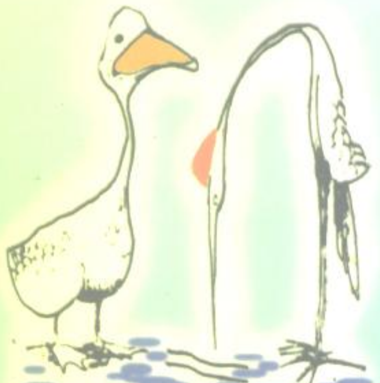
[美] 李学数 著

数学和数学家的故事 2



从平凡中现神奇
速算神童
中国的大数学家陈景润
奇妙的自然数

新 华 出 版 社

数学和数学家的故事

第二集

（美）李学数　著

新　华　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

数学和数学家的故事　第2集/（美）李学数著．-北京：新华出版社，1999.1

ISBN 7-5011-4084-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①数学-普及读物②数学家-生平事迹-世界　Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第39317号

数学和数学家的故事

（第二集）

〔美〕李学数　著

*

新华出版社出版发行

（北京宣武门西大街57号　邮编：100803）

新 华 书 店 经 销

北京机工印刷厂印刷

*

850×1168毫米　32开本　8.75印张　219千字

1999年1月第一版　　1999年1月北京第一次印刷

印数：1—8,000册

ISBN 7-5011-4084-7/O·3　　定价：14.00元

出 版 说 明

本书作者李信明教授，笔名李学数，青少年时代在新加坡读书，毕业于新加坡南洋大学数学系，继而赴加拿大、法国、美国深造，此后在美国大学数学系任教。李信明教授热心数学普及工作，为香港广角镜出版社撰写《数学和数学家的故事》，自80年代初至今陆续出版七集。由于内容丰富，讲述形式生动、多样，深入浅出，富有趣味性，深受读者欢迎，现已发行到第四版。

为满足大陆读者的需要，我们现在出版《数学和数学家的故事》一书的简化字版本。简化字版本分为四集，由于篇幅的限制，内容包括原书前七集，并稍作删节。原书注意介绍数学的新发展，但完稿时间距今已逾十数年，在此期间数学取得了进一步的巨大发展，如费马大定理（一个困惑了世间智者358年的谜）在1995年被证明。这一类新发展原书不可能提及。简化字版按原书付印，我们希望，在今后适当的时机出版增订版本。

目　录

古代巴比伦人的数学成就

灿烂的古巴比伦文化

发源于现在土耳其境内的底格里斯河（Tigris）和幼发拉底河（Euphrates），向东南方流入波斯湾。河流经过现在的叙利亚和伊拉克。

5000 多年前这两河流域称为“米索不达米亚”（Mesopotamia）的地方，就有具有高文化水平的巴比伦民族在这里生活。

巴比伦人建立的巴比伦国在古代曾经非常强盛，它的国王曾建立令后人惊异的著名古代七大奇迹之一——空中花园。

现在我们生活的“星期制度”是源于古代巴比伦。巴比伦人把 1 年分为 12 个月，7 天组成一个星期，一个星期的最后一天减少工作，用来举行宗教礼拜，称为安息日——这就是我们现在的礼拜日。

我们现在 1 天有 24 小时，1 小时有 60 分，1 分有 60 秒这种时间分法就是巴比伦人创立的。在数学上把圆分成 360 度，1 度有 60 分这类 60 进位制的角度衡量也是巴比伦人的贡献。

古代巴比伦人的书写工具是很奇特的，他们利用到处可见的粘泥，制成一块块长方薄饼，这就是他们的“纸”。然后用一端磨尖的金属棒当“笔”写成了“楔形文字”（cuneiform），形成泥

板书。

希腊的旅行家曾记载巴比伦人为农业的需要而兴建的运河，工程的宏大令人惊叹。而城市建筑的豪美，商业贸易的频繁，有许多人从事法律、宗教、科学、艺术、建筑、教育及机械工程的研究，这是当时其他国家少有的。

可是巴比伦盛极一时，以后就衰亡了，许多城市埋葬在黄土沙里，巴比伦成为传说神话般的国土，人们在地面上找不到这国家的痕迹，曾是闻名各地的“空中花园”埋在几十米的黄土下，上面只有野羊奔跑的荒原。

到了19世纪40年代，法国和英国考古学家发掘了古城及获得很多文物，世人才能重新目睹这个在地面上失踪的古国，了解其文化兴盛的情况。特别是英国人拉雅（Loyard）在尼尼微（Nineveh）挖掘到皇家图书馆，两间房藏有二万六千多件泥板书，包含历史、文学、外交、商业，科学、医药的记录。巴比伦人知道500种药，懂得医治像耳痛及眼炎，而生物学家记载几百种植物的名字，及其性质。化学家懂得一些矿物的性质，除了药用外，而且还利用提炼金属。制陶器及制玻璃的水平很高。

有这样高文化水平的民族，他们的数学也该是不错罢？这里就谈谈他们这方面的贡献。

巴比伦人的记数法

巴比伦人用两种进位制：一种是十进位，另外一种是六十进位。

十进位是我们现在普通日常生活中所用的方法，打算盘的“逢十进一”就是其于这种原理。

巴比伦人没有算盘，但他们发明了这样的“计算工具”协助计算。在地上挖三个长条小槽、或者特制有三个小槽的泥块，用

一些金属小球代表数字。

比方说：巴比伦城南的农民交来了 429 袋的麦作为国王的税金，而城东的农民交来了 253 袋的麦。因此国王的仓库增加了 $429 + 253 = 682$ 袋粮食。我们用笔算一下子 就得到答案，可是巴比伦人却是先在泥板的小槽上分别放上：4 个，2 个，9 个的金属球，这代表了 429。然后在置放 4 个金属球的小槽上添加 2 个小球；中间槽上添加 5 个小球；最后的槽上添加 3 个小球。

现在最后一列的小槽有 12 个小球，巴比伦人就取掉 10 个，在中间那个槽里添上 1 个小球——这也就是“逢十进一”。

最后泥板上的数字 682 就是加的结果。这不是很好玩吗？我们可以利用这方法以实物教儿童认识一些大数的加法。

六十进位制目前是较少用到，除了在时间上我们说：1 小时 $= 60$ 分，1 分 $= 60$ 秒外，在其他场合我们都是用十进位制。

可是你知道吗？就是古代的巴比伦人定下一年有三百六十五天，十二个月，一个月有二十九或三十天，每七天为一个星期，一个圆有三百六十度，一小时有六十分，一分有六十秒等等。我们现代还是继续采用。

考古学家在一块长 $3\frac{1}{8}$ 吋，厚 $\frac{3}{4}$ 吋的泥板书上发现了巴比伦人的记数法。（图一）

图一

这泥板的中间从上到下有像（图二）的符号：读者可以看出这是代表：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13。

这泥板书受到盐和灰尘的侵蚀，但可以看到泥板书的右边前

五行是形如：

很明显的这应该代表10，20，30，40，50。

图二

可是接下来的却是这样的符号：

（缺掉三个）

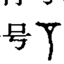
如果用我们前面知道的符号是写成：

1　　1，10　　1，20　（缺三个）　　2　2，10

这是什么意思呢？考古学家猜测那几个符号照上面10，20，30，40，50的次序应该是代表60，70，80，（缺掉的90，100，110），120，130。

是否那个1的符号也可以代表60呢？如果是的话那么1，10

就是代表$60+10=70$。而1，20是代表$60+20=80$。而那个将代表$2\times60=120$了。很明显2，10是代表$120+10=130$。

这样的猜测是合理的，由于巴比伦人没有符号表示“零”，而他们采用的是60进位制，因此同样一个符号可以代表1或60。

没有“零”符号在记数上是很容易产生误会，比方说：可以看成1，$20=1\times60+20=80$或1，0，$20=1\times60^2+0\times60+20=3620$。

到了2000年前巴比伦人才采用表示“零”

因此像代表2，3，0，41即$2\times60^3+3$

$\times 60^2+41=442841$

从巴比伦人小于60的数字的记数可以看出他们懂得“位值原理”。

巴比伦人怎样进行除法运算

从一些泥板书里可以看出下面的对应：

2	30	16	3，45	45	1，20
3	20	18	3，20	48	1，15
4	15	20	3	50	1，12
5	12	24	2，30	54	1，6，40
6	10	25	2，24	1	1
8	7，30	27	2，13，20	1，4	56，15
9	6，40	30	2	1，12	50
10	6	32	1，52，30	1，15	48
12	5	36	1，40	1，20	45
15	4	40	1，30	1，21	44，26，40

如果你在现在的伊拉克的土地上发掘这样的泥板书，你能了解这是什么意思吗？四十多年前考古学家发现这事实上就是巴比伦人的“倒数表”。我现在把以上的表改写：

$$\frac{1}{2}=\frac{30}{60},\quad \frac{1}{3}=\frac{20}{60},\quad \frac{1}{4}=\frac{15}{60}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{12}{60},\quad \frac{1}{6}=\frac{10}{60},\quad \frac{1}{8}=\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}$$

你可以看出这就是把整数 n 的倒数 $\frac{1}{n}$ 用60进的分数来表示。比方说27对应2，13，20意思就是：

$$\frac{1}{27}=\frac{2}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}$$

你会注意到以上的表缺少了：7，11，13，14，17，19，21，23，26，28，31，33，34，35 等等，这是什么原因呢？

原来是这样：巴比伦人只列下以 60 进位制的分数表示式是有限长的那些整数，而这些整数只能是 $2^a3^b5^c$（这里 a，b，c 是大于或等于零的整数）的样子。

对于 7 来说，它的倒数如果是以 60 进位数表示将得到循环分数，即 8，34，17，8，34，17，…一直到无穷。对于 11 也是如此，我们得到 5，27，16，21，49 然后重复以上的样式以至无穷。

为什么要构造这样的“倒数表”呢？

我们在小学学计算：先学加，然后学减。先学乘，然后学除。如果现在要算 $a \div b$，我们可以把这问题转化成为 $a \times (\frac{1}{b})$，这样只要知道 b 的倒数，我们就“化除为乘”，计算有时是会快捷一些。

古代的巴比伦人也懂得这个道理，因此在实际生活上，如在灌溉，计算工资，利息，税项，天文等问题上遇到除的问题，就尽可能将它转变为乘的问题来解决，这时候“倒数表”就很有用了。

我这里没有讲巴比伦人怎么样在 60 进位制上如何加、减、乘、除。兴趣数学的读者可以动脑筋想像如果你是生在 4000 年前的巴比伦，你在小学是怎么样学加、减、乘、除，你可以告诉我你的发现。

巴比伦人在代数方面的贡献

有一块列号为 $AO8862$ 的泥板书向后人揭开了巴比伦人解代数方程的方法，人们惊奇的发现他们的解法是很巧妙的。

泥板书的问题是这样："已知长×宽+长-宽=3，3 而长+宽=27 问长，宽是多少?"

这里是采用 60 进位，故 $(3, 3)_{60}=183$

因此我们令　长$=I$，宽$=w$，则有下面的关系式：

$Iw+I-w=183$，$I+w=27$

巴比伦人引进一个未知数 $v=w+2$，因此 $w=v-2$ 代入以上的式子得

$I(v-2)+I-(v-2)=183$

$I+v-2=27$ 化简得 $Iv-I-v=181$　　$I+v=29$

由于　$I+v=29$，所以 $-I-v=-29$ 故我们有

$Iv=181+29=210$，$I+v=29$

巴比伦人有方法解像下面的代数联立方程

$I+v=p\cdots\cdots$①

$Iv=q\cdots\cdots$②

假设　$I=\frac{p}{2}$，$v=\frac{p}{2}$，则 I，v 满足方程①。可是这解不满足②，因此以上的解应该有误差，假设这误差是 Z，则：

真正的解是　$I=\frac{p}{2}+Z$，$v=\frac{p}{2}-Z$　它们要满足方程②，于是有

$Iv=\left(\frac{p}{2}+Z\right)\left(\frac{p}{2}-Z\right)=\frac{p^2}{4}-Z^2$ 即 $\frac{p^2}{4}-Z^2=q$，故解 Z 得

$$Z=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

现在代回我们得

$$I=\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$v=\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

因此原来的问题的解是：

$$I=\frac{29+\sqrt{(29)^2-4\times210}}{2}=15$$

$$v=\frac{29-\sqrt{(29)^2-4\times210}}{2}=14$$

故 $w=v-2=14-2=12$，而 $I=15$。

巴比伦人解一元二次方程的方法也是很妙的：

比方说求 $x^2-px+q=0$ 的根，设这两个根为 I 和 v，则

$$(x-I)(x-v)=0$$

于是有 $x^2-(I+v)x+Iv=0$

与 $x^2-px+q=0$ 比较，我们就有

$$I+v=p,\qquad Iv=q$$

这样就可以用刚才的解联立方程的方法求得 I，v 了。

在耶鲁大学的巴比伦文物收藏，人们发现一块泥板书曾考虑像下面的：

$$xy=a$$

$$\frac{mx^2}{y}+\frac{ry^2}{x}+2=0$$

的高次方程。

奈克包威尔（Neugebauer）在法国罗浮宫收藏的巴比伦文物发现有两个反映巴比伦对级数有研究的泥板书，记载底下的结果：（这是在 Nabucho donosor 时代）

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1$$

$$1+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3}\right)\times55=385$$

从这里可以看出巴比伦人知道这样的结果：

$$\sum_{i=0}^{n}S^i=\frac{S^{n+1}-1}{S-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

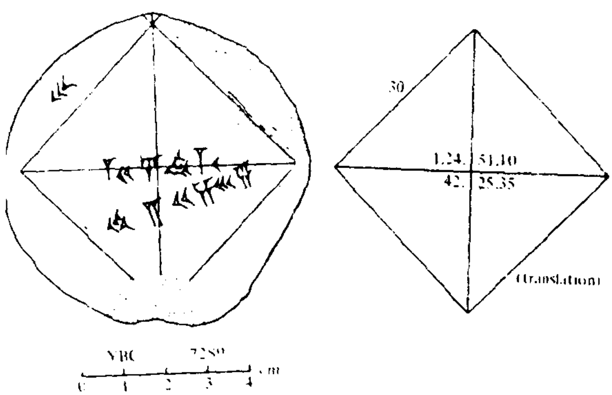
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right]\left[\sum_{i=0}^{n} i\right] = \frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{6}$$

巴比伦人的代数有这样高的程度，的确是令后人感到叹服。

具有高水平的数学知识

现在收藏在美国耶鲁大学图书馆的巴比伦文物，有一块泥板书向后来的人揭露古代的巴比伦人在两三千年前就具有很高水准的数学知识。

两位巴比伦考古学家奈克包威尔（Neugebauer）和萨赫士（Sachs）把这块有一个正方形及两条对角线的数字翻译出来得到了下面的数字（图三）。



图三

我们知道正方形的两条对角线互相垂直，而一个两腰都等的直角三角形，如果一腰是 1 单位长，则其斜边的长是等于$\sqrt{2}$单位。

$\sqrt{2}$这个数在距今 2000 年前的希腊数学家欧几里得的书《几

何原本》证明它不是有理数（rational number），即找不到两个既约整数 p，q 使得

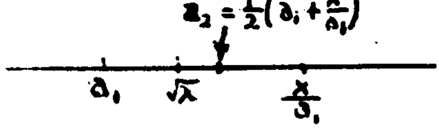
$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

欧几里得是用反证法证明，假定以上的关系成立。在等式两边平方则得 $2=\frac{p^2}{q^2}$，即 $p^2=2q^2$ 因此 p 是偶数，它可以写成 $p=2k$ 的形式。由此我们可以得到 $(2k)^2=4k^2=2q^2$，即 $q^2=2k^2$，同理 q 也是偶数。这样 p，q 就有一个公约数 2，这就和 p，q 是既约整数的假设矛盾。因此$\sqrt{2}$是无理数。

虽然如此，我们仍旧可以用一些分数或小数来表示这个无理数的近似值。在数学上有一种用实数逐渐迫近的方法，牛顿曾经用过，因此有人称这方法为牛顿法，这方法是这样，我们要找比方说$\sqrt{b}$的近似值，取一个 $a_1<\sqrt{b}$，则$\sqrt{b}<\frac{b}{a_1}$，现在我们取

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{b}{a_1}\right)$$

则 a_2 是逐渐靠近$\sqrt{b}$（如图四）。



图四

然后再取 $a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{b}{a_2}\right)$，$a_4=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{b}{a_3}\right)$ …如此继续下去，可以看出 a_2，a_3，a_4，…的值越来越接近$\sqrt{b}$。

比方说对$\sqrt{2}$求近似值，我们先取 $a_1=1$，那么

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{17}{12} = 1.416\cdots$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}) = 1\,\frac{169}{408} = 1.414215\cdots$$

如果我们把以上10进位制的表示用60进位制表示，那么

$$a_2 = \frac{1+2}{2} = 1;\ 30$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\ (1;\ 30 + \frac{2}{1;\ 30} = 1;\ 25$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\ (1;\ 25 + \frac{2}{1;\ 25} = \frac{2;\ 49,\ 42,\ 21}{2}$$

$$= 1;\ 24,\ 51,\ 10$$

现在你看图四的数字可见巴比伦人早在几千年前知道牛顿法了。

图四中对角线下42，25，35是什么意义呢？我们看到正方形左边有一个30，这表示它的边是30。那么对角线应该长30$\sqrt{2}$，所以用巴比伦的写法是

（30）×（1；24，51，10）　因此写成式子是

$$30 \times 1 \quad = 30$$

$$30 \times \frac{24}{60} = 12$$

$$30 \times \frac{51}{60^2} = \frac{51}{2\ (60)} = \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$$

$$30 \times \frac{10}{60^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{60^2} = \frac{5}{60^2}$$

故　（30）×（1；24，51，10）

$$= (30 + 12) + \frac{25}{60} + (\frac{30}{60^2} + \frac{5}{60^2})$$