

工科数学

主编 严尚安

由于 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 因此 $f(\xi) - f(\xi + \Delta x) \geq 0$, 只要 $\xi + \Delta x$ 在 $[a, b]$ 上, 总有

$$f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi), \\ f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0,$$

当 $\Delta x > 0$ 时,

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0,$$

, 根据函数极限的性质 (第一章第四节定理 2),

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0,$$

同理, 当 $\Delta x < 0$ 时,

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi)$$



C

13
10
2

工
数
学

科学技术文献出版社

013
Y10
2

工 科 数 学

(下 册)

主 编 严尚安
副主编 赵 刚 刘志毅
编 委 胡敏德 赵 静 李魁文

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

DU 90/32

图书在版编目(CIP)数据

工科数学/严尚安等编著.-北京:科学技术文献出版社,1997
ISBN 7-5023-2967-6

I.工… I.严… III.高等数学-高等学校-教材 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 13822 号

科学技术文献出版社出版
(北京复兴路 5 号 邮政编码 100038)
新华书店经销
国家科委西南信息中心印刷厂印刷
1997 年 9 月第 1 版 1997 年 9 月第 1 次印刷
787×1092 毫米 16 开本 38.5 印张 800 千字
印数:1—3000 册
(上、下册)定价:46.50 元

目 录

第十二章 不定积分	[1]
第一节 不定积分的概念与性质	[1]
一、原函数与不定积分的概念[1] 二、基本积分公式表[2] 三、不定积分的性质[3]	
习题 12-1[5]	
第二节 换元积分法	[5]
一、第一类换元法(凑微分法)[6] 二、第二类换元法[9]	
习题 12-2[12]	
第三节 分部积分法	[14]
习题 12-3[17]	
第四节 几种特殊类型函数的积分	[18]
一、有理函数的积分[18] 二、三角函数的有理式的积分举例[22] 三、简单无理函数的积分举例[23] 四、杂 例[24]	
习题 12-4[28]	
第五节 积分表的使用	[29]
习题 12-5[31]	
第十三章 定积分	[32]
第一节 定积分概念	[32]
一、定积分问题举例[32] 二、定积分定义[33]	
习题 13-1[35]	
第二节 定积分的性质 中值定理	[36]
一、积分的线性性质[36] 二、积分对区间的可加性[36] 三、积分的估值性质[37] 四、积分中值定理[37]	
习题 13-2[39]	
第三节 微积分基本公式	[40]
一、变速直线运动中位置函数与速度之间的联系[40] 二、积分上限的函数及其导数[40] 三、牛顿——莱布尼兹公式[42]	
习题 13-3[44]	
第四节 定积分的换元法和分部积分法	[45]
一、定积分的换元积分法[45] 二、定积分的分部积分法[48] 三、杂例[50]	
习题 13-4[50]	
第五节 广义积分	[52]

一、无有限的广义积分[52] 二、无界函数的广义积分[54]

习题 13-5[56]

第十四章 多元函数积分学 [57]

第一节 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念和性质..... [57]

一、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念[57] 二、积分的性质[60]

习题 14-1[60]

第二节 二重积分的计算 [61]

一、利用直角坐标计算二重积分[61] 二、二重积分的换元积分法[65]

习题 14-2[68]

第三节 三重积分的计算 [71]

一、利用直角坐标计算三重积分[71] 二、三重积分的换元积分法[72]

习题 14-3[76]

第四节 第一类曲线积分的计算 [77]

一、平面曲线弧长的计算[77] 二、第一类曲线积分的计算[78]

习题 14-4[81]

第五节 第一类曲面积分的计算 [81]

一、曲面面积的计算[81] 二、第一类曲面积分的计算[83]

习题 14-5[86]

第六节 第二类曲线积分 [87]

一、第二类曲线积分的概念[87] 二、第二类曲线积分的计算[89] 三、两类曲线积分之间的联系[92]

习题 14-6[93]

第七节 第二类曲面积分 [94]

一、第二类曲面积分的概念[94] 二、第二类曲面积分的计算[97] 三、两类曲面积分之间的联系[100]

习题 14-7[101]

第八节 格林公式及其应用 [102]

一、格林(Green)公式[102] 二、平面上曲线积分与路径无关的条件[104] 三、二元函数的全微分求积[105]

习题 14-8[108]

第九节 高斯公式 通量与散度 [109]

一、高斯公式[109] 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件[111] 三、通量与散度[112]

习题 14-9[113]

* 第十节 斯托克斯公式 环流量与旋度 [114]

一、斯托克斯公式[114] 二、空间曲线积分与路径无关的条件[116] 三、环流量与旋度[117]

习题 14-10[118]

第十五章 积分学应用 [120]

第一节 元素法 [120]

第二节 平面图形的面积 [121]

一、应用定积分计算平面图形的面积[121] 二、应用二重积分计算平面图形的面积[123] 三、应用曲线积分计算平面图形的面积[123]

习题 15-2	[124]
第三节 空间立体的体积	[124]
一、应用定积分计算立体的体积	[124]
二、应用二重积分计算立体的体积	[127]
三、应用三重积分计算立体的体积	[128]
习题 15-3	[128]
第四节 变力作功 液体压力 引力	[129]
一、变力作功	[129]
二、液体压力	[130]
三、* 引力	[131]
习题 15-4	[133]
第五节 重心转动惯量	[134]
一、重心	[134]
二、转动惯量	[137]
习题 15-5	[138]
* 第六节 物体的动能 冲量	[140]
一、物体的动能	[140]
二、冲量	[141]
习题 15-6	[142]
* 第七节 积分学在电学中的应用	[142]
一、交流电的平均功率	[142]
二、电势与电场强度	[143]
三、电场力及电场力作功	[144]
习题 15-7	[145]

第十六章 无穷级数 [146]

第一节 常数项级数的概念和性质	[146]
一、常数项级数的概念	[146]
二、无穷级数的基本性质	[147]
三、级数收敛的必要条件	[148]
四、柯西审敛原理	[148]
习题 16-1	[149]
第二节 常数项级数的审敛法	[150]
一、正项级数及其审敛法	[150]
二、交错级数及其审敛法	[153]
三、绝对收敛与条件收敛	[154]
习题 16-2	[155]
第三节 广义积分的审敛法 Γ 函数	[157]
一、广义积分的审敛法	[157]
二、* Γ 函数	[158]
习题 16-3	[160]
第四节 幂级数	[160]
一、函数项级数的一般概念	[160]
二、幂级数及其收敛性	[161]
三、幂级数的运算	[163]
习题 16-4	[165]
第五节 函数展开成幂级数	[165]
一、泰勒级数	[166]
二、函数展开成幂级数	[167]
三、* 欧拉公式	[170]
习题 16-5	[171]
第六节 付里叶级数	[171]
一、三角级数、三角函数系的正交性	[172]
二、以 2π 为周期的函数的付里叶级数	[173]
三、奇偶函数的付里叶展开式	[175]
四、在有限区间内函数的付里叶级数	[176]
五、周期为 $2l$ 的周期函数的付里叶级数	[178]
习题 16-6	[180]
* 第七节 付里叶级数的复数形式	[181]

第十七章 常微分方程	[183]
第一节 微分方程的基本概念	[183]
习题 17-1[184]	
第二节 可分离变量的微分方程	[185]
习题 17-2[186]	
第三节 齐次方程	[187]
一、齐次方程[187] 二、可化为齐次的方程[188]	
习题 17-3[189]	
第四节 一阶线性微分方程	[190]
一、线性方程[190] 二、贝努里方程[191]	
习题 17-4[192]	
第五节 全微分方程	[193]
习题 17-5[194]	
第六节 可降阶的高阶微分方程	[195]
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程[195] 二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程[195] 三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程[196]	
习题 17-6[198]	
第七节 线性微分方程解的结构	[199]
习题 17-7[200]	
第八节 二阶常系数齐次线性微分方程	[201]
习题 17-8[204]	
第九节 二阶常系数非齐次线性微分方程	[204]
习题 17-9[207]	
第十节 常系数非齐次线性方程的算子解法	[207]
习题 17-10[210]	
* 第十一节 欧拉方程	[211]
习题 17-11[212]	
* 第十二节 微分方程的幂级数解法	[212]
一、一阶微分方程的幂级数解法[212] 二、二阶齐次线性方程的幂级数解法[213]	
习题 17-12[214]	
* 第十三节 常系数线性微分方程组	[214]
习题 17-13[216]	
 第十八章 微分方程应用及模型	[217]
第一节 根据规律列方程类模型	[217]
一、凹镜的曲面方程[217] 二、悬链线方程[218] 三、小振幅的质点振动[219] 四、 $R-L-C$ 电路[223]	
* 第二节 微元分析法模型	[224]
一、容器漏水问题[224] 二、杆件中热的传递[225]	
* 第三节 模拟近似法模型	[226]
一、人口模型[226] 二、传染病传播模型[229]	
习题[231]	

*第十九章 数值计算初步	[232]
第一节 数值积分	[232]
一、矩形法[232] 二、梯形法[233] 三、抛物线法(辛卜生法)[233]	
四、利用幂级数计算定积分[235]	
习题 19-1[236]	
第二节 一元方程的近似解	[236]
一、对半分法[236] 二、牛顿法[237] 三、弦截法[238]	
习题 19-2[240]	
第三节 解线性方程组的迭代法	[240]
一、雅可比迭代法[240] 二、高斯——塞德尔迭代法[241] 三、松弛迭代法[242]	
习题 19-3[243]	
第四节 一阶常微分方程初值问题的数值解	[243]
一、欧拉方法[243] 二、梯形方法[243] 三、龙格—库塔法的基本思路[245]	
习题 19-4[245]	
附录 I 几种常用的曲线	[246]
附表 I 积分表	[249]
习题参考答案	[255]

第十二章 不定积分

在微分学里,我们讨论了由给定的函数求出它的导数或微分的问题.但在科学技术的许多问题中,常常需要解决和微分运算正好相反的问题,就是函数的导数已知,而要求这个函数,这种运算就叫做求原函数,也就是求不定积分.

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1 若在区间 I 内,恒有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 内的原函数.

如当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 故 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数.

从定义可知,一个函数的原函数不是唯一的,因为 $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ (C 为任意常数),所以若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则 $F(x) + C$ (C 为任意常数),也是 $f(x)$ 的原函数.反过来,由拉格朗日中值定理的推论可知,若两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,那么它们至多相差一个常数,所以, $F(x) - G(x) = C$. 因此, $f(x)$ 有一个原函数时,那么它就有无穷多个原函数,而且所有原函数都具有 $F(x) + C$ 的形式,即函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式是 $F(x) + C$. $f(x)$ 的全体原函数所组成的集合,就是函数族

$$\{F(x) + C \mid -\infty < C < +\infty\}.$$

定义 2 函数 $f(x)$ 的全体原函数叫做 $f(x)$ 的不定积分,记作

$$\int f(x)dx$$

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

函数 $f(x)$ 具备什么条件,能保证它的原函数一定存在呢? 我们有以下结论.

定理(原函数存在定理) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续,那么在区间 I 内存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

简言之,连续函数一定有原函数.

由不定积分的定义可知,若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 内的原函数,则不定积分 $\int f(x)dx$ 可表为

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例1 求下列不定积分

(1) $\int x dx$; (2) $\int e^x dx$.

解 (1) 因为 $(\frac{1}{2}x^2)' = x$, 所以 $\frac{1}{2}x^2$ 是 x 的一个原函数, 因此

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(2) 因为 $(e^x)' = e^x$, 所以 e^x 是 e^x 的一个原函数, 因此

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

例2 设曲线通过点 $(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y = f(x)$. 按题设, 曲线上任一点 (x, y) 处的切线斜率有

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因此 $\int 2x dx = x^2 + C$

故必有某个常数 C 使 $f(x) = x^2 + C$, 即曲线方程为 $y = x^2 + C$. 因所求曲线通过点 $(1, 2)$, 故

$$2 = 1 + C, \quad C = 1$$

于是所求曲线为

$$y = x^2 + 1.$$

由例2可以看出, 根据不定积分的定义, 切线斜率为 $2x$ 的全部曲线是

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

即曲线族

$$y = x^2 + C \quad (1)$$

对于任意常数 C 的每个确定的值 C_0 (例如 $-1, 1, 0, \frac{1}{2}$ 等), 就得到函数 $2x$ 的一个确定的原函数, 也就是一条确定的抛物线 $y = x^2 + C_0$. 在例2中所求的曲线通过点 $(1, 2)$, 把 $x=1$ 时 $y=2$ 代入(1)式得 $C=1$, 于是所求的曲线为 $y = x^2 + 1$.

在抛物线族(1)中, 任意两条曲线沿 y 轴方向只差一个常数, 即曲线族中任一条抛物线可由另一条抛物线沿 y 轴方向平移而得到.

一般地, 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 在几何上就表示一族曲线

$$y = F(x) + C \quad (2)$$

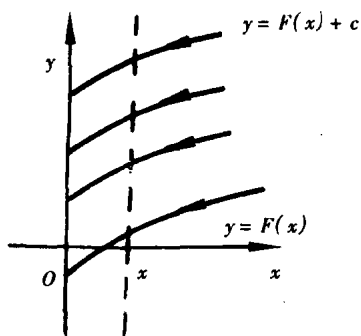


图 12-1

叫做 $f(x)$ 的积分曲线族, 当 C 每取一个值 C_0 , 就得到一条确定的积分曲线 $y = F(x) + C_0$. 在积分曲线族(2)中, 每一条积分曲线在任何一点 x 处切线的斜率都等于 $f(x)$, 而且任意两条积分曲线沿 y 轴方向只差一个常数. 所以任一条积分曲线都可以由另一条积分曲线沿 y 轴方向平移而得到(图 12-1).

二、基本积分公式表

由不定积分的定义和导数的基本公式可以得到相应的基本积分公式.

例如, 因为 $(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1})' = x^{\mu}$, 所以 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^{μ} 的一个原函数, 于是

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 现将基本积分公式列表如下:

1. $\int k dx = kx + C$ (k 是常数),
2. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$),
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$,
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$,
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$,
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$,
11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$,
12. $\int e^x dx = e^x + C$,
13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$,
15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$.

以上公式是求不定积分的基础,必须熟记.下面举例说明幂函数的积分公式的用法.

例3 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{1}{x^2} dx; \quad (2) \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx.$$

解 (1) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$

要验证积分结果是否正确,只要对结果求导,看是否等于被积函数就行了.例3表明,对某些分式或根式函数求积分,可先把它们化为 x^μ 的形式,然后用幂函数的积分公式求解.

三、不定积分的性质

由不定积分的定义,可以得到下列性质.

性质1

$$(1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ 或 } d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

证 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,即 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

所以

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

或

$$d \left(\int f(x) dx \right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x) dx.$$

同理可证另外两个等式.

性质1表明:微分运算(以记号 d 表示)与求不定积分的运算(简称积分运算,以记号 $\int$ 表示)是互逆的,也就是说,积分和微分互为逆运算.当记号 $\int$ 与 d 连在一起时,或者抵消,或者抵消后差一个常数.

性质2 求不定积分时,被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来,即

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ 为常数}, k \neq 0).$$

性质3 函数的和的不定积分等于各个函数的不定积分的和,即

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (3)$$

(3)式右端是 $f(x)+g(x)$ 的原函数. 又(3)式右端有两个积分号,形式上含有两个任意常数,由于任意常数之和仍为任意常数,故实际上含一个任意常数,因此(3)式右端是 $f(x)+g(x)$ 的不定积分.

性质 3 可以推广到性质 4.

性质 4 有限个函数的代数和的不定积分等于各个函数的不定积分的代数和,即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \cdots \pm \int f_n(x) dx.$$

性质 2——性质 4 请读者自己作为练习,证明它们的正确性.

利用基本积分公式表和不定积分的性质,可以求出一些简单函数的不定积分.这种积分方法通常叫做直接积分法.

例 4 求 $\int \left(10^x - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2} \sin x \right) dx$.

解 由不定积分的性质 2、3 及基本公式,得

$$\begin{aligned} \int \left(10^x - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2} \sin x \right) dx &= \int 10^x dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2} \int \sin x dx \\ &= \frac{1}{\ln 10} 10^x - \frac{1}{2} \arcsin x - \sqrt{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

例 5 求 $\int 2^x e^x dx$.

解 因为 $2^x e^x = (2e)^x$, 所以把 $2e$ 看作 a , 并利用积分公式 13, 便得

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C.$$

例 6 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解 基本积分公式表中没有这种类型的积分,我们可以先把被积函数变形,化为表中所列类型的积分之后,再逐项求积分:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1) + 1}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C. \end{aligned}$$

例 7 求 $\int \left(\tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$.

解 基本积分公式表中没有这种类型的积分,先利用三角恒等式变形,然后再求积分:

$$\begin{aligned} \int \left(\tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx &= \int \left(\sec^2 x - 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2} \right)^2} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1 + 4 \csc^2 x) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx + 4 \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - x - 4 \cot x + C. \end{aligned}$$

例 8 一根 4m 长的非均匀铁棒的密度为

$$\rho(x) = 2\sqrt{x}$$

这里 x 是从左端量起的棒长,密度的单位是 kgm. (a) 求从左端算起长为 x 的这一段棒的质量. (b) 求棒的总质量.

解 (a) 由于密度是质量 μ 的变化率,故

$$\rho = \frac{d\mu}{dx} \text{ 或 } \mu(x) = \int \rho(x) dx$$

从而
$$\mu(x) = \int 2\sqrt{x} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

又棒长为 0 时,其质量为 0,即 $\mu(0) = 0$,因而 $C = 0$,故

$$\mu(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \text{ (kg)}.$$

(b) 当 $x=4$ 时, $\mu(4) = \frac{4}{3}4^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}(\text{kg})$

这就是棒的总质量.

习 题 12-1

1. 求下列不定积分:

- | | |
|--|---|
| (1) $\int \frac{dx}{x^2};$ | (2) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx;$ |
| (3) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}};$ | (4) $\int \sqrt[n]{x^n} dx;$ |
| (5) $\int 5x^3 dx;$ | (6) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数});$ |
| (7) $\int (x-2)^2 dx;$ | (8) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx;$ |
| (9) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$ | (10) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$ |
| (11) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx;$ | (12) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx;$ |
| (13) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx;$ | (14) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$ |
| (15) $\int \sec x (\sec x - \tan x) dx;$ | (16) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ |
| (17) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x};$ | (18) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$ |
| (19) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$ | (20) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$ |

2. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

3. 一物体由静止开始运动, 在 t 秒末的速度是 $3t^2(\text{m/s})$, 问:

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360m 需要多少时间?

4. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 试证:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

($a \neq 0, C$ 是任意常数).

5. 设 $f'(\tan^2 x) = \sec^2 x$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$.

第二节 换元积分法

利用基本积分公式与不定积分的性质所能计算的不定积分是非常有限的, 所以有必要进一步研究不定积分的求法, 本节我们先研究通过适当的变量代换, 将被积函数化简后再积分的办法, 即所谓的换元积分法则, 简称“换元法”, 或“置换法”. 换元积分法又分为第一类换元法和第二类换元法, 分别介绍如下.

一、第一类换元法(凑微分法)

定理 1 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u=\varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)} = [F(u)]_{u=\varphi(x)} + C = F[\varphi(x)] + C. \quad (1)$$

证明 设 $G(x)=F[\varphi(x)]+C$, 利用复合函数求导法则, 得

$$G'(x) = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)u' = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

即 $G(x)=F[\varphi(x)]+C$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的不定积分, 所以有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C.$$

从定理 1 我们看到, 如果要求的积分可以表示为(1)式左边的形式, 则令 $u=\varphi(x)$, 就化为 $f(u)$ 对 u 的积分, 积分后再把 u 换成 $\varphi(x)$ 即可.

不难看出, 上述法则实质上就是复合函数微分运算的逆运算, 即由 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 来求原函数 $F[\varphi(x)]$ 的问题. 因此, 有时也说第一类换元法在上述意义下是复合函数的积分法则. 下面举例说明这种法则的具体应用.

例 1 求 $\int (3x+5)^4 dx$.

解 用二项式定理把被积函数展开后, 再逐项求积分太麻烦, 若使用换元法就简单多了. 为此, 令 $u=3x+5$, 则 $du=3dx$, $dx=\frac{1}{3}du$

于是

$$\begin{aligned} \int (3x+5)^4 dx &= \int u^4 \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{15} u^5 + C \\ &= \frac{1}{15} (3x+5)^5 + C. \end{aligned}$$

一般地, 对于积分 $\int f(ax+b)dx$, 总可作变换 $u=ax+b$, 把它化为

$$\int f(ax+b)dx = \int \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} \left[\int f(u)du \right]_{u=ax+b}.$$

例 2 求 $\int x^2 e^{x^3} dx$.

解 设 $u=x^3$, 则 $du=3x^2 dx$, 即 $x^2 dx = \frac{1}{3} du$, 因此,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{x^3} dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C \\ &= \frac{1}{3} e^{x^3} + C. \end{aligned}$$

一般地, 对于积分 $\int x^{n-1} f(x^n) dx$, 总可作变换 $u=x^n$, 把它化为

$$\int x^{n-1} f(x^n) dx = \int \frac{1}{n} f(x^n) dx^n = \frac{1}{n} \left[\int f(u)du \right]_{u=x^n}.$$

例 3 求 $\int \lg x dx$.

解 $\int \lg x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

因为 $-\sin x dx = d\cos x$, 所以如果我们令 $u=\cos x$, 则 $du=-\sin x dx$, 因此

$$\int \lg x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

同理可得

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

一般地, 对于积分 $\int \sin x f(\cos x) dx$ (或 $\int \cos x f(\sin x) dx$) 总可作变换 $u=\cos x$ (或 $u=\sin x$), 把它化为

$$\int \sin x f(\cos x) dx = - \int f(\cos x) d\cos x = - \left[\int f(u)du \right]_{u=\cos x}$$

或
$$\int \cos x f(\sin x) dx = \int f(\sin x) d\sin x = \left[\int f(u) du \right]_{u=\sin x}.$$

当我们对变量代换比较熟练以后,就不一定写出中间变量 u ,而可以直接用所谓“凑微分”的方法来计算结果.因此,有时把第一类换元法又称作“凑微分”法.

例 4 求 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$

解
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \int \frac{1}{a} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

在例 4 中,实际上用了变量代换 $u = \frac{x}{a}$,并在求出了积分 $\frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2}$ 之后,代回了原积分变量 x ,只是没有把这些步骤写出来而已.

例 5 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

例 6 求 $\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$

解 由于 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right),$

所以
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right] \\ &= \frac{1}{2a} [\ln(x-a) - \ln(x+a)] + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

类似地,可得

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

例 7 求 $\int \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \cos(\sqrt{x+1}) d(\sqrt{x+1}) \\ &= 2 \sin(\sqrt{x+1}) + C. \end{aligned}$$

例 8 求 $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

解
$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d\ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

通过前面的例子看到,在求不定积分时,首先要与已知的基本积分公式相对比,并利用简单的变量代换,把要求的积分“凑成”公式中已有的形式,求出以后,再把原来的变量代回.

下面介绍一些先用三角恒等式变形,然后用凑微分法求积分的题.

利用积化和差公式可求形如 $\int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \sin nx dx$ (其中 $m \neq n$) 的不定积分.

例 9 求 $\int \cos x \cos \frac{x}{2} dx.$

解 因为 $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)],$

所以 $\cos x \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2}x \right)$.

于是

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2}x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{3}{2}x dx \\ &= \int \cos \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} \int \cos \frac{3}{2}x d\left(\frac{3}{2}x\right) \\ &= \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}x + C. \end{aligned}$$

利用倍角公式和半角公式作恒等变形后,再求不定积分.

例 10 求 $\int \sin^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

类似地可得 $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

例 11 求 $\int \csc x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

因为

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \operatorname{ctg} x,$$

所以上述不定积分又可表为:

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

类似地可得 $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$.

例 12 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (\sin^2 x - 2 \sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$

在求形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx (m \neq n)$ 的不定积分时,若 m, n 至少一个为奇数,则可用例 12 类似的方法求出不定积分;若 m, n 均为偶数,则只能用例 10 类似的方法降次后,再求一个形如 $\int \cos kx dx$ 的不定积分.

用第一类换元法求不定积分,具有较大的灵活性,它比用复合函数求导法则求函数的导数要困难得多,如何适当地选择变量代换 $u = \varphi(x)$ 没有一般途径可循.往往因所采用的方法不

同,而得到的结果形式上完全不一样,检验其是否正确可以看其导数是否等于被积函数.因此,要掌握换元积分法,除了熟悉一些典型的例子外,还要做较多的练习才行.

二、第二类换元法

下面介绍第二类换元法.实际上,第二类换元法是沿着第一类换元法相反的路线进行的,即是说,有时我们不易直接求出 $\int f(x)dx$,但适当地引进变换 $x=\varphi(t)$,将原积分变成 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$,而后者则容易求积分,最后在关于 t 的原函数 $F(t)$ 中,用 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代回变量 x ,便得到所要求的积分.

对前面的例 5 可以按第二类换元法重解如下:令 $x=asint$,则 $dx=acostdt$,因此,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{acostdt}{acost} = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

应该说明的是,在使用第二类换元法求积分时,所用的代换 $x=\varphi(t)$ 应满足以下条件.

首先,所用代换应保证 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的不定积分存在;其次,由于在上述积分过程的最后一步,要用代换 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代回去,因此所用代换 $x=\varphi(t)$ 必须保证它的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在.这就要求 $x=\varphi(t)$ 在 t 的某个区间(这个区间和所考虑的 x 的积分区间相对应)上是单调的、可导的,并具 $\varphi'(t) \neq 0$.

综上所述,我们给出下面的定理.

定理 2 设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数,并且 $\varphi'(t) \neq 0$,又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数,则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad (2)$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

证 设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$,令 $F(x)=\Phi[\varphi^{-1}(x)]$,利用复合函数的求导法则及反函数的导数公式,得到

$$F'(x) = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.所以有

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= F(x) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C \\ &= \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)} \end{aligned}$$

这就证明了公式(2).

例 13 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ ($a>0$).

解 求这个积分困难在于有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$,但我们可以利用三角公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

来化去根式.

设 $x=asint$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$),那么 $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = acost$, $dx=acostdt$,于是根式化成了三角函数式,所求积分为

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int acostacostdt = a^2 \int \cos^2 tdt$$

利用例 10 的结果得

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t \cos t + C.$$

由于 $x=asint$,所以 $t=\arcsin \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$