

# 电磁场与波

冯恩信 编著



西安交通大学出版社

52.6122  
649

# 电磁场与波

冯恩信 编著

西安交通大学出版社

DL49/12  
内 容 提 要

本书系统地介绍了电磁场与电磁波理论和分析方法,内容共分8章:矢量场;静电场;恒定电流场;恒定磁场;时变电磁场;平面电磁波;导行电磁波;电磁辐射与天线。

本书适于作为高等学校弱电类各相关专业,如通信、电子等专业的教材,也可作为从事相关专业工作的科技人员的参考书。

(陕)新登字007号

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与波/冯恩信编著. - 西安:西安交通大学出版社, 1999.8

ISBN7-5605-1147-3

I. 电… II. 冯… III. ①电磁场 ②电磁波 IV. 0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32136号

\*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

\*

开本:787mm×1092mm 印张:16.375 字数:392千字

1999年9月第1版 1999年9月第1次印刷

印数:0 001~1 500 定价:20.00元

---

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357,2667874

# 前 言

电磁场与波是通信及电子类专业学生的一门很重要的技术基础课。与电路理论一样，电磁场与波理论是从事电气与电子技术领域工作的科技工作者的必备知识。随着电工与电子科学的飞速发展，尤其是电子计算机运行速度和通信传输速率的不断增加，电力电子设备数量不断增多及技术性能不断提高，要求电子工程师必须具备宽广的电磁理论知识。

电磁理论是人类探索自然活动的结晶和宝贵财富。人类认识电磁运动规律的道路是漫长而曲折的。早在两千多年前，人类就有了有关磁石和摩擦起电的知识，我们祖先发明的指南针，为人类文明作出了不朽的贡献。但是，对电磁现象进行系统地上升为理论的研究并加以应用则是18世纪中叶以来，特别是19世纪中叶以后的事情。1771~1773年，卡文迪许(Henry Cavendish, 1731~1810年)进行著名的静电实验及库仑(Charles - Augustin de Coulomb, 1736~1806年)于1785年建立的关于静电和静磁的平方反比定律标志着电学和磁学定量研究的开始。此后，人们对电和磁现象进行了大量的观察和实验研究，其中最著名的是伽伐尼(L. Galvani, 1737~1798年)在解剖青蛙时注意到青蛙腿的痉挛现象，从而发现电流，以及伏打(Alessandro Volt, 1745~1827年)用电化学方法产生了稳定的电流(即伏打电池)。随后，欧姆(Georg Simon Ohm, 1789~1854年)和基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824~1887年)分别建立了后来以他们名字命名的电路定律。在很长的时期内，人们把电和磁看成相互独立的现象，并不知道它们之间有什么联系。直到1820年奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777~1851年)发现电流可使磁针偏转，即电流产生磁力，这是将电与磁联系起来研究的开端。此后，1825年，安培(Andre Marie Ampere, 1775~1836年)提出了确定两电流之间相互作用及载流导体所受磁力的定律，即安培定律，毕奥(Biot)和萨伐(Savart)确定了磁场和电流之间的定量关系，即毕奥-萨伐定律。到此为止，人们一直是在静止的或恒定的状态下研究电磁现象，电磁学研究的一个重大进展是1831年法拉第(Michael Faraday, 1791~1867年)发现电磁感应现象，这是人们第一次对随时间变化的电磁场进行研究。电磁感应定律一方面推动了电磁在工程中的应用，另一方面它是电磁理论的一块基石。1864年，麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831~1879年)在总结前人发现的实验定律的基础上，进行了创造性的理论研究工作，建立了以后以他的名字命名的麦克斯韦方程组，从而创立了完整的电磁理论体系。麦克斯韦电磁理论体系的建立，是19世纪人类文明史上的重大事件，它标志着人类文明迈入了电的时代。紧随其后，1866年，西门子(William Siemens, 1823~1883年)发明了发电机。1876年，贝尔(Alexander Graham Bell, 1847~1922年)发明了电话。1879年，爱迪生(Thomas Alva Edison, 1847~1931年)发明了电灯。1888年，赫兹(Heinrich Rudolf Hertz, 1857~1894年)成功地做了电磁波实验，对麦克斯韦方程组的正确性提供了实验依据。赫兹实验后不到6年，意大利工程师马可尼(G. Marconi, 1874~1937年)和俄国的波波夫(A. S. Popov, 1859~1906年)分别实现了无线电远距离传播，并很快投入实际应用。其后，无线电报(1894年)、无线电广播

(1906年)、导航(1911年)、无线电(1916年)、短波通信(1921年)、传真(1923年)、电视(1929年)、微波通信(1933年)、雷达(1935年)以及近代的无线电遥测,遥控,卫星通信,光纤通信等如雨后春笋般涌现出来。

一个多世纪以来,由电磁学发展起来的现代电子技术已包含电力工程、电子工程、通信工程、计算机技术等多学科领域。电磁理论已广泛应用于国防、工业、农业、医疗、卫生等领域,并深入到人们的日常生活中。今天,对电磁学的成果的广泛利用程度,已成为人类社会现代化的标志之一。

电磁场与电磁波理论揭示了宏观电磁场分布及电磁波辐射和传播的基本规律和特性,介绍工程应用中电磁场与电磁波问题的基本分析和计算方法,是电路理论的生长点,是进一步深入学习和研究解决各种复杂的实际电磁场与电磁波工程应用问题的基础。电磁场与电磁波理论是体系完整的经典理论,内容丰富,概念性强,涉及空间和时间多维空间上的矢量场,使用多种数学方法,灵活而抽象。学习和掌握电磁场与电磁波理论,不仅是必要知识的积累,而且更重要的是培养形象思维和抽象思维,提高分析和解决实际工程问题的能力。尤其是提高将物理概念和数学方法结合起来,为实际工程问题建立数学模型的能力。

由于电磁场与电磁波理论的特点,初学时往往因为其理论体系简洁而满足于浅知,但当深入学习时又由于其内容丰富而抽象,使用数学工具多,方法灵活而难以掌握。因此,在学习过程中,应抓住对基本概念的理解,要在掌握基本概念的基础上理解并记忆有关公式和定理,而不是死记硬背。掌握基本概念并能灵活运用的一个十分重要的途径就是完成一定数量的习题练习,不然,难以掌握解题方法。当然,在学习的各个阶段也要注意总结和归纳,前后贯穿,这样才能进一步加深对概念的理解和对解题方法的掌握。

本书是作者在近几年的授课讲义和讲稿的基础上,结合作者参加面向21世纪电类技术基础课教学内容改革课题组讨论的思路与体会,经过进一步修改和整理编写的。适合于通信、电子和其他弱电类本专科学学生学习使用。也适合于工程技术人员自学使用。

本书包括数学基础、静态场和时变场3部分,共分8章。第1章为矢量分析基础,内容包括矢量场在几种坐标系中的表示方法、梯度、散度、旋度、格林定理、唯一性定理及亥姆霍兹定理等分析矢量场的数学基础知识;第2章为静电场,内容包括电场强度、电位、介质极化、静电场方程、静电场边界条件、导体和电容、静电场能量、电位方程解的唯一性以及分离变量法和镜像法等静电场的基本解法;第3章为恒定电流场,内容包括电流密度、恒定电流场方程、恒定电流场边界条件、损耗功率等;第4章为恒定磁场,内容包括磁感应强度、矢量磁位、媒质磁化、恒定磁场方程、恒定磁场边界条件、电磁感应定律、电感、磁场能量等;第5章为时变电磁场,内容包括麦克斯韦方程组、时变电磁场边界条件、波动方程及位函数、位函数求解、功率流密度、时变电磁场唯一性定理、正弦电磁场以及麦克斯韦方程组与电路定律的关系等;第6章为平面电磁波,内容包括理想介质和导电媒质中的平面电磁波、群速、电磁波的极化、平面电磁波垂直投射到介质平面、平面电磁波斜投射到介质平面、各向异性媒质中的平面电磁波等;第7章为导行电磁波,内容包括导波系统中的TEM波、TE波、TM波、TEM波传输线、TEM波传输线的工作状态、矩形波导、矩形波导中的 $TE_{10}$ 波、导波系统中的传输功率和损耗功率、谐振腔等;第8章为电磁辐射与天线,内容包括电流元和小电流环的辐射场、对偶原理、线天线和面天线及天线阵基础、镜像原理、互易原理等。除第1章外,各章都有小结和思考题以及一定数量的习题。最后,在附录中列出了一些常用的

公式、电磁学单位以及有关常数数据，供学习过程中参考。本书中电磁量采用SI国际单位制。

本书初稿第3、4章是由傅君眉教授编写的，其余各章由冯恩信副教授编写，经过在西安交通大学电子与信息工程学院信息与通信工程系几届学生的试用后，由冯恩信副教授修改、充实、整理完成的。在本书编写过程中，得到了领导、老师及同事的热情支持、指导和帮助，汪文秉教授、傅君眉教授和萧衍明教授一直关心支持本书的编写工作，多次与编者讨论，并提出了很多指导性的宝贵意见。尤其是萧衍明教授在本书初稿编写过程中的热情鼓励和积极支持，至今难以忘怀。马西奎教授认真审阅了书稿，提出了许多宝贵意见。在这里对他们表示诚挚的感谢。最后，还要感谢西安交通大学教务处、电子与信息工程学院领导以及出版社的领导和编辑，是他们的热情支持、资助和细致工作，才使本书得以出版。由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

编者

1999年2月

# 目 录

前 言	
第 1 章 矢量场	( 1 )
1.1 矢量及其矢量场	( 1 )
1.2 三种常用坐标系中的矢量场	( 4 )
1.3 梯度	( 7 )
1.4 矢量场的散度	( 9 )
1.5 矢量场的旋度	( 12 )
1.6 无旋场与无散场	( 14 )
1.7 格林定理	( 17 )
1.8 矢量场的唯一性定理	( 19 )
习 题	( 21 )
第 2 章 静电场	( 23 )
2.1 电场强度	( 23 )
2.2 真空中的静电场方程	( 27 )
2.3 电位	( 29 )
2.4 静电场中的介质与导体	( 33 )
2.5 介质中的静电场方程	( 36 )
2.6 静电场的边界条件	( 39 )
2.7 电位的边值问题与解的唯一性	( 42 )
2.8 分离变量法	( 44 )
2.9 镜像法	( 48 )
2.10 电容和部分电容	( 53 )
2.11 电场能量	( 55 )
2.12 电场力	( 57 )
本章小结	( 60 )
思考题	( 63 )
习 题	( 64 )
第 3 章 恒定电流场	( 69 )
3.1 电流密度	( 69 )
3.2 恒定电流场方程	( 71 )
3.3 恒定电流场的边界条件	( 73 )

3.4	能量损耗与电动势 .....	(75)
3.5	恒定电流场与静电场的比拟 .....	(76)
<b>本章小结</b> .....		(79)
<b>思考题</b> .....		(80)
<b>习 题</b> .....		(81)
<b>第 4 章 恒定磁场</b> .....		(82)
4.1	磁感应强度 .....	(82)
4.2	真空中的磁场方程 .....	(84)
4.3	媒质磁化 .....	(89)
4.4	媒质中的恒定磁场方程 .....	(91)
4.5	恒定磁场的边界条件 .....	(93)
4.6	电磁感应定律 .....	(96)
4.7	电 感 .....	(97)
4.8	磁场能量 .....	(99)
4.9	磁场力 .....	(102)
<b>本章小结</b> .....		(105)
<b>思考题</b> .....		(107)
<b>习 题</b> .....		(108)
<b>第 5 章 时变电磁场</b> .....		(110)
5.1	麦克斯韦方程组 .....	(110)
5.2	时变电磁场的边界条件 .....	(113)
5.3	波动方程与位函数 .....	(115)
5.4	位函数求解 .....	(118)
5.5	时变电磁场的唯一性定理 .....	(119)
5.6	时变电磁场的能量及功率 .....	(120)
5.7	正弦时变电磁场 .....	(123)
5.8	正弦时变电磁场中的平均能量、平均损耗功率及复功率流密度矢量 .....	(127)
5.9	从麦克斯韦方程组到基尔霍夫电压定律 .....	(131)
<b>本章小结</b> .....		(135)
<b>思考题</b> .....		(138)
<b>习 题</b> .....		(139)
<b>第 6 章 平面电磁波</b> .....		(141)
6.1	理想介质中的均匀平面电磁波 .....	(141)
6.2	导电媒质中的均匀平面电磁波 .....	(145)
6.3	群速 .....	(150)
6.4	电磁波的极化 .....	(151)
6.5	均匀平面电磁波垂直投射到理想导体表面 .....	(154)
6.6	均匀平面电磁波垂直投射到两种不同介质的分界面 .....	(156)
6.7	均匀平面电磁波垂直投射到多层媒质中 .....	(160)



6.8	均匀平面电磁波投射到两种不同介质的分界面 .....	(164)
6.9	均匀平面电磁波斜投射到理想导体表面 .....	(170)
6.10	电磁波在等离子体中的传播 .....	(172)
<b>本章小结</b> .....		(177)
<b>思考题</b> .....		(178)
<b>习 题</b> .....		(179)
<b>第 7 章 导行电磁波</b> .....		(181)
7.1	导波系统中的 TEM 波、TE 波、TM 波 .....	(182)
7.2	TEM 波传输线 .....	(184)
7.3	无损耗传输线的工作状态 .....	(189)
7.4	矩形波导 .....	(193)
7.5	TE <sub>10</sub> 波 .....	(199)
7.6	导波系统中的传输功率与损耗 .....	(205)
7.7	谐振腔 .....	(207)
<b>本章小结</b> .....		(211)
<b>思考题</b> .....		(212)
<b>习 题</b> .....		(213)
<b>第 8 章 电磁辐射与天线</b> .....		(215)
8.1	电流元的辐射场 .....	(215)
8.2	小电波环的辐射场 .....	(218)
8.3	对偶原理 .....	(220)
8.4	对称线天线的辐射场 .....	(221)
8.5	面天线的辐射场 .....	(223)
8.6	天线的基本特性 .....	(227)
8.7	天线阵 .....	(233)
8.8	镜像原理 .....	(236)
8.9	互易定理 .....	(238)
<b>本章小结</b> .....		(242)
<b>思考题</b> .....		(243)
<b>习 题</b> .....		(244)
<b>附 录</b> .....		(245)
A.	有关物理量的符号及单位 .....	(245)
B.	SI 单位制中用于构成十进倍数和分数的常用词头名称及符号 .....	(247)
C.	有关物理常数 .....	(247)
D.	矢量分析公式 .....	(247)
<b>主要参考文献</b> .....		(251)

# 第 1 章 矢 量 场

电磁理论中所涉及的一些主要物理量，如电场强度、磁感应强度等大都是有确切的物理意义并分布在空间，即与空间坐标有关的矢量场。分析矢量场在空间的分布和变化情况需要应用矢量分析和场论等数学方法。为了后面各章学习方便起见，本章先介绍分析矢量场所需的一些有关数学基础。

## 1.1 矢量及其矢量场

### 1. 矢量的表示方法

只有大小，没有方向的量叫做标量，如温度、电位、能量、长度、时间等。

不但有大小，而且有方向的量称为矢量，又称向量。如力、速度、加速度，以及电磁场中的许多物理量，像电场强度、电流密度、磁场强度等都是矢量。

矢量的数学符号为黑斜体字母，如  $A$ ,  $B$ ,  $E$ 。矢量的大小，也叫做矢量的模，矢量  $A$  的模记作  $A$  或  $|A|$ 。矢量的方向可用单位矢量表示，单位矢量是模为一个单位的矢量，它仅表示矢量的方向。矢量  $A$  的单位矢量记作  $e_a$ 。任一矢量可以用它的模和单位矢量表示，如矢量  $A$  可表示为

$$A = Ae_a \quad (1.1-1)$$

在几何上，矢量可用一有向线段表示，如图 1.1 所示。线段的长度代表矢量的大小，线段的方向表示矢量的方向。

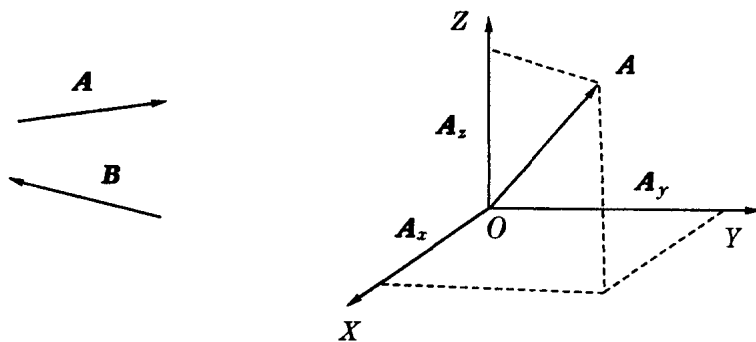


图 1.1 矢量的几何表示

图 1.2 矢量的直角坐标分量

建立了正交坐标系，使矢量的始端在坐标原点，矢量就可以用它在坐标轴上的投影表示，即坐标分量来表示。在直角坐标系中，用  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  分别表示三个坐标轴方向的单位矢量，如果矢量  $A$  在  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  三个坐标轴上的投影分别为  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ，如图 1.2 所示，则矢量  $A$  表

示为

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \quad (1.1-2)$$

$A_x, A_y, A_z$  称为矢量  $A$  的直角坐标分量。设矢量  $A$  与三个正交坐标轴  $X, Y, Z$  轴的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 显然,

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos \alpha \\ A_y &= A \cos \beta \\ A_z &= A \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

将(1.1-3)式代入(1.1-2)式并与(1.1-1)式比较, 得

$$e_a = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1.1-4)$$

上式说明单位矢量可用矢量的方向角余弦表示。

## 2. 矢量的代数运算

### (1) 矢量的加减法

两矢量之和(或差)的直角坐标分量等于两矢量的对应坐标分量的和(或差), 即

$$A \pm B = (A_x \pm B_x)e_x + (A_y \pm B_y)e_y + (A_z \pm B_z)e_z \quad (1.1-5)$$

在几何上, 两矢量的和矢量与差矢量分别与以两矢量为邻边的平行四边形的两条对角线重合, 如图 1.3 所示。矢量相加满足交换律与结合律, 即

$$A + B = B + A \quad (\text{交换律}) \quad (1.1-6)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{结合律}) \quad (1.1-7)$$

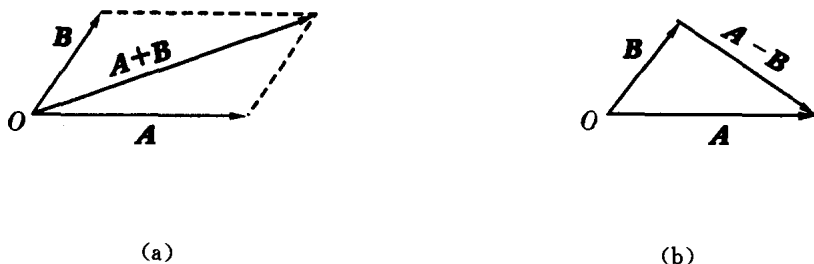


图 1.3 两矢量之和与差

(a) 两矢量之和; (b) 两矢量之差

### (2) 标量乘矢量

标量乘以矢量, 其积为矢量, 满足以下关系

$$\eta A = \eta A_x e_x + \eta A_y e_y + \eta A_z e_z \quad (1.1-8)$$

$$\eta A = \begin{cases} |\eta A| e_a, & \eta \geq 0 \\ |\eta A| (-e_a), & \eta < 0 \end{cases} \quad (1.1-9)$$

### (3) 矢量的标积

两矢量相乘其积有两种情况, 一种其积为标量, 称为标积; 另一种其积仍为矢量, 称为矢积。

两矢量  $A$  与  $B$  的标积记为  $A \cdot B$ , 因此, 标积也称作点积或点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦, 也等于两矢量的对应直角坐标分量积之和, 即

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1-10)$$

式中  $\theta$  为两矢量  $A$  与  $B$  的夹角。如果作用在某一物体上的力为  $A$ ，使该物体发生位移，位移矢量为  $B$ ，则  $A \cdot B$  表示力  $A$  使物体位移所作的功。

由(1.1-10)式可以看出，两矢量的标积满足交换律，即

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.1-11)$$

显而易见，标积不但与两矢量的大小有关，还与其之间的夹角有关。当两矢量垂直时，其标积为零；当两矢量平行时，标积的绝对值最大，等于两矢量的模之积。

当  $A=B$  时，由(1.1-10)式，得矢量的模与直角坐标分量的关系为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1-12)$$

#### (4) 矢量的矢积

两矢量  $A$  与  $B$  的矢积记为  $A \times B$ ，因此，矢积也称作叉积或叉乘。矢积是矢量，其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦，其方向为两矢量所在面的法向，即

$$A \times B = e_n |A| |B| \sin\theta \quad (1.1-13)$$

矢积的方向  $e_n$  符合右手定则，即右手四指从  $A$  旋转到  $B$ ，拇指的方向为  $e_n$  的方向，如图 1.4 所示。

矢积与两矢量的直角坐标分量的关系为

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y)e_x + (A_z B_x - A_x B_z)e_y + (A_x B_y - A_y B_x)e_z \quad (1.1-14)$$

通常，上式写成行列式形式，即

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1-15)$$

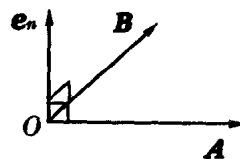


图 1.4 矢积的方向

矢积的几何意义为以两矢量为邻边的平行四边形围成的有向面。当  $B$  表示作用在一物体上的力， $A$  表示力臂矢量，则矢积表示作用给物体的力矩。

由上式可以看出，

$$A \times B = -B \times A \quad (1.1-16)$$

即矢积不满足交换律。矢积不但与两矢量的大小有关，也与它们之间的夹角有关。两矢量平行时，矢积为零；两矢量垂直时，矢积的模最大。

#### (5) 矢量的混合运算

矢量的混合运算次序与标量的混合运算次序相同。下面给出一些常用的矢量的混合运算恒等式

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (1.1-17a)$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C \quad (1.1-17b)$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1.1-17c)$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad (1.1-17d)$$

### 3. 标量场与矢量场

在火炉、暖气片等热源周围空间的每一点上，温度都是确定的，即在空间存在温度的某种分布，我们就说空间存在温度场；在江河中，各处水的流速是可确知的，水域中存在水流速的某种分布，我们就说那里存在流速场；在地球周围各点，存在对各种物体的引力，我们

说地球周围存在引力场,或者说地面上有重力场;在电荷周围各点,存在对电荷的作用力,我们就说地电荷周围有电场;……。显然,“场”是指某种物理量在空间的分布。具有标量特征的物理量在空间的分布是标量场,具有矢量特征的物理量在空间的分布是矢量场。例如,温度场是标量场,电场、流速场与重力场都是矢量场。

场是物理量的空间分布,这种物理量还可能随时间变化,因此,在数学上,场用表示其特征物理量的空间和时间坐标变量的多元函数来描述,即标量场用空间和时间的标量函数表示,矢量场用空间和时间的矢量函数表示。例如,温度场可表示为  $T(x,y,z)$ , 电位可表示为  $\Phi(x,y,z,t)$ , 流速场可表示为  $v(x,y,z,t)$ , 电场表示为  $E(x,y,z,t)$ , 磁场表示为  $B(x,y,z,t)$ 。在电磁场中,随时间变化的场称为时变场;而将与时间无关,即不随时间变化的场称为静态场,也就是说,静态场只是空间坐标的函数。例如,静电场可表示为  $E(x,y,z)$ 。

为了形象地和直观地描述标量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化,常借助于画出其一系列等值间隔的等值面方法。不同等值面的形状及其间隔能较直观地表现标量场的空间分布情况。为了形象地和直观地描述矢量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化,常借助于画出其场线(力线)的方法。场线是一簇空间有向曲线,矢量场强处场线稠密,矢量场弱处场线稀疏,场线上的切线方向代表该处矢量场方向。

场是物理量的分布,应服从因果律,其因,称之为场源。场都是由场源产生的。例如,温度场,是由热源产生的;静电场是由电荷产生的。场在空间的分布形式不但取决于产生它的场源,而且还与周围物质环境密切相关。例如,炉膛中的温度分布,不仅取决于火力大小及分布,而且还与炉膛的结构以及材料特性有关。带电体周围的电场分布不仅与带电体的电荷分布与电量有关,也与周围的物质特性有关。场与源和物质的关系可用一组微分方程描述,电磁场与其源的关系的方程就是称为麦克斯韦方程组的一组矢量偏微分方程组。

## 1.2 三种常用坐标系中的矢量场

矢量场是矢量的空间分布,是空间坐标变量的矢量函数,即在空间的每一点都有一个对应的矢量。因此,定量的分析矢量场就需要建立参考坐标系,以表示空间的位置及矢量的方向。正交曲面坐标系有多种类型,本书采用最常用的三种,即直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系。

### 1. 直角坐标系

直角坐标系是最常用的正交坐标系。在直角坐标系中,矢量场中的空间位置用其三个直角坐标表示,一般记作  $(x,y,z)$ 。

在直角坐标系中,三个相互垂直的坐标轴,即  $X$  轴、 $Y$  轴和  $Z$  轴的方向是给定的,在本书中表示三坐标轴方向的单位矢量分别用  $e_x, e_y, e_z$  表示。矢量场在每一空间位置点的对应矢量可以用其直角坐标分量表示。例如,某矢量场在任一空间位置  $(x,y,z)$  点的矢量  $A(x,y,z)$  可用其直角坐标分量表示为

$$A(x,y,z) = A_x(x,y,z)e_x + A_y(x,y,z)e_y + A_z(x,y,z)e_z \quad (1.2-1)$$

式中  $A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)$  表示将坐标轴平移到空间位置点  $(x,y,z)$  形成本地坐标系后,矢量场在该点所对应的矢量  $A(x,y,z)$  分别在本地三个坐标轴上的投影,称为坐标分量,如图 1.5 所示。以任一空间位置  $(x,y,z)$  点的矢量  $A(x,y,z)$  为代表的分布在空间的这

种矢量的全体就称为矢量场  $A(x, y, z)$ 。

从坐标原点指向空间位置点  $(x, y, z)$  的矢量，称为位置矢量  $r$ ，即

$$r = xe_x + ye_y + ze_z \quad (1.2-2)$$

可以看出，位置矢量  $r$  包含了该矢量所指空间位置点的坐标，因此也可以代表空间位置点。在电磁场中，空间位置点的坐标常写成位置矢量的形式，即(1.2-1)式常简写作

$$A(r) = A_x(r)e_x + A_y(r)e_y + A_z(r)e_z \quad (1.2-3)$$

在本书中，在不会引起混淆的情况下，为书写方便，将矢量场在空间位置  $(x, y, z)$  点的矢量  $A(x, y, z)$  或  $A(r)$  有时进一步简写作  $A$ ，而将(1.2-1)式有时也简写为

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$$

在空间每一点上的矢量都相同的矢量场称为常矢量场，简称常矢量。直角坐标系中的三个单位矢量均为常矢量。常矢量在直角坐标系中的三个分量都是常量。

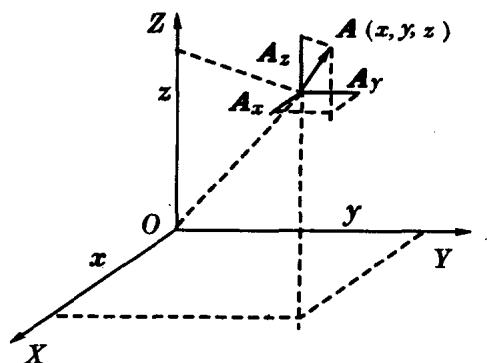


图 1.5 直角坐标系中的矢量场

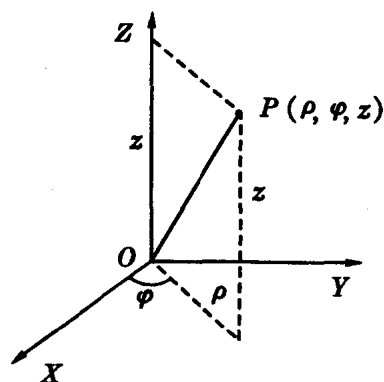


图 1.6 圆柱坐标

## 2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，表示空间位置点的三个坐标变量记为  $(\rho, \varphi, z)$ ，其中  $\rho$  表示该点到  $Z$  轴的垂直距离； $\varphi$  表示过该点和  $Z$  轴的平面与  $XZ$  平面的夹角； $z$  仍然表示该点在  $Z$  轴上的投影值，如图 1.6 所示。容易证明，同一空间位置点的圆柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.2-4)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (1.2-5)$$

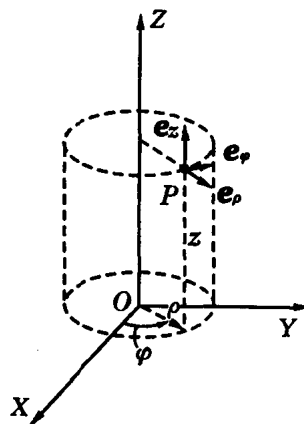


图 1.7 圆柱坐标系中的单位矢量

在圆柱坐标系中，矢量场的本地坐标轴的取向与过该点的圆柱面的法向和切向一致。对空间任一位置点  $(\rho, \varphi, z)$ ，本地的三个相互垂直的坐标轴单位矢量记为  $e_\rho, e_\varphi, e_z$ ，取向为过该点以  $z$  轴为轴线的圆柱面在该点的法线方向和切线方向，如图 1.7 所示，其中：

$e_\rho$ 为圆柱面在 $(\rho, \varphi, z)$ 点的法线方向;

$e_\varphi$ 为在 $(\rho, \varphi, z)$ 点平行于XY面且指向 $\varphi$ 增加一侧的圆柱面切线方向;

$e_z$ 为圆柱面在 $(\rho, \varphi, z)$ 点平行于Z轴的切线方向。

可见,圆柱坐标系中的单位矢量的方向随空间位置而变,不是常矢量。矢量场 $A(\mathbf{r})$ 在任一空间位置点 $(\rho, \varphi, z)$ 的矢量 $A(\mathbf{r})$ 可用其圆柱坐标分量表示为

$$A(\mathbf{r}) = A_\rho(\mathbf{r})e_\rho + A_\varphi(\mathbf{r})e_\varphi + A_z(\mathbf{r})e_z \quad (1.2-6)$$

式中 $A_\rho(\mathbf{r})$ ,  $A_\varphi(\mathbf{r})$ ,  $A_z(\mathbf{r})$ 称为圆柱坐标分量,是矢量 $A(\mathbf{r})$ 在该点的三个垂直坐标轴 $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$ 上的投影。容易证明,在空间同一点,圆柱坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{aligned} e_\rho &= e_x \cos\varphi + e_y \sin\varphi & e_x &= e_\rho \cos\varphi - e_\varphi \sin\varphi \\ e_\varphi &= -e_x \sin\varphi + e_y \cos\varphi & e_y &= e_\rho \sin\varphi + e_\varphi \cos\varphi \end{aligned} \quad (1.2-7)$$

将上式代入(1.2-6)和(1.2-3)式,可以得到矢量场在同一空间位置点上的圆柱坐标系中坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.2-8)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.2-9)$$

**例 1.1** 将 $A(\mathbf{r}) = xe_x + ye_y$ 和 $B(\mathbf{r}) = xe_y - ye_x$ 用圆柱坐标分量表示。

**解**  $A(\mathbf{r}) = xe_x + ye_y = \rho \cos\varphi(e_\rho \cos\varphi - e_\varphi \sin\varphi) + \rho \sin\varphi(e_\rho \sin\varphi + e_\varphi \cos\varphi) = \rho e_\rho$

$B(\mathbf{r}) = xe_y - ye_x = \rho \cos\varphi(e_\rho \sin\varphi + e_\varphi \cos\varphi) - \rho \sin\varphi(e_\rho \cos\varphi - e_\varphi \sin\varphi) = \rho e_\varphi$

### 3. 圆球坐标系

在圆球坐标系中,表示空间位置点的三个坐标变量记为 $(r, \theta, \varphi)$ ,其中 $r$ 表示该点到坐标原点的距离,也就是位置矢量的长度; $\theta$ 表示该点的位置矢量与Z轴的夹角,称为极角或纬度角; $\varphi$ 表示过该点和Z轴的平面与XZ平面的夹角,称为方位角或经度角;如图1.8所示。容易证明,同一空间位置点的圆球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (1.2-10)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2-11)$$

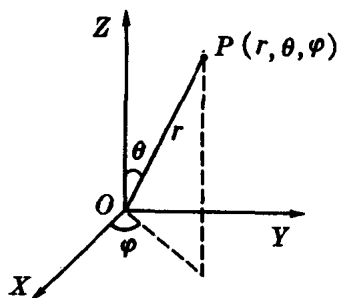


图 1.8 圆球坐标

在圆球坐标系中, 矢量场的本地坐标轴的取向与圆球面的法向和切向一致。对空间任一位置点  $(r, \theta, \varphi)$ , 本地的三个相互垂直的坐标轴单位矢量记为  $e_r, e_\theta, e_\varphi$ , 取向为过该点以坐标原点为球心的圆球面在该点的法线方向和切线方向, 如图 1.9 所示, 其中:

$e_r$  为圆球面在点  $(r, \theta, \varphi)$  的法线方向;

$e_\theta$  为在点  $(r, \theta, \varphi)$  的子午面内且指向  $\theta$  增加一侧的圆球面切线方向;

$e_\varphi$  为在点  $(r, \theta, \varphi)$  平行于  $XY$  面且指向  $\varphi$  增加一侧的圆球面切线方向。

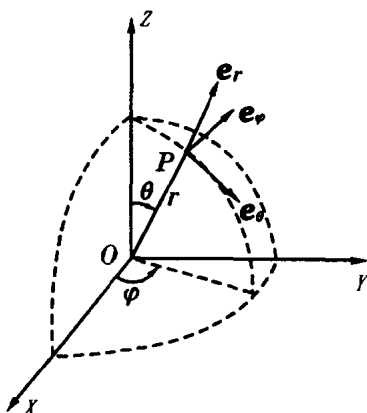


图 1.9 圆球坐标系中的单位矢量

可见, 圆球坐标系中的单位矢量的方向也随空间位置而变, 不是常矢量。矢量场  $A(r)$  在任一空间位置点  $(r, \theta, \varphi)$  的矢量  $A(r)$  可用其圆球坐标分量表示为

$$A(r) = A_r(r)e_r + A_\theta(r)e_\theta + A_\varphi(r)e_\varphi \tag{1.2-12}$$

式中  $A_r(r), A_\theta(r), A_\varphi(r)$  称为圆球坐标分量, 是矢量  $A(r)$  在该点的三个垂直坐标轴  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  上的投影。容易证明, 在空间同一点, 圆球坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{aligned} e_r &= e_x \sin\theta \cos\varphi + e_y \sin\theta \sin\varphi + e_z \cos\theta \\ e_\theta &= e_x \cos\theta \cos\varphi + e_y \cos\theta \sin\varphi - e_z \sin\theta \\ e_\varphi &= -e_x \sin\varphi + e_y \cos\varphi \end{aligned} \tag{1.2-13}$$

可以证明, 矢量场在同一空间位置点上的圆球坐标系中坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.2-14}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \tag{1.2-15}$$

**例 1.2** 将矢量场  $A(r)=e_x, B(r)=e_y, C(r)=e_z$  用圆球坐标分量表示。

**解** 将  $A(r)=e_x, B(r)=e_y, C(r)=e_z$  分别代入 (1.2-15) 式得

$$\begin{aligned} A(r) = e_x &= e_r \sin\theta \cos\varphi + e_\theta \cos\theta \cos\varphi - e_\varphi \sin\varphi \\ B(r) = e_y &= e_r \sin\theta \sin\varphi + e_\theta \cos\theta \sin\varphi + e_\varphi \cos\varphi \\ C(r) = e_z &= e_r \cos\theta - e_\theta \sin\theta \end{aligned}$$

### 1.3 梯 度

一元函数的导数表示函数的变化率, 多元函数的偏导数是多元函数沿坐标轴方向的变化率。例如, 对于温度场  $T(x, y, z, t)$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  表示温度场随时间的变化率; 而  $\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z$



分别表示温度场沿  $X, Y, Z$  三个坐标轴方向的变化率。对于指定的空间方向  $e_l$ , 其单位矢量可用方向余弦表示为

$$e_l = e_x \cos\alpha + e_y \cos\beta + e_z \cos\gamma \quad (1.3-1)$$

式中  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为该方向与  $X, Y, Z$  三个坐标轴方向的夹角。标量场或者说多元函数  $\Phi(x, y, z)$  沿指定方向  $e_l$  的变化率就是标量场在该方向的方向导数

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

上式中  $\frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial y}{\partial l}, \frac{\partial z}{\partial l}$  分别等于  $e_l$  的三个方向余弦, 因此, 上式可写为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.3-2)$$

定义矢量场

$$G(x, y, z) = e_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.3-3)$$

(1.3-2)式可写为两个矢量的点积形式, 即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = G \cdot e_l = G \cos\theta \quad (1.3-4)$$

式中  $\theta$  为  $G$  与  $e_l$  之间的夹角。上式表明, 标量场  $\Phi(x, y, z)$  沿指定方向  $e_l$  的变化率就是矢量场  $G$  在该方向的投影。可以看出, 沿  $G$  的方向, 标量场变化最快, 变化率最大, 其最大的变化率就是  $G$  的模。也就是说,  $G$  给出了对应的标量场  $\Phi$  在空间各点上的最大变化率及其方向,  $G$  称为该标量场  $\Phi$  的梯度 (gradient), 记作  $\nabla\Phi$ , 由 (1.3-3) 式, 标量场  $\Phi$  的梯度为

$$\nabla\Phi = e_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.3-5)$$

符号  $\nabla$  是一个微分运算符号,  $\nabla\Phi$  既表示标量场  $\Phi$  的梯度, 也表示对标量场  $\Phi$  进行由 (1.3-5) 式右边规定的求导运算。由直角坐标与圆柱坐标及圆球坐标的关系, 可以得到, 在圆柱坐标系中

$$\nabla\Phi = e_\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + e_\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + e_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.3-6)$$

在圆球坐标系中

$$\nabla\Phi = e_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \quad (1.3-7)$$

求梯度运算是多项求偏导运算, 因此它与微分运算有相似的规则。下面给出一些常用的梯度运算恒等式

$$\nabla C = 0 \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.3-8a)$$

$$\nabla(C\Phi) = C\nabla\Phi \quad (1.3-8b)$$

$$\nabla(\Phi + \Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi \quad (1.3-8c)$$

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi \quad (1.3-8d)$$

$$\nabla \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{1}{\Psi^2} (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi) \quad (1.3-8e)$$

$$\nabla F(\Phi) = F'(\Phi)\nabla\Phi \quad (1.3-8f)$$

下面以推导 (1.3-8d) 式为例说明以上几式的证明方法。