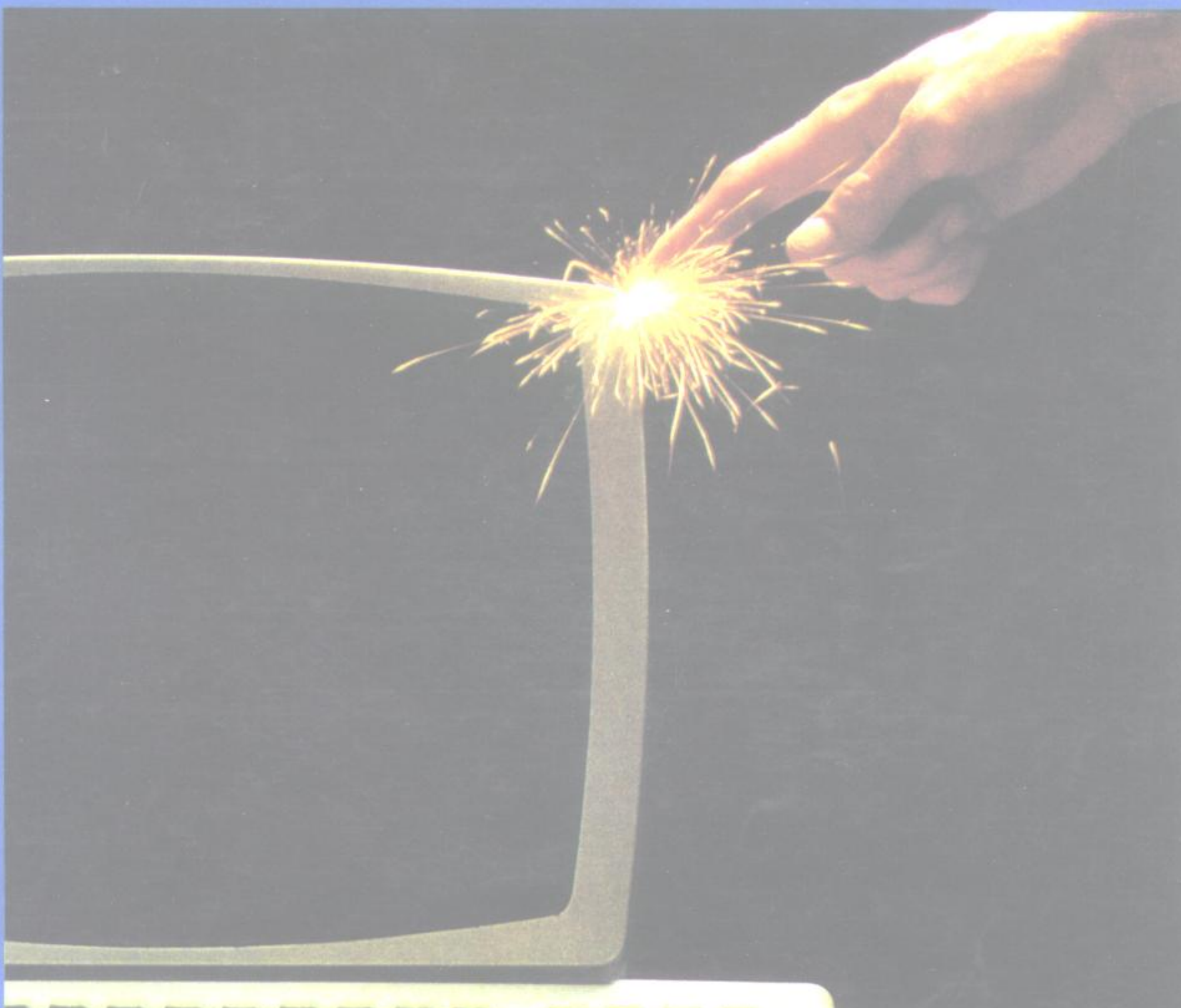
中国计算机软件专业技术资格和水平考试自学丛书

基础数学

张立昂 编著

清华大学出版社



中国计算机软件专业技术
资格和水平考试自学丛书

基础数学

张立昂 编著

清华大学出版社

内 容 提 要

本书是“中国计算机软件专业技术资格和水平考试自学丛书”之一，包括三部分内容：解析几何、微积分和线性代数。本书着重叙述基本概念、主要定理和性质、运算规律以及应用，并通过例题介绍常用的解题方法。

本书适用于考生复习，可供考生和其它人员自学或参考，也可作为理工科及经济管理类各专业的基础数学教材。

(京)新登字 158 号

基 础 数 学

张立昂 编著

责任编辑 尹芳平

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16 印张：17¾ 字数：408 千字

1993 年 11 月第一版 1993 年 11 月第一次印刷

印数：0001—8000

ISBN 7-302-01330-6/TP · 515

定价：12.20 元

前　　言

本书是根据“中国计算机软件专业技术资格和水平考试考试大纲”的要求编写的，是“中国计算机软件专业技术资格和水平考试自学丛书”之一。本书共包括三部分内容：解析几何（第3、4、5章）、微积分（第6章至第13章）和线性代数（第2章、第14章至第18章）。

本书着重叙述基本概念、主要定理和性质、运算规律以及应用，并通过例题介绍常用的解题方法，而略去理论性较强的定理证明。作为一本以帮助考生复习为主要目标的教材，本书力求简洁、精炼、准确，用较短的篇幅全面完整地介绍大纲规定的内容。同时，也考虑到其他可能的读者。本书仍是一本体系完整的教材，也可供任何具有高中文化程度的人员自学。就其内容而言，高等数学（通常指解析几何和微积分）和线性代数不但是计算机软件专业的基础数学，也是所有理工科专业和经济管理类专业的基础数学，因此本书也可供从事这些专业的人员使用。由于笔者的水平所限，恐怕很难达到这些预想的要求，恳请读者批评指正。

编　者

1993年春于燕园

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

1.1　数轴与平面直角坐标系

在一条直线上取定一点 O 和单位长度，并指明直线的正方向，这样就得到一条**数轴**，点 O 称作数轴的**原点**。数轴上的一点 M 和一个实数 x 对应：点 M 到 O 的距离等于 x 的绝对值。当 M 在的点 O 的正方向一侧时，$x>0$；相反地，$x<0$。x 称作点 M 的**坐标**。原点 O 的坐标为 0。这样，数轴上的点与实数之间建立了一一对应的关系。点 M 也称作点 x。

在平面上取两条相互垂直的数轴，它们有共同的原点（交点）和相同的单位长度，这样就得到一个**平面直角坐标系**。通常，一条轴是水平的，正方向从左向右，称作**横轴**或 **x 轴**；另一条是铅直的，从下向上，称作**纵轴**或 **y 轴**。这个坐标系记作坐标系 Oxy。由于 x 轴的正方向按右手姆指向上时四指弯曲的方向（即逆时针方向）旋转 90°后与 y 轴的正方向重合，故称这样的坐标系为右手系。

给定平面直角坐标系，设 M 是平面上的一点。过点 M 作 x 轴的垂线，垂线与 x 轴的交点称作点 M 在 x 轴上的投影。投影的坐标 x 称作点 M 的**横坐标**或 **x 坐标**。类似地，点 M 在 y 轴上的投影的坐标 y 称作 M 的**纵坐标**或 **y 坐标**。这对有序数 (x,y) 称作点 M 的坐标。这样，在平面上的点与实数对 (x,y) 之间建立了一一对应的关系。今后，点 M 也可称作点 (x,y)，或点 $M(x,y)$。见图 1.1。

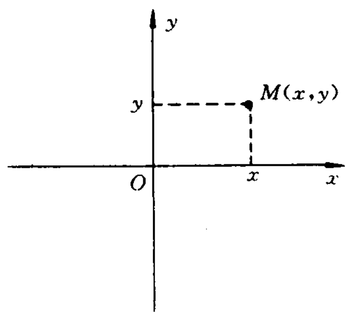


图　1.1

平面直角坐标系把平面划分成四个象限，各象限内点的坐标的符号如图 1.2 所示。x 轴上的点的坐标为 $(x,0)$，y 轴上的点的坐标为 $(0,y)$，原点的坐标为 $(0,0)$。

两点的距离　设两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$。由勾股定理（图 1.3），A、B 之间的距离为 $|AB|=\sqrt{|AC|^2+|BC|^2}$，即

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.1}$$

定比分点　设 A、B 是数轴上的两点，记

$$AB=\begin{cases}|AB| & \text{若 } A \text{ 到 } B \text{ 的方向与数轴同向}\\ 0 & \text{若 } A \text{ 与 } B \text{ 重合}\\ -|AB| & \text{若 } A \text{ 到 } B \text{ 的方向与数轴反向}\end{cases}$$

把 AB 称作**有向线段** $\overline{AB}$ 的长。设 A 的坐标为 x_1，B 的坐标为 x_2，则 $AB=x_2-x_1$。

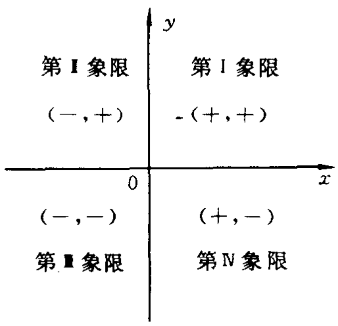


图 1.2

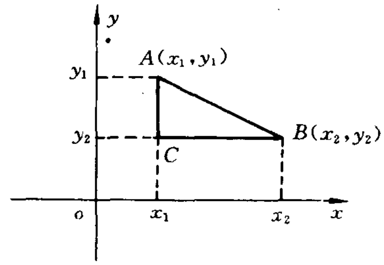


图 1.3

给定数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，在数轴上求一点 M，使$\frac{AM}{MB}=\lambda$，设 M 的坐标为 x，则$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$，解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \tag{1.2}$$

点 M 称作有向线段$\overline{AB}$的比为 λ 的**定比分点**。当 $\lambda>0$ 时，M 在 A、B 的连线上，称作内分点；当 $-1<\lambda<0$ 时，M 在$\overline{BA}$的沿长线上；当 $\lambda<-1$ 时，M 在$\overline{AB}$的沿长线上。当 $\lambda<0$ 时，M 称作外分点。取 $\lambda=1$，得到线段 AB 中点的坐标 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$。

设点 A,B 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，求有向线段$\overline{AB}$(此时认为 A,B 所在的直线是一数轴)的定比分点 M 的坐标。设 A，B，M 在 x 轴上的投影为 A_1,B_1,M_1。由图 1.4，

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1}=\frac{AM}{MB}$$

即 M_1 是$\overline{A_1B_1}$的具有相同比值的定比分点。A,B,M 在 y 轴上的投影也与此类似。故 M 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1-\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{1.3}$$

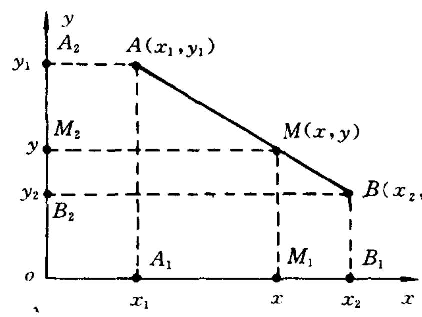


图 1.4

取 $\lambda=1$，得到线段 AB 中点的坐标 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$。

1.2 变量与函数

在某个过程或所研究的问题中，数值不变的量称作**常量**，可以取不同数值的量称作**变量**。任何变量，总有一定的变化范围。当变量的变化是连续的时候，常用区间来表示变量

的变化范围。

设 $a<b$，满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体记作 $[a,b]$，称作**闭区间** ab。它对应于数轴上以 a 和 b 为端点、包含 a 和 b 在内的线段上的所有的点。而满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体记作 (a,b)，称作**开区间** ab。它也对应于数轴上以 a 和 b 为端点的线段，但不包含端点 a 和 b 在内。类似地，还有**半开半闭区间** $(a,b]$ 和 $[a,b)$，它们分别表示满足不等式 $a<x\leqslant b$ 和 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体。当不需要强调是否包含端点时，简称作区间，并记作 (a,b)。

如果区间的一端可以无限延伸，则称作无限区间或无穷区间。例如，满足不等式 $x\geqslant a$ 的实数 x 的全体记作 $[a,+\infty)$。相应地，这时也可把不等式写成 $a\leqslant x<+\infty$，在数轴上，它是 a（包含 a 在内）右边所有的点。这里 ∞ 是一个符号，读作"**无穷大**"，$+\infty$ 读作"**正无穷大**"。类似地，还有 $(a,+\infty)$，$(-\infty,a]$，$(-\infty,a)$，它们分别表示满足不等式 $x>a(a<x<+\infty)$，$x\leqslant a(-\infty<x\leqslant a)$，$x<a(-\infty<x<a)$ 的实数 x 的全体。而实数全体（整个数轴）可表示成 $-\infty<x<+\infty$，记作 $(-\infty,+\infty)$。这里 $-\infty$ 读作"**负无穷大**"。

在所研究的问题中，往往有几个变量，它们不是彼此孤立的，而是按照一定的规律相互联系着。设 x 和 y 是两个变量，如果对于 x 在允许的变化范围内的每一个值，y 都有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$。x 称作**自变量**，y 称作**因变量**，f 称作**函数记号**。自变量 x 允许变化的范围称作函数的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}\ f$。y 的取值范围称作函数的**值域**，记作 $\mathrm{ran} f$。如果对于每一个 $x\in \mathrm{dom}\ f$，$f(x)$ 都是唯一的一个值，则称 $f(x)$ 是**单值函数**，否则称作**多值函数**。通常所说的函数多半都是指单值函数。对于多值函数，往往把它们分解成多个单值函数来研究。

设 $y=f(x)$。如果反过来把 y 作为自变量，x 作为因变量，由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称作函数 $f(x)$ 的**反函数**。即，对每一个 $y\in \mathrm{ran}\ f$，对应的 $x=\varphi(y)$ 满足条件 $f(x)=y$。$f(x)$ 的反函数记作 $f^{-1}(y)$。例如，$y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $[1,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$。$x=y^2+1(y\geqslant 0)$ 是它的反函数。

设 $y=f(x)$，$z=g(y)$，那么 z 也是 x 的函数，称作由 $y=f(x)$ 和 $z=g(y)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $z=g(f(x))$。y 称作**中间变量**。例如，$y=\sqrt{x-1}$ 可以看作由 $u=x-1$ 和 $y=\sqrt{u}$ 复合而成的复合函数。

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常数称作**基本初等函数**。由基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的函数称作**初等函数**。初等函数是最经常使用的函数。

函数的概念可以推广到二个和二个以上自变量的情况。设 x,y,z 是三个变量，如果对于某个范围内的每一对 (x,y) 都有确定的 z 值与之对应，则称 z 是 x,y 的**二元函数**，记作 $z=f(x,y)$。x,y 称作**自变量**，z 称作**因变量**。(x,y) 允许的取值范围称作函数 $f(x,y)$ 的**定义域**。(x,y) 可以看作平面上的点，因而二元函数又可以看作平面上的点的函数。二元函数的定义域是平面上的一个区域。

类似地，还可以有**三元函数**、**四元函数**、……，以及一般地，**n 元函数**。二元和二元以上的函数统称为**多元函数**。

1.3 函数的特性与函数图形

如果曲线 C 上的点的坐标 (x,y) 都满足函数关系 $y=f(x)$，并且所有满足函数关系 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 都在 C 上，则称曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的**图形**。

有界性 设函数 $f(x)$ 在 L 上有定义（L 可以是 $f(x)$ 的定义域，也可以是定义域的一部分）。如果存在 M 使得

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in L$$

则称函数 $f(x)$ 在 L 上**有界**；否则称 $f(x)$ 在 L 上**无界**。如果 $f(x)$ 在 L 上有界，则 $f(x)$ 的图形在 L 上夹在两条平行于 x 轴的直线之间（图 1.5）。例如，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对所有的 x，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$。而 $\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界。

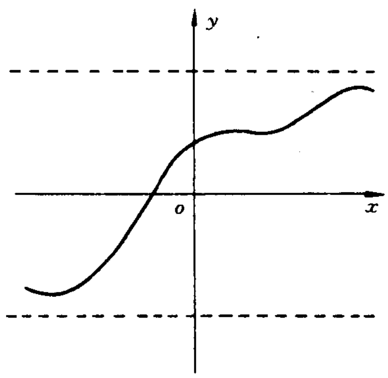


图 1.5

单调性 设函数在区间 (a,b) 上有定义，这里 a 可以是 $-\infty$，b 可以是 $+\infty$。如果 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内**单调增加**（**单调减少**）。如果对 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内**严格单调增加**（**严格单调减少**）。单调增加的函数和单调减少的函数统称**单调函数**。如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调，则称 (a,b) 是 $f(x)$ 的**单调区间**。例如，x^2 在 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的。当函数严格单调增加（单调增加）时，函数曲线从左到右是上升的（非降的），见图 1.6(a)；当函数严格单调减少（单调减少）时，函数曲线从左到右是下降的（非升的），见图 1.6(b)。

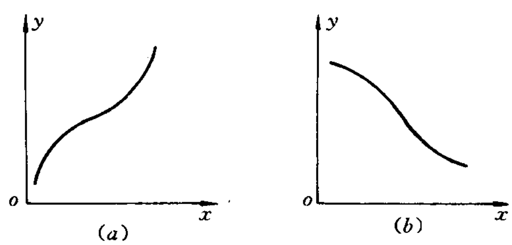


图 1.6

奇偶性 如果对于定义域内的每一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**偶函数**。如果对于定义域内的每一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**。例如，x^2，$\cos x$ 是偶函数，x^3，$\sin x$ 是奇函数。而 e^x，x^2+1 既不是偶函数，也不是奇函数。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，见图 1.7(a)；奇函数的图形是关于原点对称的，见图 1.7(b)。

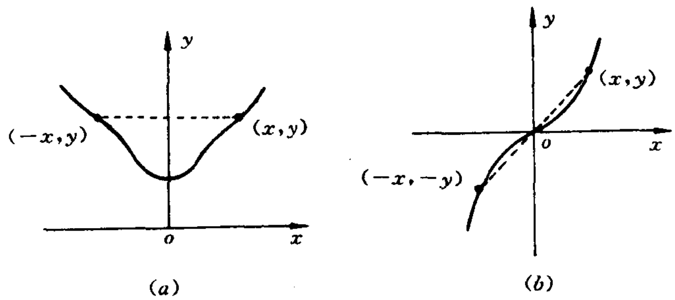


图 1.7

周期性 如果存在不为零的 l 使得，对于定义域内的每一个 x 都有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**周期函数**。这样的 l 中的最小正数称作 $f(x)$ 的**周期**。例如，$\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数。对任意的整数 k，以 l 为周期的周期函数的图形在 $[kl,(k+1)l]$ 上的形状是一样的，如图 1.8 所示。

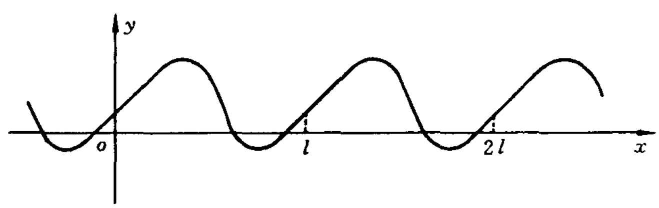


图 1.8

反函数的图形 设 $\varphi(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数。在同一个坐标系 oxy 中，显然 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 的图形是同一条曲线。若反函数也以 x 作自变量，即写成 $y=\varphi(x)$，试问 $y=\varphi(x)$ 和 $y=f(x)$ 的图形有什么关系？由于 $b=f(a)$ 当且仅当 $a=\varphi(b)$，故 (a,b) 在曲线 $y=f(x)$ 上当且仅当 (b,a) 在 $y=\varphi(x)$ 上。而 (a,b) 与 (b,a) 是关于第Ⅰ象限和第Ⅲ象限的角平分线对称的两点，因此 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于这条直线对称的，如图 1.9 所示。

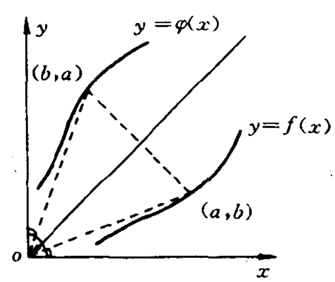


图 1.9

1.4 几个记号和术语

1. 属于号 $\in$

如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"。例如，如果 $0\leqslant x\leqslant 1$，那么 x

是闭区间[0,1]上的一个点，可记作 $x\in[0,1]$。类似地，$x\in(0,1)$表示 $0<x<1$。若 D 是一个平面区域，则$(x,y)\in D$ 表示(x,y)是 D 内的一点。

2. 连加号$\sum$与连乘号$\prod$

若干个数的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n \tag{1.4}$$

$\sum$叫做连加号或求和号，a_i 表示一般项或通项，连加号上下的"$i=1$"和"n"表示 i 的取值范围，即对 $i=1,2,\cdots,n$ 求和。例如

$$\sum_{i=1}^{n}i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

(1.4)式中的 i 称作求和指标，和式与指标的记法无关。如(1.4)式又可记作 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$，即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{j=1}^{n}a_j$$

显然

$$\sum_{i=1}^{n}(ka_i) = k\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

设有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$，将它们排成一个矩形阵列

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

那么

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in} \tag{1.5}$$

是阵列中第 i 行的 n 个数之和。在这个式子中求和指标是 j，i 不是求和指标、而是某个固定的值。对于不同的 i，(1.5)式表示阵列中不同行的和。类似地，阵列中第 j 列的 m 个数之和为

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij} = a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}) \\ &= (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) \\ &\quad +\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})\end{aligned} \tag{1.6}$$

它是这 $m\times n$ 个数的和。这是二重求和，用两个连续的连加号表示。(1.6)式是先对阵列的

每一行求和，得到 m 个数，再把这 m 个数加起来。当然，也可以先对阵列的每一列求和，得到 n 个数，再把这 n 个数加起来。这时应写成下述二重求和的形式：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}&=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})\\&=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})\\&\quad+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn})\end{aligned}$$

这个和式仍等于这 $m\times n$ 个数的和，故

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \tag{1.7}$$

连乘号 $\prod$ 的用法与 $\sum$ 类似，$\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$，

例如 $\prod_{i=1}^{n}i=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n=n!$，$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)=(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$。

3. 充分必要条件

设 A 和 B 是两个命题。如果 A 成立，则 B 也成立，那么称 B 是 A 的**必要条件**，A 是 B 的**充分条件**。如果 B 既是 A 的充分条件、又是 A 的必要条件，那么称 B 是 A 的**充分必要条件**。例如，若 $x>1$，则 $x^2>1$。因此，“$x>1$”是“$x^2>1$”的充分条件，“$x^2>1$”是“$x>1$”的必要条件。但“$x>1$”不是“$x^2>1$”的必要条件，“$x^2>1$”也不是“$x>1$”的充分条件。“$x^2>1$ 且 $x>0$”是“$x>1$”的充分必要条件。

根据定义，若 A 是 B 的充分条件，则 B 是 A 的必要条件；若 A 是 B 的必要条件，则 B 是 A 的充分条件；若 A 是 B 的充分必要条件，则 B 也是 A 的充分必要条件。显然，“A 的充分必要条件是 B”相当于“当 A 成立时 B 成立，并且当 B 成立时 A 成立”，后一句话可以说成“A 成立当且仅当 B 成立”，或更简单地说“A 当且仅当 B”。例如，$x^2>0$ 当且仅当 $x\neq0$。

习　题　1

1. 求点 $A(4,7)$ 关于 x 轴、y 轴、原点的对称点的坐标。

2. 证明点 (a,b) 关于第Ⅰ象限和第Ⅲ象限的角平分线的对称点是 (b,a)；关于第Ⅱ象限和第Ⅳ象限的角平分线的对称点是 $(-b,-a)$。

3. 求下列两点之间的距离：

(1) $(1,-2)$ 和 $(-2,2)$；　(2) $(-6,3)$ 和 $(0,-5)$。

4. 求与 $A(2,2)$，$B(-5,1)$ 和 $C(3,-5)$ 三点距离相等的点。

5. 已知 $A(3,8)$，$B(6,2)$，求有向线段 $\overline{AB}$ 的比值为 λ 的定比分点，其中 λ 的值为：

(1) 0.5；　(2) 2；　(3) -0.5；　(4) -2。

6. 设 M_1 和 M_2 将线段 AB 等分成三段，其中 $A(-1,0)$，$B(5,6)$，求 M_1 和 M_2 的坐标。

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\0 & x=0\\x & x<0\end{cases}$$