振动学导论

中国科学院
电子学研究所

振動學導論

亨利、斯密特博士 著

建築工程出版社

内容提要 本书主要介紹振动問題的基本原理，說理清楚，導导公式务求詳尽。內容有质点振动、綫性諧和振动器、諧和振动的迭合、振动过程与复数、一般諧和振动器、李薩茹振动曲綫、阻尼振动、在外力下的諧和振动器以及共振现象等，是一本有志鉆研振动学者的必讀书。

原本說明

书　　名	Einführung in die Schwingungslehre
著　　者	Prof. Dr. Harry Schmidt
出 版 者	Verlag technik berlin
出版地点及年份	Berlin—1952

振 动 学 导 論

曹 宇 平 譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第 052 号）

建筑工程出版社印刷廠印刷・新華書店發行

書号 807　62千字　787×1092 1/32　印張 3

1958年6月第1版　　1958年6月第1次印刷

印數：1—5735冊　　定價(10)0.48元

目 录

振动学導論

曹宇平譯

建筑工程出版社出版
·1958·

內容提要 本书主要介紹振动問題的基本原理，說理清楚，導导公式务求詳尽。內容有質点振动、綫性諧和振动器、諧和振动的迭合、振动过程与复数、一般諧和振动器、李薩茹振动曲綫、阻尼振动、在外力下的諧和振动器以及共振现象等，是一本有志鉆研振动学者的必讀书。

原本說明

书　　名	Einführung in die Schwingungslehre
著　　者	Prof. Dr. Harry Schmidt
出 版 者	Verlag technik berlin
出版地点及年份	Berlin—1952

振 动 学 导 論

賈 宇 平 譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）
（北京市書刊出版業營業許可証出字第052号）
建筑工程出版社印刷厂印刷・新華書店發行

書号 807　62千字　787×1092 1/32　印張 3
1958年6月第1版　1958年6月第1次印刷
印數：1—5,715冊　定價(10)0.48元

目　　录

1. 質点的振動

在研討已知力系作用下质点系的运动和平衡状态的一般性力学問題时，如果容許将所研討的体系用一个质点来代替，我們就能够忽略它的空間大小，使之变为一种特别簡单的形式。如果人們能够建立一个空間的直角坐标系，用它的坐标来确定质点在我們所观察的时間 t 内的任何位置，那末，就可以把一个质点的运动明显地描述出来；也就是說，用 x、y 与 z 表达的坐标，必适合下列在已知区間内为时間 t 之函数的三个方程式：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \tag{1.1}$$

特别是当运动沿直綫进行时，我們应适当地选择 x 軸作为該质点的軌迹，而将式(1.1)簡化为：

$$x=x(t)。 \tag{1.11}$$

現在举一个例題来說明，为什么对一个已經装配好了的东西，在研討它的运动的时候，用一个质点来代替它是完全洽当的。試考察一个嵌牢其頂末端而处于平衡状态的鉛垂向悬挂着的螺旋弹簧，在它的下面挂一质量为 m 的物体；此外，如图1所示，并安装了一枚很輕的指針，它的尖端能够沿着一根垂直設置的标尺移动。当时刻 $t=0$ 时，在原有的物体上附加一增量 μ，形成了一个运动，要描写发生在这个运动过程中的所有单独情况，自然是相当困难的。如果我們注意到指針的尖端，也在連带着沿标尺作直綫运动，就不难立即从这个主要的特点来掌握这个运动。据此設想，于是在研討弹簧运动实质

的时候，我們不妨把标尺視为一根正向是从上到下的 x 軸，这样，就可利用式(1.11)，来获得一个足够令我們滿意的答案。

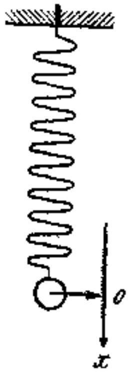
图 1

不計較弹簧的自重，我們把弹簧仅在質量 m 的作用下使得指針指向 $x=0$ 时的情况，叫做平衡状态Ⅰ，此时，如将 g 理解为重力加速度，則物体的重量 $m\times g$ 将被一方向与之相反而大小相等的张力所平衡；如果弹簧在質量 $m+\mu$ 联合作用下，使得指針指向 $x=x_0>0$，我們便說这是平衡状态Ⅱ。現在，在質量 m 上突然增加一个增量 μ，由于增添了 $\mu\times g$ 后的重量不可能被在状态Ⅰ具有的弹性力所平衡，于是便产生了使体系运动的加速度，形成一个从状态Ⅰ經过状态Ⅱ的运动。这时，指針开始沿着标尺以不断增加的速度向下滑移，同时可以明显地看到弹簧也在逐漸的伸长。随着弹簧的形变使得对抗重量的张力不断增加，也就促使了加速度的逐漸減小，当指針指向标尺刻度 $x=x_0$ 而运动进入到状态Ⅱ时，弹簧张力恰巧与重量 $(m+\mu)\times g$ 相等，在这个瞬間加速度虽然为零，但速度却取得最大值，根据慣性定律，这时的运动幷不会因加速度的消失而告終。不过从此之后，由于弹性力的継續增大，却在与以前相反的方向出现一个朝上的加速度，致使下降速度在指針降至最低点 $x=x_1$ 时变为零；在此瞬間，弹性力已超过配置在弹簧上的重量，因之指針不得不轉而上升，当重新回轉到平衡位置 $x=x_0$ 时，由于上升速度达到最大值，自然也就难在此保持靜止。推过此以后，发生重量压倒正在不断衰減的弹性力现象，这就使得在指針到达一最高点 $x=x_2$ 后，不得不随即又出现一个向下的运动。

上面所說的运动过程的各个片段，我們也可以用能量理

論来解释。原来处于平衡状态的体系，給予增量μ后就在位能方面得到了一个增长，在向下运动时轉变为动能。能量除轉化为动能外，也消耗于其它的方面，特别是在空气的阻力和弹性物質的內摩擦方面，不过在这方面的損失实际上并不重要，所以可置之不論。于是当运动进入到与状态Ⅱ符合的平衡位置$x=x_0$这个瞬間，我們可認为运动体系已将刚开始运动时具有的位能，毫无損失地轉化为动能了。指針經过状态Ⅱ的平衡位置后継續下沉，从速度的减小可以体会到动能是在消耗着轉化为与其值相等的位能，这个事实我們也可用与能量有密切关系的弹性力的增大来証明。在指針下降至最低点$x=x_1$时，关于动能的变换暂告一段落，刚开始运动时能量是以重量位能的形式出現，然而现在是以弹性力位能的形式全部将它保留在体系中。在向上运动的整个过程里，能量的变換正好与以上所述的情形相反：弹性力位能逐漸減小轉化成为动能，一直积累到平衡位置$x=x_0$为止，过此之后重又改变成为位能。以上所描写的有关能量传递这回事，是假定在沒有任何損失的情况下进行的，所以指針的最高点$x=x_2$自然永远不会与表示平衡状态Ⅰ的点$x=0$重合。至此我們可以作出結論，这个运动的継續进行，是在无休止地重演上述的过程，用通俗的話来說，就是弹簧在作一个振动性的运动。

上面是单純凭直觉来解释运动的，而现在我們要用(1.11)的函数式$x=x(t)$来刻画我們曾經深刻考虑了的运动过程。根据刚才的分析，我們知道在这种运动的过程中，时間依照一定的规律有顺序地組成一速串相同的我們将命名为周期T的时間間隔。对应着这些間隔，如果我們只选择在区間$0\leqq x\leqq x_1$內的坐标值x来討論，一定会注意到其經常地重复出现的情况。反映这种情况的$f(t)$，如只想用一个明显的，众所周知

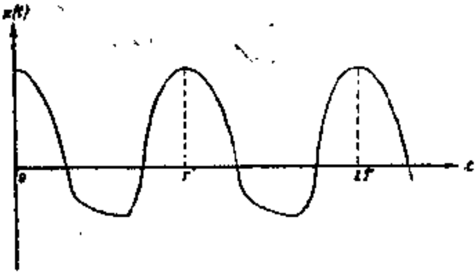

图 2

的初等函数来表达,不管从那方面讲,当然是絕对不可能实现的。这也就告訴了我們,对每一个 $t\geqq 0$ 的値和每一个正整数 v,倘能将它們組織成为一个具有周期 T 的关系时間 t 的周期函数

$$x(t+v\times T)=x(t)\quad , \tag{1.2}$$

才足以描繪运动的过程。由不断重复且形状相同的綫段构成一个周期函数的图象,是一条連續延伸的曲綫(参考图 2),一个质点沿着直綫所作的振动运动,我們恒能从它来获得一个明晰的概念。

周期函数最簡单之例为三角函数 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$,讀者当早已熟知周期为 2π 的函数表达式是:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\varphi\pm v\times 2\pi)&=\sin\varphi\\ \cos(\varphi\pm v\times 2\pi)&=\cos\varphi\end{aligned}\right\}\quad(v=1,2,3,\cdots\cdots) \tag{1.3}$$

对目前所討論的直綫运动可用方程式

$$x=a\times\sin\omega t \tag{1.4}$$

来描写,其中 $a>0$ 与 $\omega>0$ 均为常数。針对这个式子,固然可以在与质点 M 运动相一致的 x 軸上任意选定一点作为运动的开端,然而在这里我們是用质点在瞬間 $t=0$ 时的那点为始点的(参考图3)。现在我們根据方程(1.4)来分析质点运动

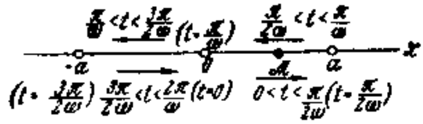

图 3

之过程：首先因为 $\sin\varphi$ 在区間 $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ 上是自变量 φ 的单调增函数，所以 x 在这个区間內将随着时間 $t>0$ 的递增而增加，由于当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时函数有极大値 $\sin\varphi=1$，因之質点 M 可达到的最大位置为 $x=a$，如果要使得 $\omega\times t=\frac{\pi}{2}$，很明显这时的时間是 $t=\frac{\pi}{2\omega}$。此后倘継續增加 t 則 x 就将减小，当 $\omega\cdot t=\pi$ 也就是当瞬間 $t=\frac{\pi}{\omega}$ 时，質点占有 x 軸的零点。再因为 $\sin\varphi$ 在区間 $\pi\leqq\varphi\leqq2\pi$ 上取得的有序数値只不过与在区間 $0\leqq\varphi\leqq\pi$ 上的相反一个符号，因此我們对于运动过程 $\pi\leqq\omega\times t\leqq2\pi$ 或者 $\frac{\pi}{\omega}\leqq t\leqq\frac{2\pi}{\omega}$ 可以視为是在 x 軸的負側进行的，其一切情况与質点在时間 $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{\omega}$ 內沿 x 軸正側的运动相同。因之当 $t=\frac{3\pi}{2\omega}$ 时有 $x=-a$，当 $t=\frac{2\pi}{\omega}$ 时重又回到运动的始点 $x=0$。由上面的分析幷結合到正弦函数的周期性，就会理解到这种运动是永无休止的，以不变的程序一而再地重复[illegible]整个运动过程的。質点 M 沿 x 軸在 $x=a$ 与 $x=-a$ 兩点之間循环往[illegible]移动，不难知道其对应于点 $x=a$ 的瞬时为 $t=\frac{\pi}{2\omega}+v\times\frac{2\pi}{\omega}$，反之，对应于点 $x=-a$ 的为 $t=\frac{3\pi}{2\omega}+v\times\frac{2\pi}{\omega}$，其中 $v=0,1,2,\cdots\cdots$。永恒地往返于上述两点

之間的运动,其正負区間的划分是以始点 $x=0$ 为标准的。質点从左到右隨即又从右到左地穿梭移动，如果就以該点来計算每次起迄的时間，不难想见这时开始时刻可写为 $t=v\times\frac{2\pi}{\omega}$，終止时刻可写为 $\frac{\pi}{\omega}+v\times\frac{2\pi}{\omega}$。最后,我們以 t 为横坐标,x 为纵坐标,繪制函数(1.4)的曲綫于图 4,于是由本段文字所揭露的一切事实就了然于紙上了。

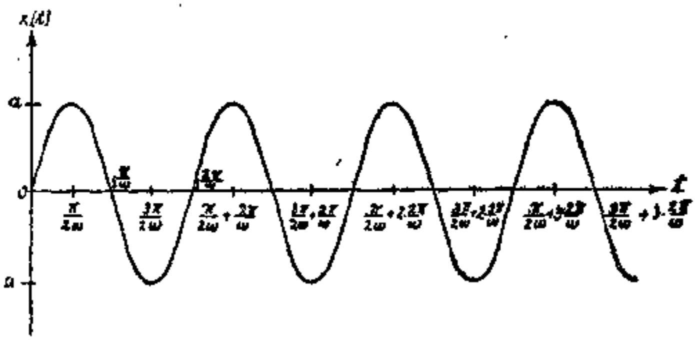

图 4

刚才我們討論过的运动过程，只是振动现象的一个最簡单的情形,一般称之为諧(和)振动。我們时常把 $x=x(t)$ 叫做在时間 t 的延伸，$\varphi=\varphi(t)=\omega\times t$ 叫做在时間 t 的相。在(1.4)中的量 a 是延伸之最大值，我們称为振幅，用它来度量質点运动可能达到的至始点 $x=0$ 的最大距离之长度。質点往返一次作成一个完整的振动,其所需要的时間 T 叫做振动时限或者振动的周期,显然其值为:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \tag{1.41}$$

由此

$$\omega = \frac{2\pi}{T}。 \tag{1.42}$$

量 ω 說明了在 2π 秒的时間內形成完整振动的次数，我們叫它做圓頻率；所謂頻率或振动数就是每一秒鈡內完整振动之次数，其値为：

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \tag{1.43}$$

頻率視实际情况用赫芝或仟赫芝来度量(1赫芝＝每秒作1次完整振动；1仟赫芝＝每秒作1000次完整振动)。

也可以用方程式

$$x = a \times \cos\omega t, \tag{1.5}$$

来代替(1.4)所描繪的諧和振动，因为由 $\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ 可把上式写成：

$$x = a \times \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.51}$$

它与(1.4)不同之点，只是将相扩大了数 $\frac{\pi}{2}$ 而已，所以在对照(1.4)来談(1.5)时，人們都一致認为描写諧和振动的(1.5)具有相位移 $\frac{\pi}{2}$。若专以(1.51)而論，这时的相是 $\varphi = \varphi(t) = \omega t + \frac{\pi}{2}$，因为 $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$，所以在这里我們叫 $\frac{\pi}{2}$ 为初相或相常量。将周期函数从最簡单的推演和扩展到一般的情况里去，事先有两点値得在此加以說明：周期为 π 的周期函数 $\operatorname{tg}\varphi$ 与 $\operatorname{ctg}\varphi$，由于它們各在点 $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm v\pi$ 与点 $\varphi = \pm v \times \pi$ 发生間断，因此，显然难用它們来描写質点的运动，这种函数今后自

可不予考虑；此外，为了能更明朗地揭露諧和振动的实质，必須具体而全面地来詳細討論它。在以后我們将針对实际情况，根据給出的已知条件，作出正弦与余弦函数的綫形組合，来取得为我們所需要的任何一个連續的周期函数。

到目前为止，对上述那样簡单的运动过程，我們是已用上了"振动"这个字眼——很自然地提出的；对于这个振动，由于我們是尽可能地从直观方面着手去認識它的特性，并結合了数学的分析，从而作出透徹的理解，自然，由此所获得的概念是正确且科学的。任何一个可以用时間的周期函数来描写的物理量，我們都称之为振动，这个定义在理論上是属于一般性的。其变化现象符合于这个定义的量，几乎遍布于物理学以及工程研究領域內的每一个角落，因之这个泛指一般情况的定义实具有多方面的原則性意义，固然被研究的量其情况极为复杂，变化也各式各样，然而人們总是从具体情形来进行分析，抽象出其純淨的內容，找出它們的共同特征，这样就可将量的变化一一归結为时間过程循环的問題了。所以我們在第一节中分两方面来叙述，举出了一个簡单易懂的質点振动的实例，并指出了其基本的重点以后，在作結語之前，我們仍应轉向于振动过程組成实質的闡述。

为此，我們再一次地来分析由(1.4)刻划的質点振动运动。質点速度 $v=v(t)$ 的关系式显然为：

$$v(t)=x'(t)=a\times\omega\times\cos\omega t, \tag{1.6}$$

也可写成

$$v(t)=a\times\omega\times\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \tag{1.61}$$

由此知道一个諧和振动的速度也是或强或弱地調和进行的，与速度相应的加速度 $b=b(t)$ 为：

$$b(t)=x''(t)=-a\times\omega^2\times\sin(\omega\times t), \quad (1.62)$$

因为$-\sin\varphi=\sin(\varphi+\pi)$，所以

$$b(t)=a\times\omega^2\times\sin(\omega\times t+\pi)。\quad (1.63)$$

至此，我們作出小結，对延伸来說，一个諧和振动的速度具有初相$\frac{\pi}{2}$，而加速度具有初相π。作为时間t的函数的諧和振动，其延伸$x(t)$、速度$v(t)$以及加速度$b(t)$三者之間的关系，可用图5所示的曲綫来表示。讀者不难由此获得一个較深刻的印象。

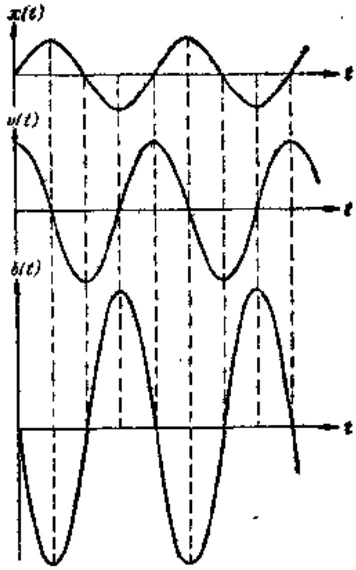

图 5

2. 綫性諧和振动器

在上一节❶里我們已闡述了有关諧和振动特性方面的主要概念，现在我們要提出一个問題：象这样的一个振动运动在物理学上是怎样处理的？解答这个問題的首要关鍵，实系于刻画运动的(1.4)

$$x=x(t)=a\times\sin\omega t \quad (2.1)$$

的加速度$b(t)$，上式对时間t的二次导数是：

❶ 這里用節不用章，全書共分十一節——譯者。