

结构力学的计算机方法

Jiegou Lixue de Jisuanji Fangfa

结构力学的计算机方法

阳日 梁琨 编著

重庆大学出版社

重庆大学出版社

1991.4

结构力学的计算机方法

阳 日 梁 琨 编著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书把结构力学的基本原理与计算机方法结合起来,指导读者编出结构力学的计算机程序。书中内容完整,把杆系结构力学中的主要问题和弹性力学平面问题都编成了计算机程序,并介绍了编制这些程序的理论和方法。适合大专院校开设结构力学课的各类专业师生作为相应选修课教材使用,也适合于工程技术人员阅读参考。

结构力学的计算机方法

阳 日 梁 琨 编著

责任编辑 谭 敏

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重 庆 印 制 第 一 厂 印 刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 15.75 字数: 393 千

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数: 1—6000

标准书号: ISBN 7-5624-0188-8 定 价: 3.16 元
TP·9 (课)

前 言

电子计算机已在我国获得了广泛的应用。目前在土建、水利、道桥等工程中，解决一定规模的结构分析问题，如果不使用计算机是不可想象的。结构力学的内容日益与计算机方法密切结合起来，结构力学的进一步发展也必须与计算机方法结合起来。为了便于高等院校学生和工程技术人员学习掌握用电子计算机解决结构力学问题的方法，各校都相继开设了相应的选修课程。为此，我们编写了这本书，作为选修课的教材。

本书立足于杆系矩阵位移法和平面有限单元法这类成熟的、基本的和实用的方法。着重介绍如何把力学的基本原理与计算机方法结合起来，指导读者编出结构力学的计算机程序。各章叙述的原理和计算机方法都用细框图的形式表示出来。可以根据这些细框图用读者熟悉的计算机语言编出计算机程序。

各章都附有用BASIC语言编写的源程序供读者阅读参考。这些程序都在IBM-PC/XT微机上调试通过，可供实际应用。

本书第一、五、六章由阳日编写。第二、三、四章由梁琨编写，全书由阳日统稿。

由于我们水平有限，书中难免存在缺点或错误，恳请读者批评和指正。

编著者

1988. 2

目 录

前 言

第一章 杆系结构静力分析	1
§ 1-1 基本原理	1
§ 1-2 单元刚度矩阵	5
§ 1-3 单元刚度矩阵的坐标变换	9
§ 1-4 用结构整体坐标表示的单元刚度矩阵	15
§ 1-5 结构分析的刚度法	17
§ 1-6 荷载向量的形成	24
§ 1-7 用直接刚度法集成总刚度矩阵	27
§ 1-8 由结点位移求杆端力	31
§ 1-9 等带宽二维数组贮存总刚度矩阵	31
§ 1-10 变带宽一维数组贮存总刚度矩阵	36
§ 1-11 结构分析程序设计方法及实例	41
第二章 梁的影响线与内力包络图	59
§ 2-1 概述	59
§ 2-2 影响矩阵的概念	61
§ 2-3 影响线的应用	62
§ 2-4 简支梁内力包络图与绝对最大弯矩计算程序设计基本原理	71
§ 2-5 简支梁内力包络图与绝对最大弯矩计算程序	75
§ 2-6 连续梁内力包络图计算程序设计基本原理	92
第三章 梁及平面刚架极限荷载分析	99
§ 3-1 一般概念	99
§ 3-2 极限荷载计算的机动法与静力法	101
§ 3-3 极限荷载计算的矩阵位移法	107
§ 3-4 结构极限荷载计算程序框图	112
§ 3-5 结构极限荷载计算源程序	115
§ 3-6 结构极限荷载分析电算例题	131
第四章 结构的稳定分析	136
§ 4-1 概述	136
§ 4-2 压杆单元刚度方程	140

§ 4-3	刚架稳定分析的直接刚度法	147
§ 4-4	参考压杆单元的临界荷载参变量(ν_{OR})(σ_c)和压杆单元计算长度系数 λ	150
§ 4-5	刚架稳定分析的计算程序	151
§ 4-6	结构稳定分析电算例题	163
第五章 多自由度体系动力分析		167
§ 5-1	多自由度体系自由振动微分方程	167
§ 5-2	振型向量和振型的正交性	170
§ 5-3	迭代法求自由振动频率和振型	174
§ 5-4	多自由度体系无阻尼强迫振动计算——振型分解法	176
§ 5-5	刚架的简约振动	177
§ 5-6	刚架自由振动程序设计	183
§ 5-7	平面刚架动力计算程序(DAF)	186
第六章 平面问题的静力分析		198
§ 6-1	方法的一般介绍	198
§ 6-2	弹性力学平面问题的基本方程	199
§ 6-3	最小势能原理	201
§ 6-4	简单三角形单元的单元分析	205
§ 6-5	四结点矩形单元的单元分析	215
§ 6-6	六结点三角形单元的单元分析	221
§ 6-7	结构的刚度方程和总刚度矩阵	227
§ 6-8	应力计算	228
§ 6-9	程序实例	229
参考书目		246

第一章 杆系结构静力分析

§ 1-1 基本原理

随着电子计算机的广泛应用,在建筑结构计算中也逐渐形成了一套适应电子计算机的计算方法,这就是矩阵分析方法。矩阵分析方法后来进一步发展成为一套完整的系统的进行结构分析的理论——有限单元法。

有限单元法把结构划分为单元,在杆系中,单元就是一段直杆。在连续体结构中,单元是人为划分为不同形状的,有三角形、矩形等单元。单元与单元之间用结点连结,荷载作用在结点上。

用有限单元法解题时,应用得最普遍的是以结点位移为未知数的有限单元位移法。

有限单元法虽然理论上比较成熟,适用性比较广,但由于它计算时要求计算机容量比较大,计算时间比较长,在微机上使用时,其解题能力受到一定的限制。所以,有限单元法还需要进一步发展,以适合我国的具体情况,做到小机器能够解决大问题。

1. 结构离散化

把结构划分成有限个单元,对于杆系结构,单元就是一段直杆,把结构视为由有限个直杆组成的集合体,要使这个离散化了的体系的应力和变形与原结构相同,要求在受力变形过程中单元内部及单元之间要满足变形协调条件,即单元内部各部分之间不发生破裂,单元与单元之间也不发生分离和重叠等现象,单元与单元联结的结点上受的力以及单元本身必须满足平衡条件,单元的应力与变形之间还应满足虎克定律等。

在杆系结构中,若单元只受轴力作用,则称为轴力单元,如桁架。若单元不仅受轴力,还受弯矩、剪力作用,这样的单元就是梁单元,如刚架。有些结构本来具有曲线轮廓,但我们可以把它视为由一段段直杆组成,把它离散为若干个直杆单元进行近似计算(图1.1.1d)。

若结构是一块平板,也可以假想地将它分割成一个个的三角形或矩形单元,各单元在三角形或矩形的顶点互相铰接(图1.1.1e、f)。同理,如果结构是块体,也可以将块体分割成四面体或六面体单元。进一步研究还可以发现,结点不一定只设在单元的顶点,在单元的边上也可以设立若干个结点,以使计算更为精确。

在连续体有限单元法中,由于采用了离散化的体系作为计算对象,计算结果是近似的。但如果单元的特性被描述得越正确,则其计算结果也越接近于真实。

2. 等效结点荷载

有限元法计算中,荷载只作用在结点上,而不作用在单元上。但实际工程中,常常会出现非结点荷载。对于这样的荷载,需要把它们化成等效结点荷载来计算。

等效结点荷载可以根据虚功相等的原则来进行计算。即实际荷载在结构的任一虚位移上做的虚功,应等于等效结点荷载在同一虚位移上所做的虚功。根据这一原则,非结点荷载化成等效结点荷载可按下述方法进行。

设杆上有结间荷载(非结点荷载),首先计算此荷载产生的固端内力 M 、 Q 、 N ,把这些

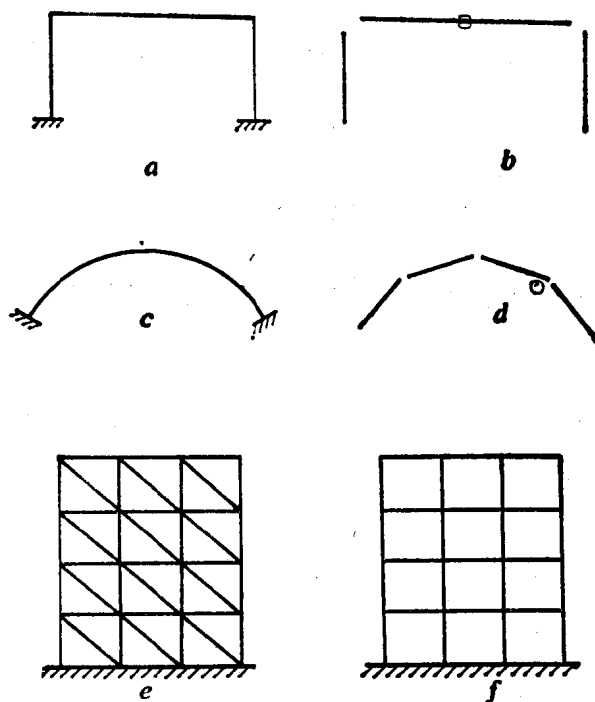


图1.1.1

固端内力反向作用到结点上，就是该结间荷载的等效结点荷载。这时，这个荷载必然满足虚功等效原则。因为荷载与固端内力构成一组平衡力系，这组平衡力系在任何虚位移上做功之和必定为零。所以，荷载做的虚功在数值上应等于固端内力做的虚功。这就证明了固端内力的反向就是该荷载的等效结点力。

但必须指出，这里说的等效是指结点位移等效，即用等效结点荷载来代替原荷载，会使结点的位移完全相同，但两者引起的内力并不完全相等。用等效结点荷载算出的内力还需要加上相应的固端内力后才与原荷载引起的内力相等。

现举一例说明化成等效结点荷载的方法。设一杆长度为 l ，其上作用满跨均布荷载 q ，因而其固端内力为：

$$\bar{Q}_j = \frac{1}{2}ql (\uparrow) \quad \bar{M}_j = \frac{1}{12}ql^2 (\searrow)$$

$$\bar{Q}_k = \frac{1}{2}ql (\uparrow) \quad \bar{M}_k = \frac{1}{12}ql^2 (\swarrow)$$

把固端内力反向作用在结点上，就得到等效结点荷载，

$$P_1 = \frac{1}{2}ql (\downarrow)$$

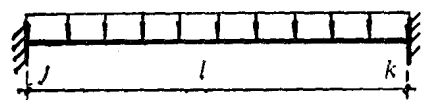
$$P_2 = \frac{1}{12}ql^2 (\curvearrowright)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}ql (\downarrow)$$

$$P_4 = \frac{1}{12}ql^2(\curvearrowright)$$

现可以利用虚功原理验证此结果是正确的。

设给结点 j 向下的虚位移 Δ ，则梁的弹性曲线方程为：



$$y = \Delta \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right)$$

实际荷载在此虚位移上做的虚功为 W_0^* ：

$$\begin{aligned} W_0^* &= \int_0^l q \Delta \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}ql\Delta \end{aligned}$$

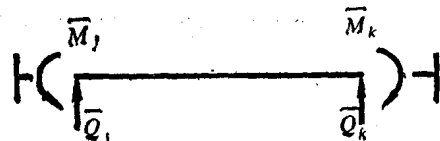


图1.1.2

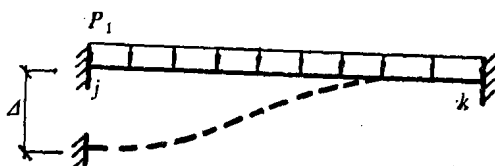


图1.1.3

等效结点荷载在此虚位移上做的虚功为 W_0^* ：

$$W_0^* = \frac{1}{2}ql\Delta$$

可见

$$W_0^* = W_0^*$$

同理，若再给结点 j 转角 θ ，则弹性曲线方程为：

$$y = \theta x \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2$$

这时，荷载的虚功为：

$$W_0^* = \int_0^l q\theta x \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{12}ql^2\theta$$

等效结点荷载的虚功为：

$$W_0^* = \frac{1}{12}ql^2\theta$$

可见，也可以获得相同的结论，即：

$$W_0^* = W_0^*$$

若杆受温度荷载，也可以用类似的方法把它化成等效结点荷载。

设一杆两侧温度分别上升 t_1 和 t_2 度，并假定杆为矩形截面，截面高度为 h ，热膨胀系数为 α 。则杆的固端内力分别为：

$$N_j = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)EA\alpha$$

$$Q_j = 0$$

$$M_j = -\frac{t_1 - t_2}{h}EI\alpha$$

$$N_k = -\frac{1}{2}(t_1+t_2)EA\alpha$$

$$\bar{Q}_k = 0$$

$$M_k = \frac{t_1-t_2}{h}EI\alpha$$

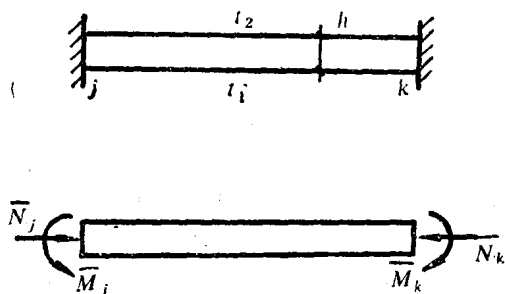


图1.1.4

标原点放在杆单元的左端 j 点上。

作用在杆端的内力称为杆端力，作用在结点上的力称为结点力。

从结构中截取一杆单元，单元受杆端力作用。对于一平面结构，如果把杆端力沿单元坐标方向分解，就得轴力、剪力和弯矩三个分量，单元的两端共有六个杆端力分量(图1.1.5a)如果用 S 表示杆端力向量，则

$$S = \{N_j, Q_j, M_j, N_k, Q_k, M_k\}$$

或
$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$$

现在再来看单元位移。单元从 jk 位置移到 $j'k'$ 位置(图1.1.5b)，杆端产生的杆端位移可用一个向量 u 来表示。

$$u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

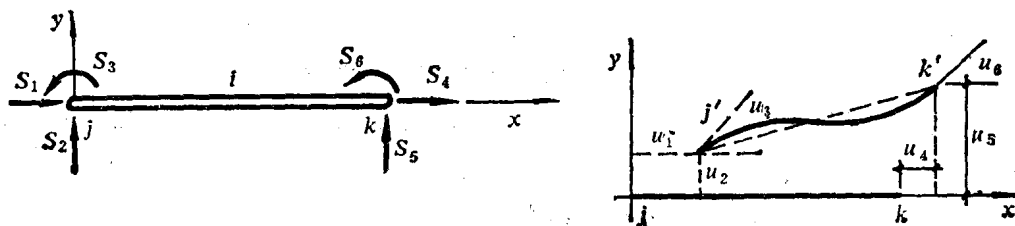


图1.1.5

对于任何类型的单元,单元的杆端力必须与杆端位移一一对应,例如平面桁架单元,杆端位移可以分解为沿 x 方向和沿 y 方向的两个位移分量。因而杆端力也应分解为沿 x 和 y 方向的两个分量。尽管沿单元坐标 y 方向的分力一定为零,但也要留出这一位置以便与 y 方向的位移分量对应。

§ 1-2 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵把单元的杆端力与杆端位移联系起来,如果单元不同,其杆端力不同,则单元刚度矩阵也不相同。推求单元刚度矩阵,可以用有限单元法的一套理论来进行,但对于直杆单元这类简单的单元,我们不必动用这些复杂的理论,而只需要利用结构力学中的一些现成的公式就行了。

一、平面桁架单元

设一桁架单元 jk , j 端的杆端力和杆端位移分别为 S_1 、 S_2 和 u_1 、 u_2 , k 端的杆端力和杆端位移分别为 S_3 、 S_4 和 u_3 、 u_4 , 如图 1.2.1 所示。

由材料力学可知,在轴力 N 作用下,杆端的伸长为:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

如果用杆端力和杆端位移来表示这一关系的话,则轴力 N 就相当于杆端力沿 x 轴方向的分量 S_1 和 S_3 。伸长就相当于位移分量 u_1 和 u_3 。

若假定单元 k 端不动,令 j 端沿 x 轴产生位移 u_1 则:

$$S_1 = \frac{EA}{l} u_1 \quad S_3 = -\frac{EA}{l} u_1$$

其中 S_3 为负表示当 u_1 为沿 x 轴的正方向时, S_3 的方向与 x 轴的方向相反。

同理,当 j 端不动, k 端产生位移 u_3 时,

$$S_1 = -\frac{EA}{l} u_3 \quad S_3 = \frac{EA}{l} u_3$$

当 j 、 k 端都产生位移时,杆端力就应该用矩阵来表示:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (1.2.1)$$

或

$$\mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}$$

其中

$$K^{(i)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

这就是桁架任一单元(i)的单元刚度矩阵, 矩阵中的元素称为刚度系数。

需要注意的是这个单元刚度矩阵是相对于单元坐标系的, 即杆端位移和杆端力都是沿单元坐标系 x 轴或 y 轴方向的, 由于桁架只有轴力, 即沿 y 方向的杆端力分量总是为零的, 所以矩阵中的第二行和第四行的元素均为零。

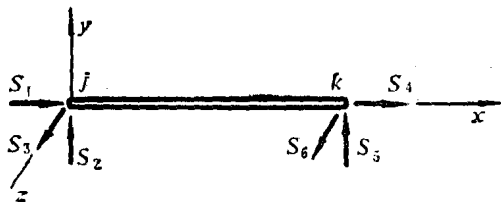


图1.2.2

二、空间桁架单元

与平面桁架的情况类似, 空间桁架单元的杆端力和杆端位移之间的关系可表示为:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (1.2.3)$$

其中, S_1, S_2, S_3 和 u_1, u_2, u_3 是单元 j 端的杆端力和杆端位移沿单元坐标轴 x, y, z 方向的分量, 而 S_4, S_5, S_6 和 u_4, u_5, u_6 则是单元 k 端的杆端力和杆端位移沿单元坐标轴方向的分量。

上式可写为: $S^{(i)} = K^{(i)} u^{(i)}$ (1.2.4)

其中

$$K^{(i)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

即为空间桁架单元的单元刚度矩阵。矩阵中有许多零元素是因为桁架只有轴力, 即只有沿 x 方向的力而其他方向的力均为零的原故。

三、平面刚架单元

平面刚架单元两端都各有三个位移, 即沿 x 和 y 轴方向的线位移和在 xoy 平面内的角位移。两端共有六个位移分量, 因此单元刚度矩阵为六阶, 其每个刚度系数都可根据其物理意

义由结构力学公式直接给出而无需另行推导。

假想把单元两端固定, 消除所有位移, 然后逐一放松约束使杆端产生相应的位移。设放松某一约束而产生相应的单位位移 $u_i=1$, 由这单位位移引起一组杆端力 $S_1, S_2, \dots, S_6$ 。这组杆端力在单元刚度矩阵中将构成一列元素, 依次放松六个位移就获得了单元刚度矩阵中的六行六列元素的数值。

参照图 1.2.3 所示的三种基本位移所引起的杆端力的数值。就可以获得整个单元刚度矩阵中的各元素的数值。单元的杆端力和杆端位移之间的关系为:

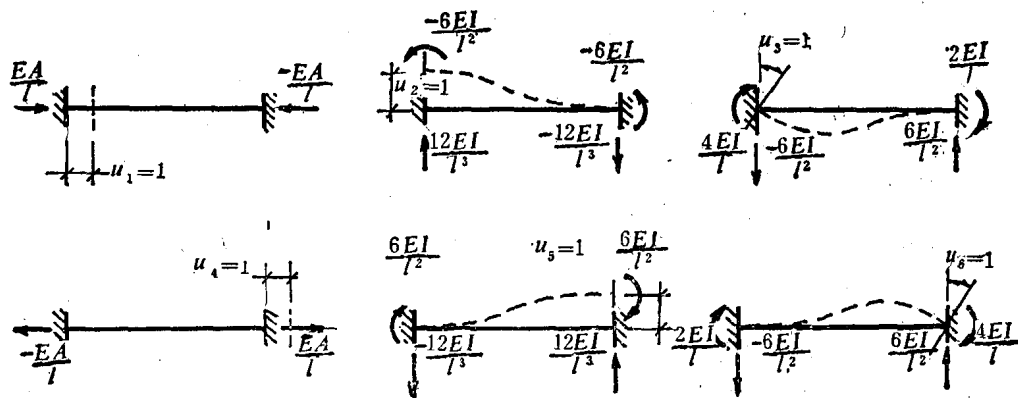


图 1.2.3

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (1.2.6)$$

或可写成: $\mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}$

(1.2.7)

这就是单元的刚度方程, 其中 $\mathbf{K}^{(e)}$ 称为单元刚度矩阵。

$$u_1=1 \quad u_2=1 \quad u_3=1 \quad u_4=1 \quad u_5=1 \quad u_6=1$$

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

单元刚度矩阵中各列的意义：例如当 $u_2=1$ 时，由图(1.2.3)可以看出，各杆端力的数值分别为 $S_1=0$, $S_2=\frac{12EI}{l^3}$, $S_3=-\frac{6EI}{l^2}$, $S_4=0$, $S_5=-S_2$, $S_6=S_3$ 。这些数值都是由结构力学中的公式给出的，这六个数就构成了单元刚度矩阵的第二列。其他各列的意义也相同，即由 $u_i=1$ 引起的杆端力构成了单元刚度矩阵中的第 i 列元素。

单元刚度矩阵还可以分成四个子块，分别表示当杆端产生单位位移时引起的杆端力。

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{jj} & K_{jk} \\ K_{kj} & K_{kk} \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

其中： K_{jj} ——当 j 端产生单位位移时引起 j 端的杆端力。

K_{jk} ——当 k 端产生单位位移时引起 j 端的单位力。

由位移互等定理可知： $K_{jk}=K_{kj}$ 。所以，单元刚度矩阵是一个对称矩阵。

四、空间刚架单元

空间刚架单元每端都有六个杆端力分量和六个杆端位移分量。这六个杆端力分量是沿 x 轴方向的轴力，沿 y 、 z 方向的剪力以及绕 x 轴的扭矩和分别绕 y 、 z 轴的弯矩。见图1.2.4。因而两端共有12个杆端力分量以及相应的杆端位移分量。杆端力分量为：

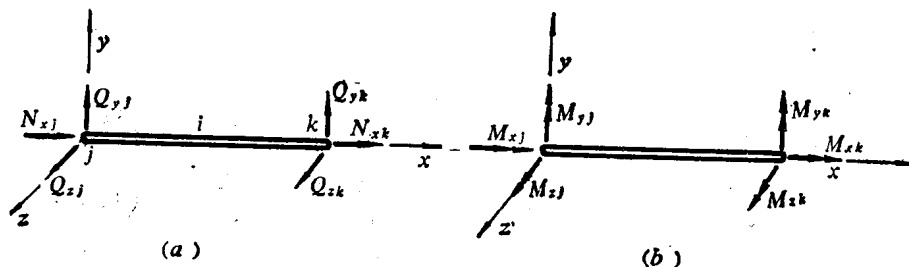


图1.2.4

$$S = \{N_{xj}, Q_{yj}, Q_{zj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{xj}, N_{xk}, Q_{yk}, Q_{zk}, M_{yk}, M_{zk}, M_{xk}\}$$

或

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$$

相应的杆端位移分量为:

$$u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}$$

它们分别表示两端沿坐标轴 x 、 y 、 z 方向的线位移及转角。

单元的杆端力与杆端位移之间的关系, 即单元刚度方程为: $S^{(e)} = K^{(e)} u^{(e)}$ (1.2.10)

其中, 单元刚度矩阵 $K^{(e)}$ 如公式(1.2.11)所示。

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (1.2.11)$$

§ 1-3 单元刚度矩阵的坐标变换

通常, 单元坐标轴与结构坐标轴的方向并不一致 (例如, 有不同方向的斜杆时)。坐标系方向不同的单元的杆端力的方向也不一致。集成总刚度矩阵时, 需要把不同单元的杆端力

进行叠加, 而方向不一致的力是不能进行代数值相加的, 这就需要将杆端力进行适当的坐标变换, 使所有单元的杆端力和杆端位移都换成共同的方向, 即沿整体坐标系的方向。这个变换是通过坐标变换矩阵来进行的。

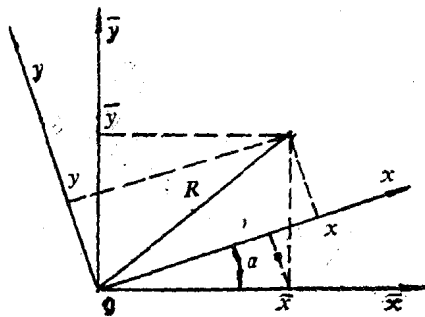


图1.3.1

为 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$, 两坐标系之间的夹角为 α 。则有:

$$x = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha$$

一、坐标变换矩阵

设一向量 $\vec{R}$ 在单元坐标系 xoy 上的投影为 x 、 y , 而在结构整体坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ 上的投影

$$y = -\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha,$$

即

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix}$$

令

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

λ 称为坐标变换矩阵。 α 角为结构整体坐标轴逆时针转至与单元坐标轴重合时转过的角度。平面坐标系的变换相当于坐标面 xoy 绕 O 点 (或绕 z 轴) 逆时针转 α 角。

二、杆端力的坐标变换

1. 平面桁架杆端力的坐标变换矩阵

设已知杆端力沿结构坐标系方向的分量为 $\bar{S}_1$ 、 $\bar{S}_2$ 和 $\bar{S}_3$ 、 $\bar{S}_4$ ，其沿单元坐标轴方向的分量为 S_1 、 S_2 和 S_3 、 S_4 ，因杆端力是向量，符合向量的坐标变换公式，故有：

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \end{Bmatrix}$$

如果把单元两端的杆端力统一起来考虑，则

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \end{Bmatrix}$$

或

$$S = T\bar{S} \quad (1.3.2)$$

其中 T ——平面桁架单元杆端力的坐标变换矩阵。不仅是杆端力，杆端位移也可以用这个矩阵进行变换。

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.3.3)$$

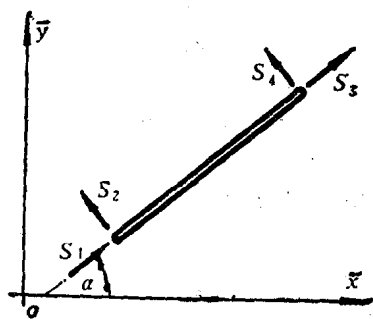


图1.3.2

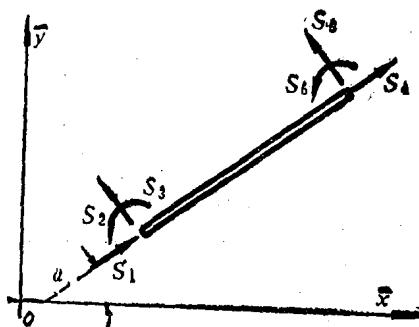


图1.3.3

2. 平面刚架杆端力的坐标变换

平面刚架单元中的杆端力中,除了轴力、剪力分量外,还有弯矩分量,因弯矩也是一个向量,且是垂直于 xoy 平面与 z 轴重合的向量。坐标 xoy 与 xoy 之间的变换实际上就是坐标系绕 z 轴旋转。因而它并不影响弯矩向量对 z 轴的投影。所以:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \end{Bmatrix} \quad (1.3.4)$$

令
$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

λ 即为坐标系绕 z 轴旋转的坐标变换矩阵。

综合考虑平面刚架单元两端的杆端力,则

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{Bmatrix} \quad (1.3.6)$$

或
$$S = T \bar{S} \quad (1.3.7)$$

其中, T 为平面刚架单元杆端力的坐标变换矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

因为 λ 是正交矩阵,即 $\lambda^{-1} = \lambda^T$ 。同理:
 $T^{-1} = T^T$ (1.3.9)

所以,若已知对单元坐标的杆端力向量 S ,要求对结构整体坐标系的杆端力向量 $\bar{S}$,则:

$$\bar{S} = T^T S \quad (1.3.10)$$

3. 空间桁架单元杆端力的坐标变换

设任意空间向量 $\vec{R}$ 在整体坐标轴 $oxyz$ 上的分量为 X 、 Y 、 Z 。现欲求其在单元坐标轴 $oxyz$ 上的分量 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ 。利用向量的投影定理来进行计算,即合向量在某轴

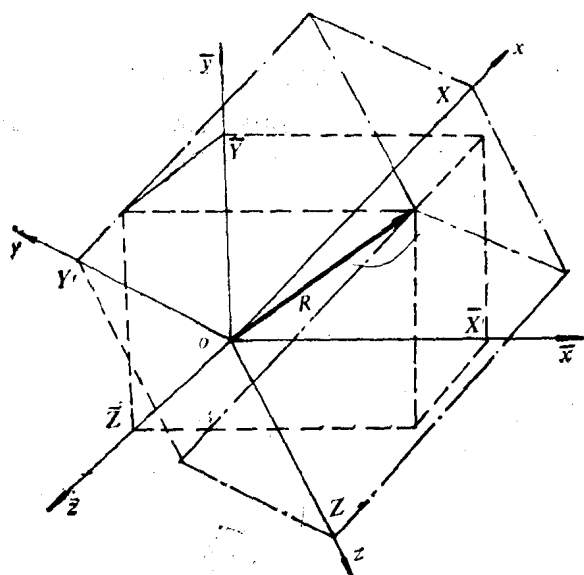


图 1.3.4

上的投影,等于各分向量在该轴上投影的代数和。则有:

$$X = \bar{X} \cos(x, \bar{x}) + \bar{Y} \cos(y, \bar{x}) + \bar{Z} \cos(z, \bar{x})$$