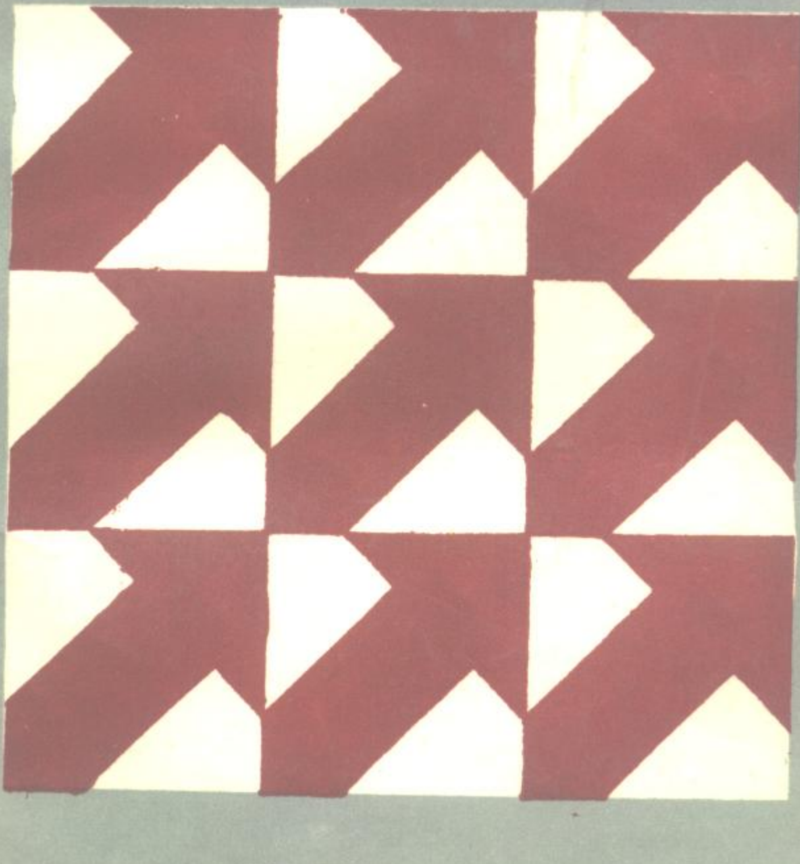
最優化管理

〔美〕 S. P. 塞申　G. L. 汤普生 著
陈子玉　陈燕庆　周凤歧 译　林其璥 校



宇航出版社

最优化管理

S.P.塞申　G.L.汤普生　著

陈子玉　陈燕庆　周凤歧　译

林其璥　校

宇航出版社

内 容 简 介

本书介绍最优控制理论在管理科学中应用研究的最新成果。书中简明地叙述了最优控制理论的基本概念，给出了各种管理问题典型控制模式的建立方法及解法。介绍了最优控制理论在财政金融、经济、生产与库存、商品销售、机器的维修与更换、自然资源的管理、环境污染控制、流行病控制等方面的应用；并提出了一些新的研究课题。每章后附有习题，书末有部分习题解答。

本书可供管理专业师生作教材或教学参考，也可供各行业、各部门管理人员以及从事最优控制理论应用研究和实践的科技人员阅读。

Optimal Control Theory
Applications to Management Science
Suresh P.Sethi Gerald L.Thompson
Martinus Nijhoff Publishing 1981

*

最 优 化 管 理

S.P.塞申 G.L.汤普生 著
陈子玉 陈燕庆 周凤歧 译
林其璬 校
责任编辑 张芝

*

宇航出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：13.25 字数：344 千字
1988 年 10 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1—8000 册
ISBN7-80034-157-7/Z·013 定价：5.50 元

译 者 序

随着科学技术的发展、生产规模的扩大、社会的进步，管理的复杂程度和难度也愈来愈大。管理工作不仅要能把握住现在，而且要能预测未来；不仅需要有定性的分析，而且需要有定量的描述。最优控制是现代控制理论中的一个分支。应用它来解决管理中的一些问题，就能使管理中一些看来很复杂的问题迎刃而解。控制论又是数学的一个分支。用控制论的观点和方法来分析和解决管理问题，把管理问题看作一个系统来研究，从而使管理成为一门能用数学方法研究的精密科学。与此同时，控制理论在经济领域中的广泛应用——从宏观国家经济方针政策的制定，到微观工厂企业的经营管理，从商品销售到疾病防治，都有它驰骋的天地——使它具有了更强有力的生命力。它的理论在应用中也不断得到充实、完善和发展。经济控制论或管理控制论成了一门新兴的学科，正在吸引着愈来愈多的人对它进行研究。

本书介绍了许多应用实例，又提出了一些新的研究课题。不仅对于各部门、各行业从事管理工作研究的人员，也对从事控制理论应用研究的人员有较大的参考价值。还非常适合管理专业的师生作教材或教学参考书用。现特将这本书翻译过来介绍给读者。陈子玉翻译了第一、二、七章，林其璥翻译了第三、四、五章，陈燕庆翻译了第六、八、九、十章，周凤歧翻译了第十一、十二章及附录。全稿由林其璥校阅，陈子玉统稿。

书中如有不妥和错误之处恳请读者批评指正。

译 者

1986 年于北京

原　　序

本书试图以简单明了、而又尽可能全面的手法介绍最优控制理论在管理科学方面应用研究的最新成果。我们感到这些成果是十分有价值的，并且广大的管理学家、数学家、工程师、经济学家以及从事这方面工作的有关人员，都应对这方面的知识有所了解。学习这本书，需要具备大学一、二年级的数学基础，如微分方程和线性代数方面的一些知识。所以这本书适合大学三年级以上的学生或低年级研究生使用。为了使读者深入了解本书的内容，我们在书中列举了大量的例子，并在每一章的末尾安排了相当数量的习题。部分习题答案已列于书后。同时还为教师准备了全部习题(205 题)的题解手册。

本书并不追求数学论证的严密性，而把重点放在商业和管理方面实际问题的建模上。为此，我们在第二章和第七章中仅对连续和离散的极大值原理给出直观推断式的证明。而在第三章中，则尽可能简明地归纳管理问题建模中常见的一些最重要的典型模式和终端条件。我们发现，几乎所有重要的管理科学模型都可以归纳在表 3.1 和表 3.2 中。

最优控制理论的最引人注目的特点之一是它的应用范围极为广泛。本书涉及的应用领域如下：第四章介绍最优投资问题；第五章研究生产和库存问题；第六章涉及推销问题；第八章陈述机器设备的保养和更换方面的问题；第九章涉及自然资源的最优利用问题(再生型与耗尽型)；第十章讨论某些经济领域方面的应用问题。

第十一章介绍了一些最优控制问题的计算方法。这将是今后需要更进一步研究的极为广阔和极为重要的领域。

第十二章介绍最优控制领域的一些新的研究课题：微分对策、分布参数系统、最优滤波、随机最优控制及脉冲控制。我们相信这些课题的理论研究工作将会进一步深入，并且其应用前景是极其宽广的。

本书还列有四个附录，附录中包括有关微分方程的一些基本内容，也包括一些较深的内容(如果放在章节中，会有损课文的连贯性)。在书末列出书中所引用的参考文献的目录。虽然列出的参考文献的数量已经很多，但并未包括全部文献。比如，关于评述方面的内容，就未列出其参考文献。

……

虽然，最优控制理论在管理科学方面的应用还是最近的事，但已经取得了很多极有价值的应用成果，可以预计今后仍将是成果辈出的时期。我们希望这本书能起到普及和推动这一领域中应用研究发展的作用。

目　　录

第一章　概述

1.1　什么叫最优控制理论 …………………………… 1

1.2　简单的控制模型 …………………………… 3

1.3　最优控制理论的历史 …………………………… 7

1.4　书中使用的符号 …………………………… 9

第二章　极大值原理：连续时间

2.1　问题的提法 …………………………… 16

2.1.1　数学模型 …………………………… 16

2.1.2　约束 …………………………… 17

2.1.3　目标函数 …………………………… 17

2.1.4　最优控制问题 …………………………… 18

2.2　动态规划和极大值原理 …………………………… 19

2.2.1　哈密尔顿-雅可比-贝尔曼方程 …………………………… 20

2.2.2　伴随方程的推导 …………………………… 23

2.2.3　极大值原理 …………………………… 26

2.2.4　极大值原理的经济学解释 …………………………… 27

2.3　举例 …………………………… 29

2.4　充分条件 …………………………… 37

第三章　典型模式

3.1　一般形式的极大值原理 …………………………… 46

3.1.1　单纯形状态变量不等式约束关系 …………………………… 50

3.1.2　充分条件 …………………………… 55

3.2　现值公式 …………………………… 55

3.3　终端条件 …………………………… 60

3.3.1 例 …… 64
3.4 无限时间问题与稳态假设 …… 71
3.5 典型模式 …… 73
第四章 财政金融方面的应用
4.1 简单的现金余额问题 …… 88
4.1.1 问题的模型 …… 88
4.1.2 极大值原理解法 …… 89
4.1.3 考虑不允许透支和卖空的情况 …… 92
4.2 最优投资模型 …… 96
4.2.1 模型 …… 97
4.2.2 极大值原理的应用 …… 98
4.2.3 最优控制轨迹的合成 …… 103
4.2.4 无限时间范围问题的解 …… 112
第五章 生产和库存方面的应用
5.1 生产库存系统 …… 121
5.1.1 产品库存模型 …… 122
5.1.2 极大值原理解法 …… 123
5.1.3 无限时间问题的解 …… 127
5.1.4 无限时间 S 为正常数情况的分析 …… 128
5.1.5 时变需求的特殊情况 …… 130
5.2 小麦连续交易模型 …… 133
5.2.1 模型 …… 134
5.2.2 极大值原理解法 …… 134
5.2.3 一种特殊情况下的解 …… 135
5.2.4 不允许卖空情况下的小麦交易模型 …… 138
5.3 规划时间与预测时间 …… 141
5.3.1 小麦交易模型的时间间隔 …… 142
5.3.2 关于小麦交易模型的时间间隔 …… 144
第六章 在销售方面的应用

6.1 Nerlove–Arrow 广告模型 …… 154
6.1.1 模型 …… 155
6.1.2 应用极大值原理求解 …… 156
6.1.3 Nerlove–Arrow 模型的非线性推广 …… 159
6.2 Vidale–Wolfe 广告模型 …… 162
6.2.1 Vidale–Wolfe 模型的最优控制描述 …… 163
6.2.2 Q 值较大时的格林解法 …… 165
6.2.3 当 Q 值较小时的解 …… 173
6.2.4 当 T 为无限时的解 …… 174
第七章 极大值原理: 离散时间
7.1 非线性规划 …… 183
7.1.1 拉格朗日乘子 …… 184
7.1.2 不等式约束 …… 185
7.1.3 非线性规划理论 …… 192
7.2 离散极大值原理 …… 194
7.2.1 离散最优控制问题 …… 194
7.2.2 离散极大值原理 …… 196
7.2.3 举例 …… 198
7.3 一般形式的离散极大值原理 …… 201
第八章 保养和更换
8.1 一种简单的保养和更换模型 …… 206
8.1.1 模型 …… 207
8.1.2 应用极大值原理的解 …… 208
8.1.3 数字实例 …… 210
8.1.4 推广 …… 212
8.2 故障机器的维修和更换 …… 214
8.2.1 模型 …… 214
8.2.2 最优策略 …… 216
8.2.3 销售日期的确定 …… 218

8.3 机器链 …………………………………… 219
8.3.1 模型 …………………………………… 219
8.3.2 应用离散极大值原理的解 ……………… 221
8.3.3 Bang-Bang 控制的特殊情况 …………… 223
8.3.4 与 Wagner-Whitin 结构合并，
以获得完全解 ………………………… 223
8.3.5 数字实例 ……………………………… 224
第九章 在自然资源方面的应用
9.1 独家经营渔业资源模型 ………………… 231
9.1.1 渔业模型的动态特性 ………………… 232
9.1.2 独家经营模型 ………………………… 233
9.1.3 应用格林定理的解法 ………………… 233
9.2 最优森林间伐模型 ……………………… 237
9.2.1 森林模型 ……………………………… 237
9.2.2 最优间伐模型的确定 ………………… 238
9.2.3 森林链式模型 ………………………… 240
9.3 可耗尽资源模型 ………………………… 243
9.3.1 模型的构成 …………………………… 244
9.3.2 应用极大值原理的解 ………………… 246
第十章 某些经济方面的应用
10.1 最优经济增长模型 ……………………… 253
10.1.1 最优资本积累模型 …………………… 253
10.1.2 应用极大值原理求解 ………………… 254
10.1.3 具有增长劳动力的区段模型 ………… 255
10.1.4 应用极大值原理求解 ………………… 256
10.2 最优流行病控制模型 …………………… 259
10.2.1 模型的构成 …………………………… 260
10.2.2 应用格林定理求解 …………………… 260
10.3 污染控制模型 …………………………… 264

10.3.1 模型的构成 …… 264
10.3.2 用极大值原理求解 …… 266
10.3.3 状态图分析 …… 266
10.4 其他方面的应用 …… 269
第十一章 几个计算方法
11.1 引言 …… 272
11.2 打靶法 …… 272
11.2.1 一种初值打靶法 …… 273
11.2.2 离散最优控制问题的解 …… 274
11.2.3 数值例 …… 275
11.3 牛顿-拉福森法 …… 276
11.3.1 控制问题的拟线性化法 …… 277
11.3.2 拟线性化法的进一步讨论 …… 278
11.4 共轭梯度法 …… 279
11.4.1 关于最优控制问题的共轭梯度法 …… 281
11.4.2 例 …… 282
11.4.3 几点结论 …… 285
第十二章 其他控制理论课题
12.1 微分对策 …… 288
12.1.1 双人零和微分对策 …… 288
12.1.2 非零和微分对策 …… 290
12.1.3 对公共渔业资源的应用 …… 292
12.2 分布参数系统 …… 295
12.2.1 分布参数的极大值原理 …… 297
12.2.2 畜牧场经营问题 …… 298
12.2.3 伴随函数的解释 …… 301
12.3 卡尔曼滤波 …… 302
12.4 随机最优控制 …… 307
12.4.1 随机生产计划模型 …… 308

12.4.2 对生产计划问题的解 …… 311
12.5 脉冲控制 …… 314
12.5.1 石油钻探问题 …… 316
12.5.2 脉冲最优控制的极大值原理 …… 316
12.5.3 石油钻探问题的解 …… 318
12.5.4 机器的保养与更换模型 …… 323
12.5.5 脉冲极大值原理的应用 …… 324
附录 A1 线性微分方程的解
A1.1.1 常系数线性微分方程 …… 331
A1.1.2 一阶齐次方程 …… 332
A1.1.3 二阶齐次方程 …… 333
A1.1.4 n 阶齐次方程 …… 333
A1.1.5 常系数线性微分方程的特解 …… 334
A1.1.6 表 A1.1.3 的引伸用法 …… 335
A1.1.7 积分因子 …… 335
A1.1.8 高阶线性方程变换为一阶系统方程组 …… 335
A1.1.9 线性两点边界值问题的解 …… 339
A1.2.1 齐次偏微分方程 …… 340
A1.2.2 非齐次偏微分方程 …… 342
附录 A2 变分法和最优控制理论
A2.1 最简单的变分问题 …… 343
A2.2 欧拉方程 …… 344
A2.3 在平面上两点之间的最短距离 …… 347
A2.4 最速降线问题 …… 348
A2.5 折转的极值曲线: Weirstrass-Erdmann 角点条件 …… 351
A2.6 勒让德条件: 二阶变分 …… 353
A2.7 强极大值的必要条件 …… 354
A2.8 与最优控制的关系 …… 355

附录 A3 极大值原理的另一种推导方法
A3.1 针形变分 …… 357
A3.2 伴随方程的推导和极大值原理 …… 360
附录 A4 最优控制中的特殊问题
A4.1 线性二次型问题 …… 364
A4.1.1 确定性等价原理或分离原理 …… 366
A4.2 二阶变分 …… 367
A4.3 奇异控制 …… 370

部分习题的答案 …… 372

英汉对照 …… 380

参考文献 …… 392

第一章　概　　述

管理科学的许多应用问题往往要涉及到随时间变化的动态系统的控制问题。这类系统又可按时间变量 t 是连续的或离散的而分为**连续时间系统**或**离散时间系统**。本书对这两种系统都要进行研究，重点研究连续时间系统。

最优控制理论是较新的一个数学分支。它探求控制动态系统的最优方法。本书的写法是先介绍有关的最基本的数学理论知识，然后再用这些知识来解决管理科学应用中出现的各种问题。为了使广大读者能够理解本书的内容，书中的数学知识谨慎地保持在尽可能基础的水平上。读者只要具有微积分(包括偏微分)、向量、矩阵和微分方程的基本知识即可读懂本书的内容。

书中讨论的管理科学应用问题涉及下述领域：金融、经济、生产与库存、销售、机器的保养与更换、自然资源的消耗等等。在第十章和各章习题中还介绍了其他方面的应用。在每个重要的领域内先列举一个或几个简单的模型，继而再列举一个较复杂的模型。读者初读时仅通过每个领域中的简单模型就可以得到怎样应用最优控制理论的总概念。而后，读者可以按需要对一个或几个应用领域进行深读。

1.1　什么叫最优控制理论

本书将采用**系统**这个词作为基本术语。我们对系统的唯一要求是它要能够用各种**状态变量**来表征。设(实)变量 $x(t)$是系统在 t 时的状态变量，如 $x(t)$可表示 t 时的库存量、t 时的广告商誉、t 时

的未耗完的财产或自然资源的数量等等。

假设有控制系统状态的方法，则可令(实)变量 $u(t)$为 t 时系统的**控制变量**。例如，$u(t)$可以是 t 时的生产率、t 时的广告费、t 时的消耗率等等。

已知状态变量 $x(t)$和控制变量 $u(t)$，则由**状态方程**

$$\dot{x}=f(x、u、t),\ x(0)=x_0 \tag{1.1}$$

可求出状态变量的瞬时变化率，式中 f 是 x、u、t 的已知函数，x_0 为 x 的初始值。如果知道初始值 x_0 和**控制轨迹**，即在整个 $0\leqslant t\leqslant T$ 区间中 $u(t)$的值，则积分(1.1)式就得到**状态轨迹**，即在整个 $0\leqslant t\leqslant T$ 区间中 $x(t)$的值。最优控制就是要选择控制轨迹，以使得在此状态轨迹和控制轨迹下目标函数达到最大值。

$$J=\int_0^T F(x,u,t)dt+S[x(T)] \tag{1.2}$$

(1.2)式中 F 是 x、u、t 的已知函数，它可以是生产成本的负值、利润(减去广告费用)及消费效用等等。(1.2)式中的函数 S 给出了终点状态 $x(T)$的“残值”，这样使解在终点也有意义。

通常，控制变量 $u(t)$是有约束的，表示为

$$u(t)\in\Omega(t) \tag{1.3}$$

式中 $\Omega(t)$是 t 时控制变量可能值的集。

最后要注意，当把(1.1)式和(1.3)式合起来考虑时，可能终值 $x(T)$的集合是有限制的，记作

$$x(T)\in X(T) \tag{1.4}$$

式中 $X(T)$称为状态变量**可达集**。此处 $X(T)$是当 $x(t)$满足(1.1)式，控制变量满足(1.3)式的要求时能得到的所有可能的终值的集合。

虽然上面对控制问题的描述似乎不易理解，但是读者将会发现在每个具体的应用中各种变量和参数都有适宜的解释，使人们容易理解和记忆它们。下面举例来说明。

1.2 简单的控制模型

现列出选自生产、广告和经济领域的三个简单模型。本节的目的仅在于标记出和解释前一节描述过的模型中的每个变量和函数的含义。而在后面几章将介绍这些模型的详解。

例 1.1 生产–库存模型

为了便于与后面的模型进行比较，现将本模型中所规定的各种参量的定义列在表 1.1 中。

表 1.1 生产–库存举例

状态变量	$I(t)$ —— 库存量
控制变量	$P(t)$ —— 生产率
状态方程	$\dot{I}(t)=P(t)-S(t)$, $I(0)=I_0$
目标函数	$\max\left\{J=\int_0^T-[h(T)+c(P)]dt\right\}$
状态约束	$I(t)>0$
控制约束	$0<\underline{P}<P(t)<\overline{P}$
终点约束	$I(T)>I_{\min}$
外部函数	$S(t)$ —— 需求率
	$h(I)$ —— 库存占用成本
	$c(P)$ —— 生产成本
参数	T —— 终点时间
	$I_{\min}$ —— 终端最低库存量
	$\underline{P}$ —— 下限生产率
	$\overline{P}$ —— 上限生产率
	I_0 —— 初始库存量

我们研究一种给定商品，比如说，钢的生产与库存关系，以便满足外界的需求。状态变量$\dot{I}(t)$表示 t 时现有的钢的吨数。t 时外界的需求率为 $S(t)(t/d)$，必须确定生产率 $P(t)$(也为 t/d)。给定了 $t=0$ 时的初始库存量 I_0，状态方程$\dot{I}(t)=P(t)-S(t)$描述出变量(钢)的变化情况。因为 $h(I)$是维持库存量 I 的占用成本(USD/d)，$c(P)$是生产率为 P 的生产成本(也为 USD/d)。目标函数显然是使在整个$[0,T]$期间的占用成本与生产成本之和的负值最大。当然，使这个和的负值最大等同于使占用成本加生产成本之和为最小。为使在整个期间需求都能得到满足，必须加入状态变量约束，即$I(t)\geqslant 0$。也就是说，不允许出现需求得不到满足的情况，即所谓"积压"需求。(当 I 变为负数时，即加入"缺货"罚款这一项，$h(I)$将变得很大)。控制约束要使生产率 $P(t)$保持在下限生产率 $\underline{P}$ 和上限生产率$\overline{P}$之间。最后，加入终点约束$I(T)>I_{\min}$，以使终点的库存量至少保持在 $I_{\min}$。如果不施加这些约束，那么最优决策无疑会驱使$I(T)=0$。这相当于在 T 时要关闭工厂。

由于有许多变量、函数和参数，所以需要用较长的篇幅来说明。但是，当已给出生产-库存模型的说明后，再对各种不同的情况进行研究就不困难了。我们将在第五章详细地求解这个模型的各种型式。

例 1.2　广告模型　这个模型中规定的各参量的定义列于表 1.2。

现举例研究 Nerlove-Arrow 广告模型的一个特殊情况(此模型在第六章中还要非常详细地研究)。主要问题是要确定每个时刻为产品作广告的广告率。这里，状态变量是"商誉"$G(t)$，用它度量产品闻名的程度。再假设存在一个"遗忘"系数 δ，用它来度量顾客遗忘此产品的速率。为了防止产品被"遗忘"，用控制变量 $u(t)$所给出的广告费率进行广告宣传。因此，状态方程为$\dot{G}=u-\delta G$，并由 $G(0)=G_0$ 给出产品的初始商誉。