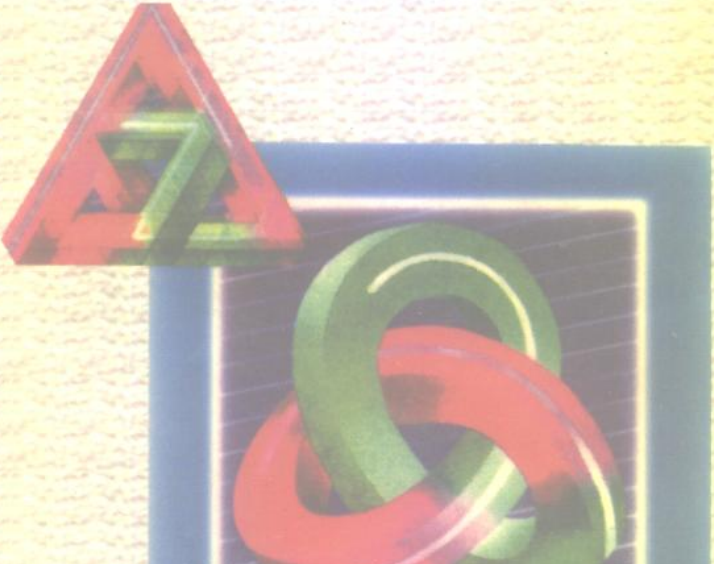
现代数学基础丛书

调和分析及其在偏微分方程中的应用

● 苗长兴 著



科学出版社

现代数学基础丛书

调和分析及其在偏微分方程中的应用

苗长兴 著

3

科学出版社

1999

内容简介

本书着重介绍调和分析的现代方法及其在偏微分方程中的应用.本书包含两大部分.第一部分主要内容是调和分析的基本内容和现代方法,特别是与现代偏微分方程研究联系密切的方法和技巧.第二部分则是利用调和分析的现代方法来研究偏微分方程,与此同时,借助于调和分析的方法,对一般可微函数空间进行了总结,这对于从事现代偏微分方程的研究是必不可少的.这一部分主要涉及线性发展方程解的时空估计、波动方程和色散波方程的柯西问题及散射性理论等.

读者对象包括理工科大学数学系、应用数学系和其他相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者.当然,它也可供纯粹数学家和应用数学家参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

调和分析及其在偏微分方程中的应用/苗长兴著.-北京:科学出版社,1999
(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-007863-2

Ⅰ.调… Ⅱ.苗… Ⅲ.①调和分析 ②调和分析-应用-偏微分方程 Ⅳ.O177.5

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第41565号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
丽源印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999年10月第一版 开本:850×1168 1/32
1999年10月第一次印刷 印张:22 5/8
印数:1—2 000 字数:596 000

定价:46.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

《现代数学基础丛书》编委会

前　言

调和分析或 Fourier 分析的起源可追溯到 Euler, Fourier 等著名数学家的研究，之后，经历了近 200 年的发展，已成为数学的核心学科之一. 它的方法几乎渗透到数学的所有领域，鉴于它的思想和方法来源于分析的许多领域，调和分析在数学的许多领域中有着广泛的应用，特别是对偏微分方程、代数数论而言尤为如此. 本书主要介绍调和分析的基本内容、基本技巧以及它在偏微分方程中的应用.

众所周知，调和分析中建立的许多分析工具诸如算子插值方法、极大函数方法、球调和函数理论、位势理论和一般可微函数空间等是研究偏微分方程的必备工具. 经典的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在双曲方程组的应用、第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在拟微分算子的作用、 BMO 空间在研究椭圆型偏微分方程的解的正则性等诸方面都充分体现了调和分析在偏微分方程研究中的巨大作用. 近 20 年来，随着调和分析理论的发展和逐步完善，它在偏微分方程中的应用显得尤为突出. 这主要表现在两方面，其一是它在研究椭圆型方程边值问题中的应用. 当区域是 Lip 边界时， E.M.Stein 及其学派解决了二阶椭圆型方程边值问题 L^p 估计以及解的正则性问题，这方面的工作可见 E.M.Stein 等的文章或 C.E.Kenig 的 " Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problem " 一书. 其二是它在研究发展型方程的定解问题中的作用. 以振荡积分估计及位势估计为基础，建立线性发展方程解的 $L^p - L^q$ 估计以及相应的时空估计，此为研究非线性发展型方程提供新的工作空间. 可以毫不夸张地讲，时空估计方法和非线性项的分数阶求导估计使非线性发展型方程的研究进入一个崭新的阶段. 例如：借助于时空估计方法和非线性项分数阶求导估计，可

以建立许多非线性色散波方程 (非线性 Schrödinger 方程、 KdV 方程、BO 方程等) 的 Cauchy 问题在低阶 Sobolev 空间中的适定性理论. W.A. Strauss 借助于时空估计, 将非线性色散波方程和非线性波方程的经典解的散射性理论扩充到能量解的散射性理论, 建立了非线性 Schrödinger 方程和非线性波动方程能量小解的散射性理论. 在适当的条件下, Brenner 获得了非线性 Klein-Gordon 方程 Cauchy 问题能量解的散射性理论, 而 Ginibre 和 Velo 建立了非线性 Schrödinger 方程能量解的散射性理论. 利用时空估计和非线性项的时空估计, 5 次波动方程 Cauchy 问题能量解的适定性的建立以及耦合 Klein-Gordon-Maxwell 方程 Cauchy 问题能量解的适定性的建立等都充分证明了调和分析方法在现代偏微分方程研究中的主导作用. 本书主要包含 Fourier 变换、平移不变算子理论、球调和函数的理论及其应用、算子插值理论、极大函数理论及 BMO 空间、奇异积分理论及其应用、 Littlewood-Paley 理论、位势 Banach 空间及一般可微函数空间、振荡积分估计、线性发展方程解的时空估计、色散波方程 (组) 的 Cauchy 问题及散射性理论、经典波动方程的 Cauchy 问题及散射性理论等. 本书的调和分析部分以基本内容、基本技巧为主线, 特别是与现代偏微分方程研究联系密切的方法和技巧. 在偏微分方程的应用方面, 重点研究非线性发展方程的调和分析技巧和方法. 而椭圆型方程的调和分析方法可见 Kenig 的专著. 当然, 这里我们借助于乘子理论和 Hörmander 空间给出了算子半群与解析半群的乘子刻画, 这对偏微分方程的半群方法也有重要作用. 需要说明的是, 本书中许多定理的证明是由作者重新给出, 限于作者所识, 不妥之处在所难免, 希望诸位同仁批评指正, 以便再版时予以纠正.

在本书的写作过程中, 得到了周毓麟院士的热情关心和极大的帮助, 周先生给我提供了自己多年积累的资料, 并对本书的内容和选材提出了很好的建议. 周民强教授是作者调和分析的引路人, 1996 年作者聆听周民强先生的调和分析入门课程, 他精辟的讲解给我留下了深刻的印象, 并且影响了作者日后的

学习和研究. 国外著名的数学家 L. Hörmander, T.Kato, W.Wahl, J.Ginibre, N.Hayashi, Y.Tsutsumi 等给作者提供了他们的文章和许多有价值的资料, 有些问题和他们进行了有益的讨论. 郭柏灵教授始终对本书的写作予以热情的帮助, 在他的关心和支持下, 本书的部分内容作为博士生教材, 在中国工程物理研究院研究生部使用多次, 先后参加听课的有: 丁时进副教授、黄海洋副教授、胡越副教授、邢家省博士、韩永前博士、鲁百年博士、元荣博士、蒋慕蓉博士、杜先云博士等, 他们给作者提出许多宝贵的意见. 所有这些对本书的形成都起到了极大的推动作用, 在此致以诚挚的感谢.

张恭庆院士、丁伟岳院士对本书的写作予以热情鼓励和支持, 作者深表感谢. 借此机会, 作者对丁夏畦院士、孙和生教授、符鸿源教授、沈隆钧教授、叶其孝教授、王靖华教授、陈国旺教授、白凤图教授、顾永耕教授等表示深深的感谢, 他们在作者的成长过程中给予许多真诚的帮助. 与此同时, 作者对同行江松教授等表示谢意, 他们对作者从事本书的写作给予了热情的关心和支持. 本书的排版录入均由作者之妻刘晓岚女士完成, 科学出版社的编审吕虹女士等作了大量的编辑工作, 作者对她们的辛勤劳动表示由衷的感谢.

本书得到国家自然科学基金委员会优秀科研成果专著出版基金的资助.

作者

1999 年

目　录

第一章 Fourier 变换

Fourier 变换是调和分析的核心问题和基本工具，它既有初等的运算，又蕴含许多高深的技巧和方法，可以讲它是许多方法的生长点. 本章着重讨论 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le 2)$ 上的 Fourier 变换性质，进而将 Fourier 变换的定义推广到缓增广义函数空间. 这里主要利用了欧氏空间的平移结构和函数的卷积运算性质.

§1.1 卷 积

本节我们来讨论函数的卷积. 卷积运算是现代分析中的基本运算，它在 Fourier 变换、函数逼近以及偏微分方程中起着重要的作用. 为讨论之便，先引入一些通用的记号. $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间， $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ 表示欧氏内积，相应的 $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ 是由欧氏内积诱导的欧氏范数. $L^p = L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$ 表示通常的 Lebesgue 空间，对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_p$ 表示通常的 L^p 范数. $C_0(\mathbb{R}^n)$ 表示集合 $\{f(x) \mid f(x) \in C(\mathbb{R}^n), \text{且} \lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$ 在 L^∞ 范数下所构成的空间. 若 $A \subset \mathbb{R}^n$, 通常用 $\mathrm{mes}(A)$ 和 $\mathrm{diam}(A)$ 分别表示 A 的测度和直径. $\mathcal{F}$ ($\hat{\ }$) 和 $\mathcal{F}^{-1}$ ($\check{\ }$) 分别表示 Fourier 变换及 Fourier 逆变换，而 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 分别表示 Schwartz 速降函数空间和 Schwartz 缓增广义函数空间.

定义 1.1 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个 Lebesgue 可测函数，若 $f(x-y) \cdot g(y)$ 对几乎处处的 x 是 y 的可积函数，则称

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy, \tag{1.1}$$

是 f 与 g 之卷积.

直接验算，卷积具有如下性质 (假设式中出现积分存在):

(i) $f * g = g * f$.

(ii) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(iii) $\tau_z(f*g)=\tau_z f*g=f*\tau_z g$.

(iv) supp $(f*g)\subset$ supp f+supp g. 这里 $\tau_z f(x)=f(x-z)$.

定理 1.1(Young 不等式) 设 $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $h=f*g$ 几乎处处存在且有

$$\|f*g\|_p\le\|f\|_p\|g\|_1. \tag{1.2}$$

证明 当 $1\le p<\infty$ 时，利用 Minkowski 不等式可见

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy=\|f\|_p\cdot\|g\|_1,\end{aligned}$$

而当 $p=\infty$ 时，(1.2) 是显然的，于是 Young 不等式 (1.2) 成立. 这里用到了 Minkowski 不等式，一般地可表示为：

引理 1.2 (Minkowski 不等式) 设 $1\le p<\infty$, 则有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy. \tag{1.3}$$

证明 记 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)dy$, 注意到积分交换次序，有

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_p&=\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^m}F\cdot\phi dx\\&=\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\phi(x)dxdy\\&\le\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\|\phi\|_{p'}dy\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy.\end{aligned}$$

从而，Minkowski 不等式 (1.3) 得证.

注记 1.1 由 Young 不等式及卷积的基本性质，容易看出：

(a) $f,g \in L^1 \Rightarrow f*g \in L^1$. 于是， L^1 中的函数在加法、数乘、卷积意义下构成了一个 Banach 代数. 然而，一般地，$f \in L^1, g \in L^1 \not\Rightarrow f\cdot g \in L^1$, 故 L^1 在通常乘法意义下不是Banach 代数.

(b) $f*g$ 继承了 f,g 中每一个函数的优良性质，例如：若 f 可微，则 $\Rightarrow f*g$ 可微. 它实际上开辟了用光滑函数逼近一般函数的方法.

(c) Fourier 变换将卷积变成乘积，将乘积变成卷积.

(d) $\forall k(x) \in L^1, k(x)$ 决定了 K: $L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子，即

$$Kf = k(x)*f,$$

且 $\|K\| = \|k\|_1$, 这里 $1 \le p \le \infty$.

正则化原理 首先引入 L^1 伸缩函数簇的概念：

定义 1.2 对 $\phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon}), \qquad \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

称 $\{\phi_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\phi(x)$ 的伸缩函数簇.

易见， $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx$. 如：$\phi(x) = \chi_{|x|\le 1}(x)$ 是集合 $\{x: |x| \le 1\}$ 上的特征函数，那么，

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi_{|x|\le\varepsilon}(x),$$

进而，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon(x) = \delta(x),$$

这里 $\delta(x)$ 表示 Dirac 函数.

定理 1.3 设 $\phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\phi dx = a$.

(i) 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,$1 \le p < \infty$ 或 $f \in C_0 \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$f*\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^p} af(x), \qquad \varepsilon \to 0; \tag{1.5}$$

$$f*\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} af, \qquad \varepsilon\to 0, \quad f \in C_0 \subset L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

(ii). 若 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $f(x)$ 在开集 V 上一致连续，则

$$f * \phi_\varepsilon \xrightarrow{1} f, \quad \varepsilon \to 0, \quad x \in V. \tag{1.7}$$

证明 (i) 注意到

$$f * \phi_\varepsilon - af = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\phi_\varepsilon(y)dy,$$

由 Minkowski 不等式 (1.3), 得

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_\varepsilon - af\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\phi_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |\phi_\varepsilon(y)|dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |\phi(y)|dy.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

注意到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\|f\|_p < \infty,$$

以及 L^p 空间函数的整体连续性

$$\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{1.9}$$

对 (1.8) 式利用 Lebesgue 控制收敛定理，就得

$$\|f * \phi_\varepsilon - af\|_p \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0 \quad (1 \le p < \infty).$$

另一方面，当 $p = \infty$, $f \in C_0 \subset L^\infty$, 因而 $\|f(x)\|_\infty < \infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\|f * \phi_\varepsilon - af\|_\infty \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)||\phi(y)|dy \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

(ii) 对 $\forall\delta>0$, 取充分大的闭集 W, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n\setminus W}|\varphi(x)|dx\le\delta$. 于是,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in V}\|f*\phi_\varepsilon-af\|_p\le&\sup_{x\in V,y\in W}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|\int_W|\varphi|dx\\&+2\|f\|_\infty\delta.\end{aligned}\tag{1.10}$$

故当 $\varepsilon\to0$ 时, 由 δ 的任意性, 就得 (1.7).

注记 1.2 (a) 在定理 1.3 中, 若 $a=1$, 就是所谓 L^p 正则化原理, 特别, 当 $a=0$, (1.5) 和 (1.6) 仍然成立.

(b) 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$. 记 $\omega_{p,f}(h)=(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^pdx)^{\frac{1}{p}}$, 那么

$$\lim_{h\to0}\omega_{p,f}(h)=0.\tag{1.11}$$

事实上, 由于 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 稠于 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 因此, 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\|f-g\|_{L^p}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面, 由 $g(x)$ 的一致连续性, 可取 h 充分小, 使得

$$|g(h+x)-g(x)|\le\frac{1}{\mathrm{mes}(B_{\mathrm{diam(supp}g)+1}(0))}\cdot\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样, 当 h 充分小时, 据上面两式易见

$$\begin{aligned}\omega_{p,f}(h)\le&\|f(x+h)-g(x+h)\|_p+\|g(x)-f(x)\|_p\\&+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x+h)-g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\\<&\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon\mathrm{mes(supp}g)}{3\mathrm{mes}(B_{\mathrm{diam(supp}g)+1}(0))}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{1.12}$$

推论 1.4 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 或 $f\in C_0\subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则存在 $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset C_c^\infty$, 使得

$$\lim_{\varepsilon\to0}g_\varepsilon\overset{L^p}{=}f,\qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n),\quad1\le p<\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon \overset{L^\infty}{=} f, \qquad \forall f \in C_0 \subset L^\infty.$$

证明 (i) 若 $f(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集，取 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\rho(x)$ 满足

$$\rho(x)=\begin{cases} C_n e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\ge 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

且 $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)dx=1$. 于是， $g_\varepsilon=f*\rho_\varepsilon(x)\in C_c^\infty$ 并且

$$\|g_\varepsilon-f\|_{L^p}\longrightarrow 0, \qquad \varepsilon\to 0.$$

(ii) 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$ 以及 $\forall\delta>0$, 存在紧支集函数 $g\in L^p$ 使得

$$\|f-g\|_p<\frac{\delta}{2},$$

于是，取 $g_\varepsilon=g*\rho_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 当 ε 充分小时，由 (i) 可见

$$\|f-g_\varepsilon\|_p\le\|f-g\|_p+\|g-g_\varepsilon\|_p<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

(iii) 类似地，读者可证明 $f\in C_0\subset L^\infty$ 的情形.

点态收敛 上面介绍了 L^p 意义的逼近问题，在适当条件下，这些逼近在点态意义下也是收敛的.

命题 1.5 设 $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\phi dx=1$. 记

$$\psi(x)=\sup_{|y|\ge|x|}|\phi(y)|,$$

并设 $\psi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\psi(x)$ 满足如下性质：

(i) $\psi(x)$ 是径向函数 $(|x|=|y|\Rightarrow\psi(x)=\psi(y))$.

(ii) 对 $|x|=r,\psi_0(r)=\psi(x)$ 是 r 的非增函数.

(iii) 当 $|x|\to 0$ 或 $|x|\to\infty$ 时，有 $|x|^n\psi(x)\to 0$, 特别，存在常数 A, 使得

$$|x|^n\psi(x)\le A, \quad 0<|x|<\infty. \tag{1.14}$$

(iv) 设 $\chi_\eta(x)$ 是集合 $\{x:\ |x|\ge\eta\}$ 上的特征函数，则对 $0<\eta<\infty$ 及 $1\le p\le\infty$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\chi_\eta\psi_\varepsilon\|_{p'}=0, \tag{1.15}$$

这里 $1/p+1/p'=1$.

证明 (i),(ii) 是显然的. 下来证明 (iii). 用 Σ_{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面, ω_{n-1} 表示球面面积. 考虑

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r}\psi(x)dx=\int_{\Sigma_{n-1}}d\sigma\int_{\frac{r}{2}}^{r}\psi_0(\rho)\rho^{n-1}d\rho$$
$$\geq\omega_{n-1}\psi_0(r)\frac{r^n}{n}(1-2^{-n})$$

据 $\psi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 可知

$$\lim_{|x|\to 0}|x|^n\psi(x)=0,\qquad \lim_{|x|\to\infty}|x|^n\psi(x)=0,$$

且存在常数 $A>0$ 使得 (1.14) 成立.

(iv) 考察

$$\|\chi_\eta\psi_\varepsilon\|_{p'}^{p'}=\int_{|x|\geq\eta}\psi_\varepsilon^{p'}(x)dx=\int_{|x|\geq\eta}\psi_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon^{p'-1}(x)dx$$
$$\leq[\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{\eta}{\varepsilon})]^{\frac{p'}{p}}\int_{|x|>\eta}\psi_\varepsilon(x)dx,\tag{1.16}$$

这里用到 $p'-1=\frac{p'}{p}$ 以及 (ii). 根据 $\psi(x)\in L^1$ 和 (iii) 即知

$$\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{\eta}{\varepsilon})=\left[\frac{\eta^n}{\varepsilon^n}\psi_0(\frac{\eta}{\varepsilon})\right]\cdot\frac{1}{\eta^n}\to 0,\quad \varepsilon\to 0.$$

从而推得 (iv).

定理 1.6 设 $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\phi dx=1$. 令 $\psi(x)=\sup\limits_{|y|\geq|x|}|\phi(y)|$, 若 $\psi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么, 对 $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leq p\leq\infty$, 就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f*\phi_\varepsilon(x)\overset{a.e.}{=}f(x),\quad \forall x\in L_f,\tag{1.17}$$

其中 L_f 表示 $f(x)$ 的 Lebesgue 点集.

证明 注意到

$$L_f=\left\{x:\quad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|y|\leq r}|f(x-y)-f(x)|dy=0\right\},\tag{1.18}$$