分析中的反例

[美] B.R.盖尔鲍姆 J.M.H.奥姆斯特德 著

上海科学技术出版社

COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS

B. R. Gelbaum

J. M. H. Olmsted

Holden-Day, Inc., 1964.

分析中的反例

〔美〕 B. R. 盖尔鲍姆 J. M. H. 奥姆斯特德 著

高 校 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 141,000

1980 年 4 月第 1 版 1981 年 4 月第 2 次印刷

印数 18,001—43,000

书号: 13119·816 定价: 0.66 元

《大学数学丛书》

编辑出版说明

为我国大学生提供更多内容丰富的数学读物，这一直是我国数学界和出版界多年的宿愿之一。这套《丛书》就是以理工科数学（数理）系大学生为主要读者对象，兼供大专院校数学教师、科研工作者、中学数学教师和其它数学爱好者参考的读物。

《丛书》的内容大致包括这样几个方面：数学中某些分支或专题的入门介绍；体系新颖、别具一格的基础读物；数学史料、数学家传记和重要数学思想的介绍等。《丛书》中的各本可以是编著、编写而成，也可以是翻译、编译、摘译汇编而成。

《丛书》从1981年开始陆续出版。企盼数学界、教育界以及关心我国数学事业的各界人士不吝赐教，并望在推荐选题和编撰方面给予热忱支持。让我们为繁荣我国数学读物的出版事业而共同努力。

《分析中的反例》中译本已于1980年出版，这次重印时列入本丛书。

上海科学技术出版社

序　言

数学中提出的问题的主要类型是："陈述 S 是否正确?"这里陈述 S 形如"类 A 的每个元都是类 B 的元：$A\subset B$."要论证这一陈述是正确的，就意味着要系统地立出包含关系 $A\subset B$ 的一个证明，而要说明这一陈述不真，就意味着要找到 A 的一个元，但它不是 B 的元，也就是说，一个反例．譬如，若陈述 S 是"每个连续函数都是有处可微的"，则集合 A 与 B 分别由全体连续函数和全体有处可微的函数组成；Weierstrass 的著名的例子，函数 f 连续但无处可微（参照第三章例 8）就是针对包含关系 $A\subset B$ 的一个反例，因为 f 是 A 的元，而不是 B 的元．冒着过于简单化的风险，我们可以说（撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两个大类——证明和反例组成，而数学发现也是朝着两个主要的目标——提出证明和构造反例．绝大多数的数学书集中于第一类，正确陈述的证明的主体．我们在这本书中则致力于第二类数学对象，说明陈述不真的反例．

一般地说，数学中的例子有两种类型：说明性的例子和反例，即显示某件事为什么有意义的例子和指出某件事为什么讲不通的例子．或许会认为，任何例子都是针对某一件事的反例，这里的某一件事就是陈述：此例为不可能．我们不同意给予反例这个词以如此万能的解释，但是我们建议它的含意要充分广泛，使能包括任何这样的例子，即其作用不是说明一个正确的定理．譬如，多项式作为连续函数的一例就不是

一个反例，但是多项式作为函数不能有界的例子，或者作为函数不是周期函数的例子就是一个反例. 同样地，有界闭区间上的全体单调函数类作为可积函数类就不是一个反例，但是，它作为函数空间而不是向量空间的例子就是一个反例.

本书是给广大的各方面的读者编写的. 许多题材适合尚未学完微积分初步的学生阅读，对教师也相宜，他们可能需要用例子说明，在微积分中事情到了什么限度就会“出毛病”. 学习分析的高年级学生会发现一些通常为标准课程所忽视的细微差别. 准备学位考试的研究生将能增加确定他们曾经学过的定理的范围的一些重要例子的储备. 我们甚至希望熟练的专家也会找到某些新的和值得做的解释.

书中介绍的反例几乎完全限于分析中从微积分的水平开始的，称为“实变数”的那部分，虽然也包括度量空间和拓扑空间的几个例子，有些还用到了复数. 我们并不认为已经完备. 实际上，有些读者可能会发现他们所喜欢的某些例子没有搜集进来，我们承认这是出自个人的爱好. 有些省略则是经过考虑的，或限于篇幅，或出于偏袒. 其余的遗漏一旦我们注意到，无疑将非常惋惜.

本书主要是供浏览用的，虽然也会是几门标准课程的有益的补充. 如果读者觉得有的部分难以往下看，他可以跳过去，再从书中其它地方汲取新的使人兴奋的东西. 在下列大致的类目中，已经试图让内容按照难易或诡辩的程度渐次变化：(1)各章；(2)各章内的各个题目；(3)各个题目下的各例. 有关材料的某些知识假定读者已经掌握，因此只准备了最少的说明. 每一章都以引言开始，用来明确记号、术语和定义，也陈述一些比较重要的有关定理. 书后附有基本的参考书目，并且经常提到其中列出的论文和书籍. 指定这些参考文献，

既是为了引导读者去寻找各个题目更进一步的资料，也是为了给出引用的来源和出处．如果某个反例的应当确认的原作者没有指名，我们谨致歉意，任何这种忽略都不是故意的．

最后，期望本书的读者也会和我们曾经经历过的那样，从这一汇集得到享受和兴奋．我们体会到，一个数学问题用一个反例予以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧．为数学作出的许多最优雅的和艺术性很强的贡献属于这个流派．

B. R. 盖尔鲍姆

J. M. H. 奥姆斯特德

目　录

第一篇　单实变函数

第二篇　多维的问题