得出一个结论，即只有系统在初始时刻没有能量储存时，其初始条件才是为零的。根据上面的分析可见，在建立线性系统的输入 - 输出描述时，为获得唯一确定的关系，必须假设系统的初始条件为零。但在实际系统中，初始条件常常不为零，对此我们可以将非零的初始条件等效成在初始时刻的一个脉冲输入。为此，首先我们直观地引入单位脉冲函数(δ 函数) 的概念。

令
$$\delta_\Delta(t - t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \dfrac{1}{\Delta} & t_1 \leqslant t < t_1 + \Delta \\ 0 & t \geqslant t_1 + \Delta \end{cases} \tag{1-6}$$

如图 1-4 所示，当 $\Delta \to 0$ 时的极限函数：

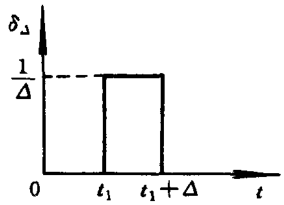

图 1-4

$$\delta(t - t_1) \triangleq \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t - t_1) \tag{1-7}$$

称为单位脉冲函数，或简称为 δ 函数。对于 δ 函数有如下性质：

(1) 对任意 $\epsilon > 0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_1)\mathrm{d}t = \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \delta(t - t_1)\mathrm{d}t = 1 \tag{1-8}$$

(2) 对任何在 t_1 时刻连续的函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_1)\mathrm{d}t = f(t_1) \tag{1-9}$$

(3) 对于在任意时刻 t_1 有 n 阶连续导数的函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t - t_1)f(t)\mathrm{d}t = (-1)^k f^{(k)}(t) \tag{1-10}$$

$$k = 0,1,2,\cdots,n$$

下面考虑两个不同初始值的方程：

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t),t) + \varphi(t)\delta(t-t_0) & \text{(1-11a)} \\ y(t_0) = 0 & \text{(1-11b)} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t),t) & \text{(1-12a)} \\ y(t_0) = \varphi(t_0) & \text{(1-12b)} \end{cases}$$

方程(1-11)较方程(1-12)多了一个强度为 $\varphi(t_0)$ 的脉冲输入项，但其初始条件为零。而方程(1-12)的初始条件不为零。

设 $f(y(t),t)$ 满足方程具有唯一解的条件，$\varphi(t)$ 为连续函数，则不难验证两个方程有相同的解：

$$y(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau$$

这表明非零初始值可以用一个相应的脉冲输入来等效，其物理意义是一个系统的初始能量可以是以往积累的结果，也可以由瞬时脉冲输入来建立。这样任何系统的初始条件都可以假设为零，其作用效果等同于一个脉冲输入。

在今后的系统分析中，按照系统输入 $\boldsymbol{u}$ 能唯一确定输出 $\boldsymbol{y}$ 的要求，在映射关系 $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{u})$ 中均假设其隐含着系统初始条件为零的要求，也即在系统的输入-输出描述中，都必须假设初始条件为零。反之，若系统的输入 $\boldsymbol{u}$ 能够唯一地确定其输出 $\boldsymbol{y}$ 时，则系统的初始条件都可认为是零。

三、线性系统的单位脉冲响应

我们以单变量系统为例，给出线性系统输入-输出描述的具体形式，其结果可推广到多变量系统。

设单变量线性时变系统的输入-输出关系表示为：

$$y = L(u)$$

如图 1-5 所示，对于任意连续输入 $u(t)$，可用一串脉冲函数来近似：

$$u(t) \approx \sum_i u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta$$

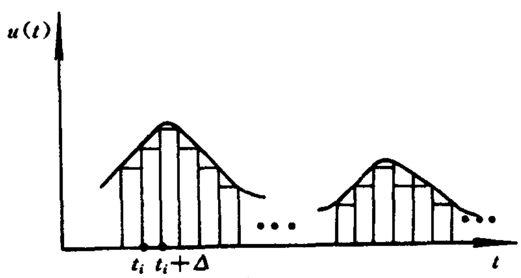

图 1-5

$$\begin{aligned} y(t) &= L(u) \approx L(\sum_i u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta) \\ &= \sum_i L(u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta) \\ &= \sum_i L(\delta_\Delta(t-t_i))\cdot u(t_i)\Delta \end{aligned}$$

当 $\Delta \to 0$ 时，

$$u(t) = \sum_i u(t_i)\delta(t-t_i) \tag{1-13}$$

相应地，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\delta(t-\tau))u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-14}$$

记
$$g(t,\tau)\triangleq L(\delta(t-\tau)) \tag{1-15}$$

并称其为系统的单位脉冲响应。应当注意的是 $g(t,\tau)$ 是一个双变量函数，τ 代表 δ 函数作用于系统的时刻，t 为观测其输出响应的时刻。由(1-14)式，可有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-16}$$

(1-16)式表明，初始条件为零的线性时变系统，其输入 - 输出描述可以由该系统的单位脉冲响应给出完备的表达，一旦 $g(t,\tau)$ 已知，即可由(1-16)式确定出系统对任意输入 $u(t)$ 的响应。

对于(1-16)式在无穷积分计算上的困难，可以利用下面所讨论的系统的具体性质加以克服。

定义 1-3 如果(1-4)式所表达的线性映射 L 不随时间变化，即

$$\boldsymbol{y}(t+t_1)=L(\boldsymbol{u}(t+t_1)) \tag{1-17}$$

则称系统为线性时不变的(或定常的)，否则称系统为线性时变的。

严格地讲，由于系统外界环境的影响，使系统的结构和参数不可能完全不发生变化。因此时不变系统只是时变系统的一种理想化模型。但当系统参数的变化过程比系统运动速度足够慢时，用时不变模型代替时变模型对系统的分析仍可保证有足够的精度，而且在系统的分析与综合过程中，时变系统较时不变系统要复杂得多。

对于时不变系统，有

$$\begin{aligned}g(t+t_1,\tau)&=L(\delta(t+t_1-\tau))\\&=L[\delta(t-(\tau-t_1))]\\&=g(t,\tau-t_1)\end{aligned}$$

令 $\tau_1=\tau-t_1$，则

$$g(t+t_1,\tau_1+t_1)=g(t,\tau_1) \tag{1-18}$$

式(1-18)对任意的 t,t_1,τ_1 均成立。因此若选取 $t_1=-\tau_1$，则对任意的 t 和 τ_1，有

$$g(t,\tau_1)=g(t-\tau_1,0)$$

这表明时不变系统的单位脉冲响应只取决于响应的观测时刻与 δ 函数作用时刻之差，即有

$$g(t,\tau)=g(t-\tau) \tag{1-19}$$

相应的系统对任意输入 u 作用下的响应为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-20}$$

或
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-21}$$

定义 1-4 一个系统在给定时刻的输出值若与未来的输入无关，则称其为因果系统。具体地讲，对任意时刻 t_1，输出 $y(t_1)$ 只取决于 $t\leqslant t_1$ 时的输入 $u(t)$，而与 $t>t_1$ 时的

$u(t)$ 无关。利用(1-20)式，有

$$y(t_1)=\int_{-\infty}^{t_1}g(t_1-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_1}^{+\infty}g(t_1-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-22}$$

(1-22)式中等式右端的第二项表示的正是未来输入值对当前 $t=t_1$ 时刻输出值的贡献。要满足因果条件，这个积分值对任何输入 u 都必须为零，这一条件当且仅当下式成立时才能得到满足，即

$$g(t-\tau)=0 \quad t<\tau \tag{1-23}$$

或

$$g(t)=0 \quad t<0 \tag{1-24}$$

因此对于线性时不变因果系统，其输入－输出描述可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-25}$$

由(1-21)式还可以看出，τ 时刻以前的输入值对 t 时刻输出值的影响结果是由 $g(\tau)$ 来决定的。在这个意义上讲，$g(t)$ 代表了线性时不变系统的"记忆性"。如果系统在 t 时刻的输出值只取决于该时刻的输入值，则这样的系统称为无记忆系统或瞬时系统。若线性时不变系统没有记忆性，则必有

$$g(t)=C\delta(t) \quad C\ \text{为实常数} \tag{1-26}$$

此时系统的输入－输出关系表示为：

$$y(t)=Cu(t) \tag{1-27}$$

即 $y(t)$ 与 $u(t)$ 的关系为 $y-u$ 平面上过原点的一条直线。显然一些不能存储能量的系统，如由纯电阻构成的网络，都属于这类系统。

以上结论可以很方便地推广到线性时变系统中。而且应当注意，因果性、时变性等都是由系统内部结构决定的，是系统自身的固有性质，与外部输入信号无关。

对于多变量系统，设有 p 个输入和 q 个输出，则(1-16)式可推广为：

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{G}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-28}$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau) & g_{12}(t,\tau) & \cdots & g_{1p}(t,\tau) \\ g_{21}(t,\tau) & g_{22}(t,\tau) & \cdots & g_{2p}(t,\tau) \\ & \cdots\cdots & & \\ g_{q1}(t,\tau) & g_{q2}(t,\tau) & \cdots & g_{qp}(t,\tau) \end{bmatrix} \tag{1-29}$$

$g_{ij}(t,\tau)$ $(i=1,2,\cdots,q;j=1,2,\cdots,p)$ 为第 j 个输入端单独施加单位脉冲函数时(其它输入端为零输入)，在第 i 个输出端的响应。即有

$$y_i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_{ij}(t,\tau)u_j(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-30}$$

$$i=1,2,\cdots,q;j=1,2,\cdots,p$$

称 $q\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 为系统的单位脉冲响应矩阵。同样式(1-28)在无穷积分计算上的困难，可利用系统的具体特性加以克服。对于线性时不变系统，同样有

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\boldsymbol{G}(t-\tau) \tag{1-31}$$

当系统具有因果性和时不变性时，若系统的初始时刻为 t_0，则在零初始条件下，对任