

PEKING
UNIVERSITY

北京大学院士文库

段学复文集



北京大学出版社

北京大学院士文库

段学复文集

段学复 著

北京大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

段学复文集/段学复著. —北京:北京大学出版社,1999.5
(北京大学院士文库)
ISBN 7-301-03102-5

I. 段… II. 段… III. 代数-理论-文集 IV. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 06381 号

2508/10
书 名: 段学复文集(北京大学院士文库)

著作责任者: 段学复 著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-03102-5/O · 375

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62559712 编辑室 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787×1092 16 开本 18.375 印张 255 千字

1999 年 5 月第一版 1999 年 5 月第一次印刷

定 价: 38.00 元



段学复院士



段学复院士与夫人雷彬如老师

北京大学资源集团出版基金资助出版

谨以此书献给北京大学校庆 100 周年

《北京大学院士文库》编委会名单

主 任：陈佳洱

副主任：王义道

委 员：(按姓氏笔画为序)

王 选 甘子钊 巩运明

侯仁之 赵亨利 姜伯驹

徐光宪 翟中和

序

最近,北京大学出版社告诉我,北京大学资源集团设立出版基金,资助出版一套《北京大学院士文库》,为北京大学的中科院院士和工程院院士每人出一本学术专著或学术论文集,以记载他们为祖国的科学技术事业所作出的贡献。北大出版社邀我为这套书写个序。

考虑到我较长时间在中国科学院工作,为科学家树碑立传,把他们的伟业记载下来并留传给后人,自然是我应该大力支持的事情。同时,我也曾在北大学习过,这些院士中有的就是我过去的老师,他们对我精心培育的情景,使我终生难忘;有的曾是我的同学或同事,我们之间有着非常深厚的友谊,他们为科学事业无私奉献的精神,给我留下了极为深刻的印象,至今历历在目。无论从工作上考虑还是从师生、同事情义出发,我都愿意为这本书写个序。

我认为,北京大学出版社出版《北京大学院士文库》这套书,是一件非常有意义的事。

首先,《北京大学院士文库》将为我国科学技术文献宝库增添新的内容。北京大学是我国一所著名的高等学府,也是世界上一所有影响的大学。它不仅为国家培养了大批栋梁之材,而且为国家提供了大批重要的科技成果,成为我国一个重要的科学中心。在这所大学里聚集了一批我国最著名的专家和学者,其中仅就自然科学而言,就有中科院院士和工程院院士 30 人。他们中既有学识渊博、造诣精深、蜚声中外的老专家、学者,也有一批成绩卓著,近年来为祖国科学技术事业作出过重大贡献的中年学者。他们在我国科学技术发展史上占有重要的地位,是我国科技大军中的中坚力量。现在,北大出版社把他们的科学技术著作收集起来,集中出版,无论是他们当年成名之作,还是新发表的学术专著和学术论文,都将为我国科

学技术文献宝库增添重要的内容。

其次,《北京大学院士文库》还将为我国科学技术事业的发展提供宝贵的经验。这套学术文库不仅完整地记载了这些学术大师的发明和创造,而且还生动地描绘了他们在不同历史时期为科学事业奋斗的历程。他们以亲身的经历,丰富的史料,独特的见解,深奥的思想,总结了科学技术发展的规律。例如,科学家最需要什么样的支持,在什么样的条件下最容易出成果等。这里既有成功的经验,也有失败的教训;既有成功的喜悦,也有受挫的苦恼。有的院士还从他们的切身感受出发,对我国科技人才的培养,科技体制的改革提出了很好的建议。这些都为我们科技管理部门和科技管理工作,特别是为我国制定有关的科技政策,提供了很好的经验和借鉴。

第三,《北京大学院士文库》不仅是一套科学技术著作,而且是一套富有教育意义的人生教科书。这套文库详细地记载了这 30 位科学家的学术成就,也如实地记载了他们的人生经历。他们不仅学问好,而且人品好。他们的一生是在爱国主义旗帜下,为科学事业奋斗的一生。他们通过自己的勤奋努力,走了一条成功之路。他们的成功经验无论对年轻人,还是对一切有志于献身科学事业的人,都有极好的教育意义。

最后,我向这 30 位院士为祖国科技事业作出的贡献表示衷心的感谢!对《北京大学院士文库》的出版表示热烈的祝贺!也希望能有更多的科学家的学术著作和传记问世,因为科学是推动我们社会发展的强大动力。

中国科学院院长

周光召

1996 年 10 月

序

北京大学出版社决定编辑出版《北京大学院士文库》，这件事情很有意义，我非常赞成。

从世界高等教育的发展看，教师是大学的核心，他们构成学校的基调。世界一流大学都具有很强的教师阵容，拥有一批世界公认的学术权威和知名学者。正是他们能够培养出世界公认的优秀人才。其中一部分毕业生能够成为当代世界政治、经济、文化、科学领域里的杰出代表。同时，他们能够取得重大的科研成果，特别是在基础研究方面，能取得具有划时代意义的科研成果。

在中国科技、教育界，院士是最高学术水平的象征。他们对国家科学技术的发展起着相当重要的作用。北大是拥有院士最多的大学，北大人一直为此而自豪。北大的几十位院士可分为两部分，一部分是老院士，他们在中国科学院成立之初就因为各自取得的成就而成为最早的一批院士（当时称学部委员）。这些老院士德高望重、学风严谨、蜚声国内外，为北大乃至中国的科学技术和文化事业的发展作出了奠基性贡献。他们当中有理科的王竹溪、叶企孙、江泽涵、许宝騄、周培源、胡宁、段学复、饶毓泰、黄昆、张青莲、黄子卿、傅鹰、汤佩松、李继侗、张景钺、陈桢、乐森珩等教授。北大的盛名，在很大程度上是与这些堪称大师的第一代院士的名字联系在一起的。这一长串院士名单，奠定了北大在中国学术界、科学界的地位。谈起他们，像我这样的后辈无不怀有敬仰之情。他们像一块块强力磁铁，吸引着一代代中华学子到燕园求学，在他们的教诲、指导、影响下，新中国急需的大批优秀人才源源不断地从北大培养出来，成为社会主义建设的栋梁之材。当院士文库推出的时候，这些老院士当中已有不少人离开了我们，但他们为北大、为国家建立的功勋，他们的英名将永远为人们铭记！

北大的学术生命是长青的，继第一批院士之后，80年代、90年代，北大又一批理科教师，其中许多是建国以后培养出来的，成为中

中国科学院院士和中国工程院院士,他们可以说是北大那些与新中国风雨同舟、不畏清贫、不怕艰险、为教育和科学事业执着奉献的中年教师的代表,是今日北大的骨干依靠力量、学术中坚。

人类就要进入 21 世纪,北大也即将迎来建校 100 周年,当此世纪交替之际,北大雄心勃勃地提出:到 21 世纪初叶建成世界一流的社会主义大学。这是一个需要为之付出极其艰苦努力的、振奋人心的目标。以院士为代表的一流教师队伍是我们实现这一目标在学术上的最重要依托。有这样一支老年、中年教师队伍,再加上我们正在迅速成长起来的生气蓬勃、富有想象力和创造力、奋发向上、成为北大未来希望所在的青年教师,我们的目标是一定能够达到的。

院士们的工作成就,有很多都是在相当困难的条件下取得的,他们的奋斗精神和他们的成果一样,都是我们建设世界一流大学的宝贵财富和源泉。为院士出版文集,将他们的代表性学术成果或成名之作结集出版,是对院士们成就的肯定,也将使人们从他们的奋斗足迹中,得到某种启迪和鼓舞。院士文库将为我校的学术宝库增添重要的内容,成为哺育青年学生成长的极好教材。

北大出版社的决定得到了北大资源集团的热情支持,他们出资建立北大资源集团出版基金,资助院士文库的出版。我作为北大校长和一个院士、一个教师,要向北大出版社和北大资源集团为学术专著的出版和学校建设所作的努力表示敬意!

北京大学校长
中科院院士

陈佳洱

1997 年 1 月

目 录

Some "Anzahl" Theorems for Groups of Prime-Power Orders	(1)
On Groups of Odd-Prime-Power Orders Whose Principal Subgroups are Cyclic	(8)
Determination of the Groups of Odd-Prime-Power Order p^n Which Contain a Cyclic Subgroup of Index p^2	(28)
Some Remarks on Simple Groups of Finite Order (Abstract)	(37)
On Groups Whose Orders Contain a Prime Number to the First Power	(38)
A Note on the Replicas of Nilpotent Matrices	(82)
On Algebraic Lie Algebras	(91)
On Simple Groups of Finite Order	(94)
An Anzahl Theorem of Kulakoff's Type for p -Groups	(107)
A Theorem about p -Groups with Abelian Subgroups of Index p	(115)
关于 p 群的一个定理	(122)
Algebraic Lie Algebras and Their Invariants (代数的李氏代数和它的不变量)	(128)
近代中国数学家在代数方面的贡献	(160)
代数学	(167)
Works on Finite Group Theory by Some Chinese Mathematicians	(204)
Preface (Editor 《Group Theory》, Beijing 1984)	(216)
Some Recent Works on Finite Group Theory by My Colleagues and Graduate Students	(219)
Some Problems in the Block Theory of Modular Representations	(224)

《中国大百科全书·数学》词条撰稿	(235)
悼念郑之蕃先生	(260)
天才勤奋成大家	
——悼华罗庚同志	(262)
Memories of Loo-Keng Hua	(266)
段学复主要论著目录	(273)
段学复传略	(276)

Some "Anzahl" Theorems for Groups of Prime-Power Orders

By Loo-Keng Hua(华罗庚) and Hsio-Fu Tuan(段学复)

In the theory of p -groups, or groups whose orders are powers of a prime p , there are a number of the so-called "Anzahl" theorems which relate to the number of sub-groups with a certain property. We shall define a group $\mathfrak{G}$ of order p^n as of rank δ , if the highest order of the elements of $\mathfrak{G}$ is equal to $p^{n-\delta}$. By means of this notion the "Anzahl" theorem due to Miller can be restated as follows:

If $\mathfrak{G}$ is a group of order p^n ($p \geq 3, n \geq 3$) of rank ≥ 1 , then the number of sub-groups of order p^m ($1 < m < n$) of rank 0 is congruent to zero, mod p .

The main object of the present paper is to establish the following theorem:

If $\mathfrak{G}$ is a group of order p^n ($p \geq 3, n \geq 5$) of rank ≥ 2 , then the number of sub-groups of order p^m ($2 < m < n-1$) of rank 0 is congruent to zero, mod p^2 , and the number of sub-groups of order p^m ($3 < m < n$) of rank 1 is congruent to zero, mod p .

In the proof of this theorem we employ mathematical induction over n in two ways, according to whether $\mathfrak{G}$ does not contain or actually contains a sub-group of index p of rank 1. In the first case, we establish the theorem by a direct application of the enumeration principle due to P. Hall. ⁽¹⁾ In the second case, we shall make use of the following theorem which seems to have some interests in itself.

⁽¹⁾ *Proc. London Math. Soc.* (2) 36 (1933), 29~95.

If $\mathfrak{G}$ is a group of order p^n ($p \geq 3, n \geq 5$) of rank 2, then $\mathfrak{G}$ has one and only one sub-group of index p of rank 2. ⁽²⁾

In the following pages, we shall always denote by p an odd prime number.

§1 Throughout this section, $\mathfrak{G}$ always denotes a group of rank 2. It contains a (normal) sub-group $\mathfrak{M}_1$ of index p of rank 1. It is known that $\mathfrak{M}_1$ is of the form⁽³⁾

$$(1) \quad \mathfrak{M}_1 = \{A_1, A_2\}, \quad A_1^{p^{n-2}} = 1, \quad A_2^p = 1, \quad (A_1 A_2) = A_1^{p^{n-3+\delta}}$$

where $\delta = 1$ or 0 , for $n \geq 4$. Evidently

$$(A_1^{a_1} A_2^{a_2})^p = A_1^{a_1 p}.$$

Let B be any element of $\mathfrak{G}$ but not in $\mathfrak{M}_1$, then $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{M}_1, B\}$. Since B^p belongs to $\mathfrak{M}_1$ and the p -th power of each element of $\mathfrak{M}_1$ belongs to the central of $\mathfrak{M}_1$, we have then

$$A_1^p B^p = B^p A_1^p.$$

Let

$$B^{-1} A_1 B = A_1^{a_1} A_2^{a_2}.$$

Then

$$B^{-1} A_1^p B = A_1^{a_1 p}$$

and

$$A_1^p = B^{-p} A_1^p B^p = A_1^{a_1^p p}.$$

Therefore

$$a_1^p \equiv 1 \pmod{p^{n-3}}.$$

Consequently, for $n \geq 5$,

$$a_1 \equiv 1 \pmod{p^{n-4}}.$$

Thus the commutator (A_1, B) is of order $\leq p^2$, and can be written as

(2) The proofs of Miller's and Kulakoff's "Anzahl" theorems as given by Hall (loc. cit.) by the application of his enumeration principle both depend essentially on an analogous result, namely, If $\mathfrak{G}$ is a group of order p^n ($p \geq 3, n \geq 3$) of rank 1, then $\mathfrak{G}$ has one and only one sub-group of index p of rank 1.

(3) See, for example, H. Zassenhaus. *Lehrbuch der Gruppentheorie* I (1937), 114.

$$(2) \quad (A_1, B) = A_1^{\lambda p^{n-4}} A_2^\mu.$$

Consequently we have

$$(3) \quad (A_1^p, B) = A_1^{\lambda p^{n-3}}$$

and

$$(4) \quad (A_1^{p^2}, B) = 1.$$

Since B^p belongs to $\mathfrak{M}_1$, by (1) and (4), we have, for $n \geq 5$

$$(5) \quad (A_2, B) = A_1^{\lambda p^{n-3} \nu}.$$

Using mathematical induction, we can easily obtain

$$(B A_1)^e = B^e A_1^{\epsilon} A_1^{\lambda p^{n-4} \lambda c(e)} A_2^{d(e)} \quad (\text{for } e > 0),$$

where

$$c(e) \equiv \frac{1}{2} e(e-1) \pmod{p}$$

and $d(e)$ is a certain integer depending on e , since

$$(A_1, B^e) = A_1^{\lambda \epsilon_1 p^{n-4}} A_2^{\epsilon_2} \quad \epsilon_1 \equiv e \pmod{p}.$$

In particular, for $p = e$, we have

$$(B A_1)^p = B^p A_1^p A_1^{\lambda p^{n-3} a} A_2^b.$$

The right hand side belongs to $\mathfrak{M}_1$, and therefore

$$(6) \quad (B A_1)^{p^2} = B^{p^2} A_1^{p^2}.$$

Further

$$(B A_2)^p = B^p A_2^p (A_2, B)^{1/2 p(p-1)} = B^p.$$

Since B is any element which belongs to $\mathfrak{G}$, but not to $\mathfrak{M}_1$, we can easily obtain that

$$(7) \quad (B A_1^i A_2^j)^{p^2} = B^{p^2} A_1^{ip^2}.$$

Lemma. For $p \geq 3$ and $n \geq 5$, in a group $\mathfrak{G}$ of order p^n of rank 2:

- (i) There is one and only one sub-group of index p of rank 2;
- (ii) There is no sub-group of index p of rank ≥ 3 ;
- (iii) The number of sub-groups of index p of rank 1 is congruent to zero, mod p ; and
- (iv) The number of cyclic sub-groups of order p^m ($3 \leq m \leq n-2$) is p^2 .

Proof. There exists an element B of $\mathfrak{G}$, not in $\mathfrak{M}_1$, of order $\leq p^2$. In fact, if B is an element of order p^m ($2 < m \leq n-2$) belonging to $\mathfrak{G}$, but not to $\mathfrak{M}_1$, then

$$B^{p^2} = A_1^{p^{n-m-1}a} A_2^b \text{ and } B^{p^2} = A_1^{p^{n-m}a}.$$

Let $B = B' A_1^{-p^{n-m-2}c}$. Thus, by (6)

$$B^{p^2} = B'^{p^2} A_1^{-p^{n-m}a} = 1.$$

We have $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{M}_1, B \rangle = \langle A_1, A_2, B \rangle$. More precisely,

$$B^\mu A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2}, \quad 0 \leq \mu < p, \quad 0 \leq \nu_1 < p^{n-2}, \quad 0 \leq \nu_2 < p,$$

give p^n different elements of $\mathfrak{G}$. We shall prove that

$$(8) \quad B^\mu A_1^{\nu_1'} A_2^{\nu_2}, \quad 0 \leq \mu < p, \quad 0 \leq \nu_1' < p^{n-3}, \quad 0 \leq \nu_2 < p,$$

form a group $\mathfrak{M}'_1$, of index p of rank 2. By (1), (3) and (5), (8) evidently form a group which contains an element A_1^p of order p^{n-3} . Further, by (7), no element of (8) is of order p^{n-2} . Since (8) contains all elements of order $\leq p^{n-3}$ of $\mathfrak{G}$, the uniqueness in (i) and the result in (ii) follow immediately.

It is known that the number of sub-groups of index p of $\mathfrak{G}$ is congruent to 1 (mod p). We have shown that one of them is of rank 2 and none of them is of rank 0 and ≥ 3 . Therefore the number of sub-groups of index p of rank 1 is congruent to zero, mod p .

The elements of order p^m ($m \geq 3$) are of the form

$$B^\mu A_1^{p^{n-2-m}\lambda_1} A_2^{\lambda_2}, \quad p \nmid \lambda_1,$$

Thus there are $p^2 \varphi(p^m)$ such elements and therefore the group $\mathfrak{G}$ has p^2 cyclic sub-groups of order p^m .

§2 Enumeration Principle⁽⁴⁾. Let $\mathfrak{G}$ be any p -group and let $\mathfrak{D}$ be its principal sub-group of index p^d . Let $\mathfrak{M}_\alpha$ denote a typical major sub-group of index p^α of $\mathfrak{G}$ with $0 \leq \alpha \leq d$ (naturally $\mathfrak{M}_d = \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{G}$). Let $\mathfrak{N}$ be any set of sub-groups of $\mathfrak{G}$. Let $n(\mathfrak{M}_\alpha)$ denote the number of members of $\mathfrak{N}$ which belong to $\mathfrak{M}_\alpha$. Then

(4) loc. cit.