

分析中的反例

[美] B.R. 盖尔鲍姆 J.M.H. 奥姆斯特德 著

上海科学技术出版社



COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS

B. R. Gelbaum

J. M. H. Olmsted

Holden-Day, Inc., 1964.

分析中的反例

【美】 B. R. 盖尔鲍姆 著
J. M. H. 奥姆斯特德

高 枚 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 141,000

1980 年 4 月第 1 版 1981 年 4 月第 2 次印刷

印数 18,001—43,000

书号: 13119·816 定价: 0.66 元

《大学数学丛书》

编辑出版说明

为我国大学生提供更多内容丰富的数学读物，这一直是我国数学界和出版界多年的宿愿之一。这套《丛书》就是以理工科数学(数理)系大学生为主要读者对象，兼供大专院校数学教师、科研工作者、中学数学教师和其它数学爱好者参考的读物。

《丛书》的内容大致包括这样几个方面：数学中某些分支或专题的入门介绍；体系新颖、别具一格的基础读物；数学史料、数学家传记和重要数学思想的介绍等。《丛书》中的各本可以是编著、编写而成，也可以是翻译、编译、摘译汇编而成。

《丛书》从1981年开始陆续出版。企盼数学界、教育界以及关心我国数学事业的各界人士不吝赐教，并望在推荐选题和编撰方面给予热忱支持。让我们为繁荣我国数学读物的出版事业而共同努力。

《分析中的反例》中译本已于1980年出版，这次重印时列入本丛书。

上海科学技术出版社

序 言

数学中提出的问题的主要类型是：“陈述 S 是否正确？”这里陈述 S 形如“类 A 的每个元都是类 B 的元： $A \subset B$ 。”要论证这一陈述是正确的，就意味着要系统地立出包含关系 $A \subset B$ 的一个证明，而要说明这一陈述不真，就意味着要找到 A 的一个元，但它不是 B 的元，也就是说，一个反例。譬如，若陈述 S 是“每个连续函数都是有处可微的”，则集合 A 与 B 分别由全体连续函数和全体有处可微的函数组成；Weierstrass著名的例子，函数 f 连续但无处可微（参照第三章例8）就是针对包含关系 $A \subset B$ 的一个反例，因为 f 是 A 的元，而不是 B 的元。冒着过于简单化的风险，我们可以说（撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两个大类——证明和反例组成，而数学发现也是朝着两个主要的目标——提出证明和构造反例。绝大多数的数学书集中于第一类，正确陈述的证明的主体。我们在这本书中则致力于第二类数学对象，说明陈述不真的反例。

一般地说，数学中的例子有两种类型：说明性的例子和反例，即显示某件事为什么有意义的例子和指出某件事为什么讲不通的例子。或许会认为，任何例子都是针对某一件事的反例，这里的某一件事就是陈述：此例为不可能。我们不同意给予反例这个词以如此万能的解释，但是我们建议它的含意要充分广泛，使能包括任何这样的例子，即其作用不是说明一个正确的定理。譬如，多项式作为连续函数的一例就不是

一个反例,但是多项式作为函数不能有界的例子,或者作为函数不是周期函数的例子就是一个反例. 同样地,有界闭区间上的全体单调函数类作为可积函数类就不是一个反例,但是,它作为函数空间而不是向量空间的例子就是一个反例.

本书是给广大的各方面的读者编写的. 许多题材适合尚未学完微积分初步的学生阅读,对教师也相宜,他们可能需要用例子说明,在微积分中事情到了什么限度就会“出毛病”. 学习分析的高年级学生会发现一些通常为标准课程所忽视的细微差别. 准备学位考试的研究生将能增加确定他们曾经学过的定理的范围的一些重要例子的储备. 我们甚至希望熟练的专家也会找到某些新的和值得做的解释.

书中介绍的反例几乎完全限于分析中从微积分的水平开始的,称为“实变数”的那部分,虽然也包括度量空间和拓扑空间的几个例子,有些还用到了复数. 我们并不认为已经完备. 实际上,有些读者可能会发现他们所喜欢的某些例子没有搜集进来,我们承认这是出自个人的爱好. 有些省略则是经过考虑的,或限于篇幅,或出于偏袒. 其余的遗漏一旦我们注意到,无疑将非常惋惜.

本书主要是供浏览用的,虽然也会是几门标准课程的有益的补充. 如果读者觉得有的部分难以往下看,他可以跳过去,再从书中其它地方汲取新的使人兴奋的东西. 在下列大致的类目中,已经试图让内容按照难易或诡辩的程度渐次变化: (1)各章; (2)各章内的各个题目; (3)各个题目下的各例. 有关材料的某些知识假定读者已经掌握,因此只准备了最少的说明. 每一章都以引言开始,用来明确记号、术语和定义,也陈述一些比较重要的有关定理. 书后附有基本的参考书目,并且经常提到其中列出的论文和书籍. 指定这些参考文献,

既是为了引导读者去寻找各个题目更进一步的资料，也是为了给出引用的来源和出处。如果某个反例的应当确认的作者没有指名，我们谨致歉意，任何这种忽略都不是故意的。

最后，期望本书的读者也会和我们曾经经历过的那样，从这一汇集得到享受和兴奋。我们体会到，一个数学问题用一个反例予以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧。为数学作出的许多最优雅的和艺术性很强的贡献属于这个流派。

B. R. 盖尔鲍姆

J. M. H. 奥姆斯特德

目 录

第一篇 单实变函数

第一章 实数系	1
引言	1
1. 不能使之有序的无限域	12
2. 按两种不同途径使之有序的域	12
3. 不完全的有序域	13
4. 非 Archimedes 有序域	14
5. 无法使之完全的有序域	15
6. 有理数在其中不稠密的有序域	15
7. 不是全序域的 Cauchy 完全有序域	15
8. 不能唯一析因的整环	16
9. 没有最大公因子的两个数	17
10. 不能唯一地化简成最低项的分数	17
11. 假如数系是不完全的, 闭区间上的连续函数将失去某些熟 知的性质	17
a. 函数在闭区间上连续, 但是无界. (由于是有界区间, 所以这个函数还是不一致连续的.)	17
b. 函数在闭区间上连续且有界, 但不一致连续	18
c. 函数在闭区间上一致连续(因而有界)但没有最大值	18
d. 函数在闭区间上连续, 但介值性质失效	18
e. 可微的非常值函数, 它的导数在闭区间上恒等于零	18
f. Rolle 定理(因而又有中值定理)失效的可微函数	18
g. 保有介值性的、单调的、一致连续的非常值函数, 它的 导数在区间上恒等于零	18

第二章 函数与极限	19
引言	19
1. 无处连续的函数, 其绝对值却处处连续	21
2. 仅在一处连续的函数	21
3. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的无界函数	22
4. 以一个任意的非紧集为定义域的无界但是局部有界的函数	22
5. 处处有限而又处处局部无界的函数	22
6. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的有界函数, 没有极值	23
7. 定义域为紧集的有界函数, 没有相对极值	23
8. 无处半连续的有界函数	24
9. 没有最小正周期的非常值周期函数	24
10. 无理函数	24
11. 超越函数	25
12. 函数 $y=f(u)$, $u \in \mathbb{R}$ 和 $u=g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, 其复合函数 $y=f(g(x))$ 处处连续, 并适合 $\lim_{u \rightarrow b} f(u)=c$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=b$, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c$	25
13. 乘积不一致连续的两个一致连续的函数	26
14. 在区间上连续和一对一的函数, 而其反函数不连续	26
15. 在每个无理点连续, 而在每个有理点间断的函数	27
16. 间断点集合为稠密集半连续函数	27
17. 函数有一个稠密的间断点集合, 其中每个间断点都是可去的	27
18. 以任意可数集 (还可以是稠密集) 的点为间断点的单调函数	27
19. 函数的连续点集是稠密集, 间断点集也是稠密集, 间断点都不是可去的	28
20. 两个区间之间一个无处单调的一一对应	28
21. 无处单调的连续函数	29

22. 在任意给定的闭集上间断的函数	29
23. 在任意给定的 F_σ 集上间断的函数	30
24. 不能作为任何连续函数序列的极限的函数	31
25. 定义域为 $[0, 1]$ 的一个函数, 在 $[0, 1]$ 的每个非退化的 子区间上, 其值域都是 $[0, 1]$	32
26. 不连续的线性函数	33
27. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 满足下面两个条件的 $n(2n+1)$ 个函数 $\phi_{ij}(x_j)$, $j=1, 2, \dots, n$; $i=1, 2, \dots, 2n+1$	34
(a) 所有的 $\phi_{ij}(x_j)$ 在 $[0, 1]$ 上连续	34
(b) 对于在 $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ 上连续的任何函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都有 $2n+1$ 个在 $\mathbb{R}$ 上连续的函数 ψ_i , $i=1, 2, \dots, 2n+1$, 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x_j) \right)$	34
第三章 微分法	35
引言	35
1. 不能成为导函数的函数	35
2. 具有间断导数的可微函数	35
3. 处处有导数(不必是有限的)的不连续函数	36
4. 在某点有极值的可微函数, 其导数在该点不是简单地变 换符号	36
5. 导数于某点取正值的可微函数, 但在该点的任何邻域内 都不是单调的	36
6. 一个函数, 其导数为有限, 但在一个闭区间上却无界	37
7. 一个函数, 其导数存在并且有界, 但是导数在一个闭区 间上没有(绝对)极值	37
8. 处处连续而无处可微的函数	38
9. 中值定理失效的可微函数	39
10. 自变量为正数时函数值取正数, 自变量为负数时函数值 恒等于零的无穷可微函数	40

11. 在单位区间内取正值, 而在单位区间之外恒等于零的无穷可微函数	40
12. 函数值在 $(-\infty, 0]$ 上等于零; 在 $[0, 1]$ 上严格单调; 在 $[1, +\infty)$ 上等于 1 的无穷可微的“连接函数”	40
13. 无穷可微的单调函数而有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$	40
第四章 Riemann 积分	42
引言	42
1. 定义在闭区间上的有界的然而不是 Riemann 可积的函数	42
2. 没有原函数的 Riemann 可积函数	42
3. 在任何区间上都没有原函数的 Riemann 可积函数	42
4. 函数在闭区间上有原函数, 但仍不 Riemann 可积	43
5. 有着稠密的间断点集的 Riemann 可积函数	43
6. 函数 f , 且 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 处处可微, 但在一个稠密集上, $g(x)$ 的导数异于 $f(x)$	44
7. 两个不同的半连续函数之间的“距离”为零	44
8. 以任意零测度的 F_σ 集作为间断点集的 Riemann 可积函数	44
9. 一个 Riemann 可积函数的 Riemann 可积函数而不是 Riemann 可积的	45
10. Riemann 可积函数的有界单调序列的极限, 却不是 Riemann 可积的	45
11. Cauchy 主值为有限的发散广义积分	45
12. 在 $[1, +\infty)$ 上收敛的广义积分, 其被积函数是正值连续函数, 在无穷远点并不趋向于零	46
13. 在 $[0, +\infty)$ 上收敛的广义积分, 其被积函数在每个形如 $[a, +\infty)$ 的区间上无界, 此处 $a > 0$	46
14. 函数 f 和 g , 在 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上 f 对于 g 都是 Riemann-Stieltjes 可积的, 但在 $[a, c]$ 上则否	46

第五章 序列	48
引言	48
1. 有界的发散序列	48
2. 以任意闭集作为极限点集的序列	48
3. 对每个正整数 p , 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ 的发散序列 $\{a_n\}$	50
4. 对任意严格递增的正整数序列 $\{\phi_n\} = \{\phi(n)\}$, 能使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\phi(n)} - a_n) = 0$ 的发散序列 $\{a_n\}$	51
5. 两个序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 适合 $\lim a_n + \lim b_n < \lim (a_n + b_n) < \lim a_n + \lim b_n$	51
6. 一列序列 $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) > \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$	52
7. 两个一致收敛的函数序列, 它们的乘积序列不一致收敛	52
8. 发散的集合序列	52
9. 集合序列 $\{A_n\}$ 收敛于空集合, 但是它们的基数 $\rightarrow +\infty$	53
第六章 无穷级数	55
引言	55
1. 通项趋于零的发散级数	56
2. 收敛级数 $\sum a_n$ 与发散级数 $\sum b_n$, 适合 $a_n \geq b_n, n=1, 2, \dots$	56
3. 收敛级数 $\sum a_n$ 与发散级数 $\sum b_n$, 适合 $ a_n \geq b_n , n=1, 2, \dots$	56
4. 任意给定的正项级数, 或优于发散级数, 或收敛级数优于它	56
5. 具有发散重排的收敛级数	56
6. 对于任一条件收敛级数 $\sum a_n$ 和任一实数 x , 序列 $\{e_n\}$, 其中 $ e_n = 1, n=1, 2, \dots$, 能使 $\sum e_n a_n = x$	58

7. 满足标准交错级数定理的三个条件中任意两个的发散级数	58
8. 通项趋于零的一个发散级数, 适当地引进括号后变成收敛于任意的和	59
9. 对于给定的以零为下极限的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项发散级数 $\sum a_n$, 其通项趋于零并适合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$	60
10. 对于给定的以零为下极限的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum a_n$, 适合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$	60
11. 对于一个下极限为零的正数序列 $\{c_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum a_n$ 和一个正项发散级数 $\sum b_n$, 能使 $a_n/b_n = c_n$, $n=1, 2, \dots$	60
12. $x \geq 1$ 上的正值连续函数, 使得 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 发散	61
13. $x \geq 1$ 上的正值连续函数, 使得 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散而 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛	61
14. 比值判别法失效的级数	61
15. 根值判别法失效的级数	63
16. 比值判别法失效但能用根值判别法的级数	64
17. 两个收敛级数, 它们的 Cauchy 乘积级数发散	64
18. 两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积级数绝对收敛	65
19. 对于正项收敛级数的一个给定序列 $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}, n=1, 2, \dots$, 有一个不便与 $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$ 中任何级数相比较的正项收敛级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$	66
20. Toeplitz 矩阵 T , 以及被 T 变换成收敛序列的发散序列	68
21. 对于给定的 Toeplitz 矩阵 $T=(t_{ij}), a_i = \pm 1$ 的序列 $\{a_i\}$ 经过 T 的变换式 $\{b_i\}$ 发散	69

22. 仅在一点收敛的幂级数	72
23. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数处处收敛, 但仅在一点 表示这个函数	72
24. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数仅在一点收敛	72
25. 不是 Fourier 级数的收敛三角级数	74
26. 函数 $f(x)$ 无穷可微且有 $\lim_{ x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 但它不是任何 Lebesgue 可积函数的 Fourier 变换式	76
27. 对任一可数集 $E \subset [-\pi, \pi]$, 一个连续函数, 它的 Fourier 级数在 E 的各点发散, 而在 $[-\pi, \pi] \setminus E$ 的各 点收敛	78
28. 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 (Lebesgue) 可积函数, 其 Fourier 级数 处处发散	78
29. 有理数序列 $\{a_n\}$, 对于每个在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(0) = 0$ 的函数 f , 都存在一个严格递增的正整数序列 $\{n_\nu\}$, $n_0 \equiv$ 0, 使得 $f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_n x^n \right)$ 在 $[0, 1]$ 上的收敛性是一致的	78
第七章 一致收敛	81
引言	81
1. 处处间断的函数的序列一致收敛于处处连续的函数	81
2. 无穷可微函数的序列一致收敛于零, 其导函数序列却处 处发散	81
3. 有界函数的非一致极限, 它是无界函数	82
4. 连续函数的非一致极限, 它是间断函数	82
5. Riemann 可积函数的非一致极限, 它却不是 Riemann 可积函数	84
6. 积分的极限不等于极限的积分的函数序列	84
7. 导数的极限不等于极限的导数的函数序列	85
8. 在每个闭的子区间上都是一致的, 但在整个区间上不 一致的收敛性	85

9. 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于零的序列 $\{f_n\}$, 而使

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow 0 \dots\dots\dots 86$$

10. 级数不一致收敛, 而其通项却一致地趋于零 $\dots\dots\dots 86$

11. 一个不一致收敛的序列, 有一个一致收敛的子序列 $\dots\dots\dots 86$

12. 满足 Dini 定理的四个条件中任何三个条件的非一致收敛的序列 $\dots\dots\dots 87$

第八章 实轴上的集与测度 $\dots\dots\dots 88$

引言 $\dots\dots\dots 88$

1. 完备的疏集 $\dots\dots\dots 90$

2. 测度为零的不可数集 $\dots\dots\dots 91$

3. 一个测度为零的集, 其差集包含原点的一个邻域 $\dots\dots\dots 92$

4. 正测度的完备疏集 $\dots\dots\dots 94$

5. 无理数的完备疏集 $\dots\dots\dots 95$

6. 一个稠密开集, 它的补集的测度不等于零 $\dots\dots\dots 96$

7. 第二范畴的集 $\dots\dots\dots 96$

8. 不是 F_σ 集的集 $\dots\dots\dots 96$

9. 不是 G_δ 集的集 $\dots\dots\dots 97$

10. 集 A , 对于它, 不存在用 A 作为间断点集的函数 $\dots\dots\dots 97$

11. 不可测集 $\dots\dots\dots 98$

12. 对于每个可测集 A , 能使 $\mu_*(D \cap A) = 0$ 和 $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$ 的集 D $\dots\dots\dots 100$

13. 测度为零的集 A , 而每个实数都是集 A 的凝聚点 $\dots\dots\dots 101$

14. 实数的一个疏集 A , 以及从 A 到单位闭区间 $[0, 1]$ 上的一个连续映射 $\dots\dots\dots 101$

15. 一个连续单调函数, 其导数几乎处处为零 $\dots\dots\dots 103$

16. 破坏了集的可测性和零测度的一个闭区间的拓扑映射 $\dots\dots\dots 105$

17. 可测的非 Borel 集 $\dots\dots\dots 105$

18. 两个并非相差一个常数的连续函数, 却具有几乎处处相同的导数 (在有限或无穷的意义上) $\dots\dots\dots 105$

19. $[0, 1]$ 内测度等于1的第一范畴的集	106
20. $[0, 1]$ 内测度等于零的第二范畴的集	106
21. 非 F_σ 集的零测度集	107
22. 集的测度为零, 而没有函数——Riemann 可积或否—— 能以它作为间断点集	107
23. $[0, 1]$ 内两个完备疏集是同胚的, 但只有一个为零测度	108
24. 两个不相交的非空疏实数集, 任一集的每个点都是另一 集的极限点	109
25. 属于不同范畴的两个同胚的实数集	109
26. 两个同胚的实数集, 一个是稠密集, 另一个是疏集	111
27. 定义于 $\mathbb{R}$ 上的一个几乎处处等于零的函数, 它在每个非 空开区间上的值域都是 $\mathbb{R}$	111
28. $\mathbb{R}$ 上的一个函数, 它的图形在平面内稠密	112
29. 一个函数 f , 处处适合 $0 \leq f(x) < +\infty$, 但在每个非空开 区间 (a, b) 上 $\int_a^b f(x)dx = +\infty$	112
30. 一个连续的严格单调函数, 其导数几乎处处等于零	113
31. 有界半连续函数, 它既不 Riemann 可积, 也不与 Rie- mann 可积函数等价	113
32. 一个有界可测函数, 它不与 Riemann 可积函数等价	113
33. 连续函数的有界单调极限, 它既不 Riemann 可积, 也不 与 Riemann 可积函数等价	113
34. Riemann 可积函数 f 和连续函数 g 都定义于 $[0, 1]$ 上, 但复合函数 $f(g(x))$ 在 $[0, 1]$ 上既不 Riemann 可积, 也 不与 Riemann 可积函数等价	114
35. 闭区间上的一个有界函数有原函数, 但不 Riemann 可 积	115
36. 一个函数, 它的广义(Riemann)积分存在, 但不 Lebesgue 可积	116
37. Lebesgue 可测但不 Borel 可测的函数	117

88. 可测函数 $f(x)$ 和连续函数 $g(x)$, 而复合函数 $f(g(x))$
不可测117

39. 连续单调函数 $g(x)$ 和连续函数 $f(x)$, 适合

$$\int_0^1 f(x) dg(x) \neq \int_0^1 f(x) g'(x) dx \dots\dots\dots 117$$

40. 按照不同意义收敛的函数序列117

41. 测度空间 (X, S) 上的测度 μ 关于另一个测度 ν 绝对连续, 但不存在函数 f , 使得对于所有的 $E \in S$, 成立

$$\mu(E) \leq \int_E f(x) d\nu(x) \dots\dots\dots 120$$

第二篇 多维的问题

第九章 二元函数123

引言123

1. 分别对于各个变量连续的间断函数123

2. 一个二元函数在原点没有极限, 但沿着任一直线逼近原点时又给出了极限值为零124

3. 前例的改进124

4. 处处都有一阶偏导数的间断(从而也不可微)二元函数125

5. 以下三种极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y), \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y), \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$$

恰有两个存在并且相等的函数 f 125

6. 三种极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y), \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y), \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$$

恰有一个存在的函数 f 126

7. $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$ 都存在但不相等的函数 f 127

8. 函数 $f(x,y)$ 有 $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = g(x)$ 存在并于 x 一致,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = h(y)$ 存在并于 y 一致, 又有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} h(y)$, 但是 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在127

9. 可微但不连续可微的二元函数	128
10. 二阶混合偏导数不相等的可微函数	128
11. 两个自变量 x 和 y 的连续可微函数 f , 在平面区域 R 内 $\partial f/\partial y$ 恒等于零, 但是 f 在 R 内并非与 y 无关	129
12. 不是齐性的, 但是局部齐性的连续可微的二元函数	130
13. 在原点没有极值的可微二元函数, 如限定于通过原点的 任一直线上, 则函数在原点有严格的相对极小值	131
14. 前例的改进	131
15. 一个函数 f , 对于它, $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy \neq \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy,$ 尽管每个积分都是正常积分	132
16. 一个函数 f , 对于它, $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy,$ 虽然每个积分都是正常积分	133
17. 二重级数 $\sum_{m,n} a_{mn}$, 虽然按行或按列都有收敛性, 但是 $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$	133
18. 微分 $Pdx + Qdy$, 在平面区域 R 内是局部恰当的; 但不 是恰当的	134
19. 定义于单连通区域内的不具有向量势的螺线向量场	136
第十章 平面集	138
引言	138
1. 距离为零的两个不相交的闭集	140
2. 有界平面集而没有包含它的最小闭圆盘	140
3. 不是简单弧的“薄”连通集	141
4. 两个不相交的平面通路, 包含于同一个正方形内且各自 连接两个对顶点	141
5. 区间 $[0, 1]$ 到正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的一个映射	143
6. 平面内的一个填满空间的弧	143